УДК 511.14, 511.235.1 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 4

ФОРМУЛЫ РАМАНУДЖАНА С КУБИЧЕСКИМИ КОРНЯМИ И ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ГАЛУА*

И. А. Крепкий, К. И. Пименов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В заметке дано объяснение формулам Рамануджана с кубическими корнями, основанное на теории Галуа. Пусть F — это циклическое кубическое расширение поля K. Доказано, что нормальное замыкание над K чисто кубического расширения поля F содержит некоторое чисто кубическое расширение поля K. Приведенное доказательство обобщается на радикалы степени q для произвольного простого q. В случае, когда базовое поле K — это поле рациональных чисел и поле F содержится в круговом расширении, полученном присоединением корней p-й степени из единицы, явно вычислено соответствующее простое радикальное расширение поля рациональных чисел. Доказательство основного результата является иллюстрацией к теореме Гильберта 90. Приведен пример конкретной формулы, обобщающей формулы Рамануджана для степени 5. Дано необходимое условие, которому удовлетворяют двухэтажные радикальные расширения базового поля, содержащиеся в нормальном замыкании чисто кубического расширения поля F. Библиогр. 5 назв.

Ключевые слова: теория Куммера, формулы Рамануджана, радикальные расширения, Гауссовы периоды.

1. Введение. Настоящая заметка посвящена обсуждению с позиции теории Галуа тождеств из элементарной алгебры, родственных известным тождествам Рамануджана из работ [1, с. 39] и [2]:

$$\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{2\cos\frac{6\pi}{7}}=\sqrt[3]{5-3\sqrt[3]{7}}$$

и

$$\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{9}-6}.$$

Из первого тождества вытекает такой

Факт 1. *Расширение* $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}},\sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}},\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}}\right]$ *содержит чисто кубическое расширение* $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{7}\right]$.

На естественный вопрос, каким образом $\sqrt[3]{7}$ полиномиально выражается через $\cos\frac{2\pi}{7},\cos\frac{4\pi}{7},\cos\frac{6\pi}{7}$, нетрудно найти ответ:

$$\sqrt[3]{\frac{2\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{4\pi}{7}}}+\sqrt[3]{\frac{2\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cos\frac{6\pi}{7}}}+\sqrt[3]{\frac{2\cos\frac{6\pi}{7}}{2\cos\frac{2\pi}{7}}}=-\sqrt[3]{7}.$$

Далее в предложении 1 мы показываем, каким образом существование чисто кубического подрасширения в аналогичной ситуации следует из соображений симметрии. Приведем небольшой список аналогичных формул для различных циклических кубических расширений поля $\mathbb{Q}$. Указанный многочлен — это минимальный многочлен для фундаментальных единиц a,b,c циклического кубического поля данного

*Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00429).

дискриминанта $D = p^2$; таблицы для всех простых $p < 1000$ приведены в работе [3]. Через A и B обозначены суммы кубических корней из отношений $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}}$ и $\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{b}} + \sqrt[3]{\frac{a}{c}}$:

$$x^3 - x^2 - 4x - 1; \quad D = 13^2; \quad A = -\sqrt[3]{13}, \quad B = 0;$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x - 1; \quad D = 19^2; \quad A = -\sqrt[3]{19}, \quad B = 0;$$

$$x^3 - 15x^2 - 49x - 1; \quad D = 31^2; \quad A = -\sqrt[3]{31^2}, \quad B = \sqrt[3]{31};$$

$$x^3 - 4x^2 - 7x - 1; \quad D = 37^2; \quad A = -\sqrt[3]{37}, \quad B = 0;$$

$$x^3 + 25x^2 + 151x - 1; \quad D = 43^2; \quad A = -\sqrt[3]{43^2}, \quad B = -3^3\sqrt[3]{43};$$

$$x^3 - 39x^2 - 42x - 1; \quad D = 61^2; \quad A = -\sqrt[3]{61}, \quad B = 0;$$

$$x^3 - 20x^2 - 157x - 1; \quad D = 67^2; \quad A = -\sqrt[3]{67^2}, \quad B = 2^3\sqrt[3]{67};$$

$$x^3 + 49x^2 + 119x - 1; \quad D = 73^2; \quad A = -\sqrt[3]{73^2}, \quad B = -\sqrt[3]{73}.$$

Бросается в глаза, что под кубическим корнем, дающим значение для A и для B, находится простой делитель p дискриминанта данного многочлена, а точнее, кондуктор соответствующего циклического кубического расширения. Можем ли мы дать априорное объяснение, почему в формуле поле $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{7}\right]$ содержится в нормальном замыкании поля $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}}\right]$?

Первая мысль, которая приходит в голову, — это соображения ветвления. А именно, 7 — это единственное простое число, которой ветвится в поле $\mathbb{Q}\left[\cos\frac{2\pi}{7}\right]$. Нетрудно доказать, что лишь простые числа 3 и 7 ветвятся в поле разложения минимального многочлена для $\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}}$, поэтому только они и могут ветвиться в чисто кубическом подрасширении этого поля разложения. Таким образом, искомое чисто кубическое расширение имеет вид $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{3^k 7^l}\right]$. Но нам не удалось доказать непосредственно, что показатель k на самом деле равен нулю.

Следующая теорема — это основной наш результат.

Теорема 1. *Пусть $p \equiv 1 \pmod 3$ — простое число и $F \subset \mathbb{Q}[\varepsilon_p]$ — кубическое подрасширение кругового поля. Предположим, что $a \in \mathcal{O}_F^*$ — единица числового поля F, не являющаяся кубом в F. Через b и c обозначим единицы, сопряженные с a. Тогда чисто кубическое подрасширение в поле $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{c}\right]$ равно $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{p}\right]$.*

2. Как найти формулу Рамануджана с кубическим корнем в правой части? Во всех заметках из списка литературы формулы Рамануджана выводятся при помощи манипуляций с симметрическими функциями от корней. В этом разделе мы приводим несложное объяснение возникновению кубического корня в правой части из соображений симметрии и аналогичную формулу с корнями пятой степени.

Предложение 1. *Пусть $p(t) = (t-a)(t-b)(t-c) \in \mathbb{Q}[t]$ — многочлен с циклической группой Галуа, причем $abc = 1$. Положим $\kappa = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}}$. Тогда либо $\kappa \in \mathbb{Q}$, либо $\kappa^3 \in \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}[\kappa]$ оказывается чисто кубическим подрасширением в $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{c}\right]$.*

Доказательство. Обозначим через L поле разложения многочлена $q(Y) = p(Y^3)$. Орбита элемента $\sqrt[3]{a} \in L$ состоит из 9 точек: $\omega^k\sqrt[3]{a}$, $\omega^k\sqrt[3]{b}$, $\omega^k\sqrt[3]{c}$, где $k = 0, 1, 2$ и $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Под действием группы Галуа трехэлементное множество $\left\{\omega^k\sqrt[3]{a} \mid k = 0, 1, 2\right\}$ либо переходит в себя, либо переходит в множество $\left\{\omega^k\sqrt[3]{b} \mid k = 0, 1, 2\right\}$, либо переходит в множество $\left\{\omega^k\sqrt[3]{c} \mid k = 0, 1, 2\right\}$.

Таким образом, для каждого $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ мы имеем $\sigma\left(\sqrt[3]{a}\right) = \omega^k\sqrt[3]{u}$; $\sigma\left(\sqrt[3]{b}\right) = \omega^l\sqrt[3]{v}$ и $\sigma\left(\sqrt[3]{c}\right) = \omega^m\sqrt[3]{w}$, где u, v, w — некоторая перестановка набора a, b, c, а $k, l, m = 0, 1, 2$. Более того, поскольку $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{c} = 1$, сумма $k + l + m$ делится на три, что равносильно тому, что $k - l \equiv l - m \equiv m - k \pmod 3$. В частности, порядок группы Галуа не превосходит 27.

Видим, что $\sigma\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right) = \omega^{k-l}\sqrt[3]{\frac{u}{v}}$, $\sigma\left(\sqrt[3]{\frac{b}{c}}\right) = \omega^{l-m}\sqrt[3]{\frac{v}{w}}$ и $\sigma\left(\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\right) = \omega^{k-l}\sqrt[3]{\frac{w}{u}}$. Следовательно, орбита элемента κ содержится в трехэлементном множестве $\{\kappa, \omega\kappa, \omega^2\kappa\}$. Последнее и означает, что $\kappa^3 \in \mathbb{Q}$. $\square$

Замечание 1. *Аналогичный факт можно сформулировать и для циклического расширения пятой степени. Пусть $L/\mathbb{Q}$ — расширения, группа Галуа которого является циклической порядка 5 с образующей σ. Возьмем $a \in \mathcal{O}_L^*$ и введем обозначения для элементов из орбиты:*

$$\sigma(a) = b; \quad \sigma(b) = c; \quad \sigma(c) = d; \quad \sigma(c) = e.$$

Тогда выражение

$$\kappa = \sqrt[5]{\frac{ac^3}{b^3d}} + \sqrt[5]{\frac{bd^3}{c^3e}} + \sqrt[5]{\frac{ce^3}{d^3a}} + \sqrt[5]{\frac{da^3}{e^3b}} + \sqrt[5]{\frac{eb^3}{a^3c}}$$

после возведения в пятую степень даст рациональное число. Например, если взять $a = 2\cos\frac{2\pi}{11} \in \mathbb{Q}\left[\cos\frac{2\pi}{11}\right]$ и $b = 2\cos\frac{8\pi}{11}$, то значение κ равно $2\sqrt[5]{11}$.

3. Теорема Гильберта 90. В этом пункте мы объясняем возникновение чисто кубического расширения в условиях теоремы 1. Простое наблюдение

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot(1 + b + bc)$$

снимает завесу таинственности с формул Рамануджана. Элемент $\beta = 1 + b + bc = 1 + \sigma(a) + \sigma(a)\sigma^2(a)$, в случае, когда не равен 0, обладает тем свойством, что $\frac{\beta}{\sigma(\beta)} = b$.

Поскольку $abc = 1$, по теореме Гильберта 90 всегда найдется элемент $\beta \in F$ такой, что $\frac{\beta}{\sigma(\beta)} = b$. Более того, он является единственным с точностью до умножения на рациональное число. Обозначим $\alpha = \sigma^2(\beta)$ и $\gamma = \sigma(\beta)$. Тогда $\frac{\alpha}{\beta} = a$ и $\frac{\gamma}{\alpha} = c$. Произведение $\alpha\beta\gamma \in \mathbb{Q}$ определено однозначно с точностью до домножения на куб рационального числа. Очевидно, что $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ лежит в поле $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{c}\right]$. Ситуацию, в которой $\alpha\beta\gamma \notin (Q^*)^3$, будем считать основной. В этом случае $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\right]$ — это искомое чисто кубическое расширение. В терминах исходных элементов мы имеем выражения

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} = \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}\right)\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$$

и

$$\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{b}}+\sqrt[3]{\frac{a}{c}}=(\beta+\gamma+\alpha)\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}.$$

Поскольку либо $a+b+c\neq 0$, либо $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq 0$, мы имеем явную реализацию чисто кубического расширения.

Разберем теперь, что нужно делать в том случае, когда $\alpha\beta\gamma\in\mathbb{Q}^3$. Переобозначим элементы, с которых мы стартуем, через $u, v=\sigma(u)$ и $w=\sigma(v)$, а построенные по ним при помощи теоремы Гильберта 90 три элемента обозначим не через α,β,γ, как было раньше, а через a, b и c. Таким образом, у нас имеются элементы $u=\frac{a}{b}; v=\frac{b}{c}$ и $v=\frac{c}{a}$, причем $abc=1$. Благодаря тому, что $abc=1$, мы можем продолжить процесс. Найдем α,β,γ такие, что $\frac{\alpha}{\beta}=a$; $\frac{\beta}{\gamma}=b$ и $\frac{\gamma}{\alpha}=c$. В этом случае $u=\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}=\frac{\alpha\beta\gamma}{\beta^3}$. Так что произведение $\alpha\beta\gamma$ может оказаться кубом в том и только в том неинтересном случае, когда $u\in(F^*)^3$. Таким образом, мы доказали предложение, описывающее чисто кубические подрасширения.

Предложение 2. *Пусть $F_0\subset\mathbb{R}$ — числовое поле и F/F_0 — циклическое кубическое расширение (в частности, $F\subset\mathbb{R}$). Для элемента $\lambda\in F^*$, не лежащего в $(F^*)^3$, мы рассматриваем поле $L=F_0\left[\sqrt[3]{\lambda},\sqrt[3]{\mu},\sqrt[3]{\nu}\right]$, где $\mu=\sigma(\lambda)$ и $\nu=\sigma(\mu)$. Тогда для некоторых $m\in F_0$, $\alpha\in F$, $\beta=\sigma(\alpha)$ и $\gamma=\sigma(\beta)$ таких, что $\alpha\beta\gamma\notin(F_0^*)^3$, имеет место ровно одна из возможностей:*

- $\lambda=\alpha$ *и* $L=F_0\left[\sqrt[3]{\alpha},\sqrt[3]{\beta},\sqrt[3]{\gamma}\right]\supset F_0\left[\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\right]=F_0\left[\sqrt[3]{\lambda\mu\nu}\right]$;
- $\lambda=m\frac{\alpha}{\beta}$ *и* $L\supset F_0\left[\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\right]=F_0\left[\sqrt[3]{\frac{\mu}{\lambda}}+\sqrt[3]{\frac{\nu}{\mu}}+\sqrt[3]{\frac{\lambda}{\nu}}\right]$ *(последнее равенство при условии $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$);*
- $\lambda=m\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}$ *и по-прежнему* $L\supset F_0\left[\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\right]=F_0\left[\sqrt[3]{m\lambda}+\sqrt[3]{m\mu}+\sqrt[3]{m\nu}\right]$ *(последнее равенство при условии $\lambda+\mu+\nu\neq 0$);*
- $\frac{\lambda}{m}\in(F^*)^3$ *и* $L=F_0\left[\sqrt[3]{m}\right]$.

Доказательство. Первая возможность реализуется в случае, когда $\mathrm{Nm}_{F/F_0}(\lambda)\notin(F_0^*)^3$.

Вторая возможность реализуется в том случае, когда $\mathrm{Nm}_{F/F_0}(\lambda)=m^3\in(F_0^*)^3$, но $\frac{\lambda}{\mu}\notin(F^*)^3$. Тогда $\mathrm{Nm}_{F/F_0}\left(\frac{\lambda}{m}\right)=1$, по теореме Гильберта 90 находим элемент $\alpha\in F^*$ такой, что $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lambda}{m}$. Поскольку $\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}=\frac{\alpha\beta\gamma}{\beta^3}$, то с необходимостью $\alpha\beta\gamma\notin(F_0^*)^3$.

Необходимое условие для реализации третьей возможности — $\frac{\lambda}{\mu}\in(F^*)^3$. Тогда $\lambda\mu\nu\in(F^*)^3\cap F_0^*=(F_0^*)^3$. Введем обозначение $m=\sqrt[3]{\lambda\mu\nu}\in F_0^*$ и увидим, что $\frac{\lambda}{m}$ не должно быть кубом в F^*. Покажем, что последнего условия достаточно. Применяем теорему Гильберта 90 к элементу $\frac{\lambda}{m}$, получаем элемент a такой, что $\frac{a}{b}=\frac{\lambda}{m}$. Так как $\frac{ac}{b^2}=\frac{\lambda}{\mu}$ — это куб в F^*, произведение $abc\in(F^*)^3\cap F_0^*=(F_0^*)^3$ и элемент a удовлетворяет необходимому и достаточному условиям для реализации второй ситуации. Поэтому $a=n\frac{\alpha}{\beta}$ для некоторого $n\in F_0^*$ и $\lambda=m\frac{a}{b}=m\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}$, что и требовалось.

Четвертая возможность наиболее неинтересная и комментариев не требует. $\square$

Ниже мы даем несколько более технологичную переформулировку доказанного предложения.

Мы рассматриваем чисто кубические вещественные расширения K/K_0, где $K = K_0\left[\sqrt[3]{\delta}\right] \subset \mathbb{R}$. *Ориентацией* такого расширения мы называем выбор образующей σ группы Галуа расширения $K[\omega]/K_0[\omega]$, которая изоморфна циклической группе C_3.

По теории Куммера после выбора конкретного первообразного кубического корня из единицы имеется каноническая биекция между чисто кубическими расширениями поля K_0 и элементами группы $K_0^*/(K_0^*)^3$.

Для циклического кубического расширения поля F_0/F мы изучаем связь между чисто кубическими расширениями поля F и чисто кубическими расширениями поля F_0. Имеются «неинтересные» чисто кубические расширения поля F^*, которые отвечают по теории Куммера образу вложения $F_0^*/(F_0^*)^3 \hookrightarrow F/F^*$.

Пусть F/F_0 — вещественное циклическое расширение простой степени p, σ — образующая группы Галуа. Эндоморфизмы абелевой группы F^* мы будем записывать аддитивно. К примеру, при $p = 3$ теорема Гильберта 90 говорит нам, что $\operatorname{Im}(\mathrm{Id}-\sigma) = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}+\sigma+\sigma^2)$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{Im}(\mathrm{Id}-\sigma)\cap\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-\sigma) = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-\sigma)\cap\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}+\sigma+\sigma^2) \subset \operatorname{Ker}(3\sigma) = \{0\},$$

где в последнем равенстве мы воспользовались отсутствием нетривиальных кубических корней из единицы в поле $F \subset \mathbb{R}$.

Предложение 3. *В введенных выше обозначениях:*

- *эндоморфизм* $\mathrm{Id}-\sigma$ *индуцирует изоморфизм из* $(\mathrm{Id}-\sigma)^k(F^*)$ *на* $(\mathrm{Id}-\sigma)^{k+1}(F^*)$ *при* $k \geqslant 1$*, а также изоморфизм факторгруппы на* F^*/F_0^* *на образ* $(\mathrm{Id}-\sigma)(F^*) = \operatorname{Ker}\left[F^* \overset{\mathrm{Nm}}{\to} F_0\right]$*;*
- *элемент* $(\mathrm{Id}-\sigma)(x)$ *попадает в* $(F^*)^p$ *в том и только в том случае, когда* $x \in F_0^* \cdot (F^*)^p$*;*
- *при* $k = 1, \ldots, p-1$ *имеет место гомоморфизм* $(\mathrm{Id}-\sigma)^k(F^*) \overset{\epsilon_k}{\to} F_0^*/(F_0^*)^p$ *такой, что* $\epsilon_k \circ (\mathrm{Id}-\sigma)^k(x) = \overline{\mathrm{Nm}_{F/F_0}(x)}$ *для любого* $x \in F^*$.

Доказательство. Первый пункт очевиден. Второй пункт следует из теоремы Гильберта 90. В самом деле, если элемент $x \in F^*$ таков, что $(\mathrm{Id}-\sigma)(x) = y^p$, то $(\mathrm{Nm}(y))^p = 1$, и в связи с отсутствием нетривиальных корней из единицы сам y лежит в $\operatorname{Ker}(\mathrm{Nm}) = \operatorname{Im}(\mathrm{Id}-\sigma)$. Пусть, скажем, $y = \frac{z}{\sigma(z)}$. Тогда $\frac{x}{z^p}$ переходит в единицу под действием $\mathrm{Id}-\sigma$, значит $\frac{x}{z^p} = m \in F_0^*$, что и требовалось.

В третьем пункте ϵ_k мы строим, как композицию норменного отображения $\widetilde{\mathrm{Nm}} : F^*/F_0^* \to F_0^*/(F_0^*)^p$ и изоморфизма, обратного к изоморфизму $\overline{(\mathrm{Id}-\sigma)^k} : F^*/F_0^* \to (\mathrm{Id}-\sigma)^k(F^*)$. ∎

Приведем описание основной конструкции для циклического расширения степени p.

Гомоморфизм ϵ_k описывает конструкцию, которая по каждому «интересному» радикальному расширению $F\left[\sqrt[p]{\delta}\right]/F$ строит содержащееся в его нормальном замыкании над F_0 радикальное подрасширение поля F_0. Неинтересными мы называем те расширения, для которых $\delta \in F_0^* \cdot (F^*)^p$. Если $\mathrm{Nm}(\delta)$ не является p-й степенью, то соответствующее подрасширение — это $F_0\left[\sqrt[p]{\mathrm{Nm}(\delta)}\right]$. Если же норма является p-й степенью, мы используем гомоморфизм ϵ_k в роли вторичного инварианта. Сначала поделим δ на корень p-й степени из нормы: $\delta = m\delta_0$, где $m \in F_0^*$ и $\delta_0 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Nm}_{F/F_0})$. Тогда если δ_0 оказался p-й степенью, то наше расширение «неинтересное». Иначе выберем максимальное k такое, что $\delta_0 \in (\mathrm{Id}-\sigma)^k(F^*)$ и тогда $F_0\left[\sqrt[p]{m\epsilon_k(\delta_0)}\right]$ — это искомое радикальное подрасширение базового поля.

Пример 1. *Для $p = 3$ и $k = 1$, как уже упоминалось выше, гомоморфизм ϵ_1 явно может быть задан формулой*

$$\epsilon_1(a) = (1+a+ab)(1+b+bc)(1+c+ca) = \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+6+3\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

где $b = \sigma(a)$, $c = \sigma(b)$ и предполагается, что $abc = 1$.

Приведенная формула работает не всегда, так как в правой части может оказаться ноль. Это происходит в точности тогда, когда минимальный многочлен для a оказывается *шенксовым кубическим многочленом* $X^3 - nX^2 + (n-3)X - 1$, т.е. многочленом из простейшего параметрического семейства, задающего циклические кубические расширения. В этой ситуации обязательно работает видоизмененный вариант формулы

$$\epsilon_1(a) = \left[(1+a+ac)(1+b+ba)(1+c+cb)\right]^{-1}.$$

Тот факт, что ϵ_1 является гомоморфизмом, имеет следующее забавное приложение.

Факт 2. *Если для циклического кубического расширения $\mathbb{Q}[a]$ имеет место соотношение*

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}} = n\sqrt[3]{m}$$

для некоторого целого m, свободного от кубов, то существует последовательность $n_k \in \mathbb{Q}$ такая, что

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^k}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^k}+\sqrt[3]{\left(\frac{c}{a}\right)^k} = n_k\sqrt[3]{m^k}.$$

Примеры таких последовательностей для $a \in \mathbb{Q}\left[\frac{2\pi}{7}\right]$ приводятся в заметках [4, 5].

4. Объяснение двухэтажных формул Рамануджана. На данный момент мы посредством элементарной теории Галуа объяснили формулу

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}} = n\sqrt[3]{m},$$

где $\mathbb{Q}[a]/\mathbb{Q}$ — циклическое кубическое расширение и $abc = 1$. Что же мы можем сказать про правую часть формулы $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$? Пусть $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{m}\right]$ — вещественное чисто кубическое подрасширение, содержащееся в нормальном замыкании расширения $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{a}\right]/\mathbb{Q}$. Напомним, что если $a = \frac{\alpha}{\beta}$, $b = \frac{\beta}{\gamma}$ и $c = \frac{\gamma}{\alpha}$, то можно считать, что $m = \alpha\beta\gamma$. Мы можем взять в качестве базового поля F_0 поле $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{m}]$, а в качестве циклического кубического расширения $F = F_0[a]$. Группу Галуа расширения F/F_0 мы отождествляем с группой Галуа расширения $\mathbb{Q}[a]/\mathbb{Q}$ и обозначаем образующую той же буквой σ. Отношения $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ окажутся кубами в поле F_0, а именно:

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} = \left(\frac{\sqrt[3]{m}}{\beta}\right)^3; \quad \frac{b}{c} = \frac{\beta\alpha}{\gamma^2} = \left(\frac{\sqrt[3]{m}}{\gamma}\right)^3; \quad \frac{c}{a} = \frac{\gamma\beta}{\alpha^2} = \left(\frac{\sqrt[3]{m}}{\alpha}\right)^3.$$

Переобозначая $\frac{\alpha}{\sqrt[3]{m}}$ через α', мы добиваемся того, что $\alpha'\beta'\gamma' = 1$, где, как обычно, $\beta' = \sigma(\alpha')$ и $\gamma' = \sigma(\beta')$. Предложение 1 говорит нам, что в F найдется чисто кубическое подрасширение поля F_0, причем

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{\frac{\alpha'}{\beta'}} + \sqrt[3]{\frac{\beta'}{\gamma'}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma'}{\alpha'}} = \sqrt[3]{\varphi\psi\theta}\left(\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\theta}\right)$$

для некоторых элементов φ, $\psi = \sigma(\varphi)$ и $\theta = \sigma(\psi)$ поля F таких, что $\frac{\varphi}{\psi} = \alpha'$; $\frac{\psi}{\theta} = \beta'$ и $\frac{\theta}{\varphi} = \beta'$. Сумма $\varphi + \psi + \theta$ лежит в $F_0 = \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{m}\right]$ и произведение также лежит в этом поле. Так что в правой части мы получаем двухэтажный радикал.

Процесс можно проитерировать и доказать, что в том случае, когда $\lambda\mu\nu$ не является кубом, поле $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{\lambda}, \sqrt[3]{\mu}, \sqrt[3]{\nu}\right]$ содержит башню

$$\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{m}\right] \subset \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{k_0 + k_1\sqrt[3]{m} + k_2\sqrt[3]{m^2}}\right] \subset \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{\kappa}\right],$$

где $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ и $\kappa \in \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{k_0 + k_1\sqrt[3]{m} + k_2\sqrt[3]{m^2}}\right]$. Примеры конкретных формул с трехэтажными радикалами приводятся в [4] (см. также тождество для косинусов Pi/19 с кубическими корнями, http://ru-math.livejournal.com/797774.html). Естественный вопрос, который возникает при взгляде на эту башню, — какого сорта подкоренные выражения могут встречаться в двухэтажном радикале? Рассмотрим следующий численный пример. Пусть $a = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ — корень многочлена $X^3 + X^2 - 2X - 1$. Тогда α, β, γ — это корни многочлена $T^3 - 7T - 7$, что легко проверить, манипулируя с симметрическими и кососимметрическими функциями от корней: $a+b+c$ и $ab+bc+ca$ — это два значения, отвечающие различным выборам знаков выражения

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma \pm (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{2\alpha\beta\gamma} = \frac{-21 \pm 7}{14},$$

где мы использовали тот факт, что дискриминант многочлена $T^3 - 7T - 7$ равен $-4\cdot(-7)^3 - 27\cdot 7^2 = 7^2$. Найдем теперь минимальный многочлен для φ, ψ и θ. Прежде всего эта тройка определена с точностью до домножения на элемент из $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{m}\right]$, поэтому мы можем отнормировать их так, чтобы $\varphi\psi + \psi\theta + \theta\varphi = \varphi\psi\theta$. Тогда коэффициенты искомого минимального многочлена мы можем вычислить, исходя из соотношений $\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\alpha}} = \sqrt[3]{\varphi\psi\theta}\left(\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\theta}\right)$ и $\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}} + \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\gamma}} = \frac{\varphi+\psi+\theta}{\sqrt[3]{\varphi\psi\theta}}$. Произведение $\alpha\beta\gamma$ находим, возводя в куб первое равенство: левая часть будет равна

$$a + b + c - 3 + 3\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} + \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}} + 3\right) = -4 + 3(3 - \sqrt[3]{7}) = 5 - 3\sqrt[3]{7}.$$

Из второго равенства выводим

$$\frac{(\varphi+\psi+\theta)^3}{\varphi\psi\theta}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-3+3\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}+\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}}+3\right),$$

что получается равным $-5+3(3-\sqrt[3]{7})=4-3\sqrt[3]{7}$.

Таким образом, φ,ψ и θ будут корнями кубического многочлена

$$X^3-(3-\sqrt[3]{7})X^2+(5-3\sqrt[3]{7})X-(5-3\sqrt[3]{7}).$$

Отметим, что мы попутно напомнили вывод формул $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=5-\sqrt[3]{7}$ и $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}=4-\sqrt[3]{7}$ для $a=2\cos\frac{2\pi}{7}$, с первой из которых начинается наша заметка.

Нехитрое наблюдение состоит в том, что $\mathrm{Nm}_{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}]/\mathbb{Q}}(5-3\sqrt[3]{7})=-64=(-4)^3$. При этом $(5-3\sqrt[3]{7})(4-3\sqrt[3]{7})=(3-\sqrt[3]{7})^3$. Это наблюдение будет сформулировано в общем виде в предложении 4.

Последнее может быть интерпретировано в терминах группы классов идеалов поля $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{7}\right]$. А именно, элемент $3-\sqrt[3]{7}$ с нормой 20 раскладывается в произведение двух дивизоров $\left(5,3-\sqrt[3]{7}\right)$ и $\left(4,3-\sqrt[3]{7}\right)$, нормы которых равны 5 и 4 соответственно. Легко видеть, что оба дивизора не главные, поскольку ни 5, ни 4 не являются нормами элементов из кольца целых поля $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{7}\right]$. Это следует из того, что уравнение $x^3+7y^3+49z^3-21xyz=5$ не имеет решений в целых числах, как видно из рассмотрения остатков от деления на 7. После возведения этих дивизоров в куб мы получаем главные дивизоры:

$$\left(5,3-\sqrt[3]{7}\right)^3=\left(4-3\sqrt[3]{7}\right);\quad \left(4,3-\sqrt[3]{7}\right)^3=\left(5-3\sqrt[3]{7}\right).$$

В первом случае и левая, и правая части равенства — это единственный делитель дивизора $\left(3-\sqrt[3]{7}\right)^3$ с нормой 125, а во втором случае слева и справа стоит единственный делитель того же дивизора с нормой 64. Таким образом, формулы Рамануджана приводят к явной конструкции элемента порядка три в группе классов идеалов поля $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{7}\right]$.

Предложение 4. *Пусть $\mathbb{Q}[a,b,c]/\mathbb{Q}$ — циклическое кубическое расширение с образующей σ, причем $b=\sigma(a)$ и $c=\sigma(b)$. Предположим, что отношение $\frac{a}{b}$ не является кубом в поле $\mathbb{Q}[a,b,c]$ и $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{m}]$ — чисто кубическое подрасширение в $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{b},\sqrt[3]{c}\right]$. Тогда выражения $\xi=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ и $\eta=\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}+\sqrt[3]{c^{-1}}$ таковы, что*

- $\xi\eta,\xi^3,\eta^3\in\mathbb{Q}[\sqrt[3]{m}]$;
- $\mathrm{Nm}_{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{m}]/\mathbb{Q}}(\xi)\in(\mathbb{Q}^*)^3$ *и* $\mathrm{Nm}_{\mathbb{Q}[\sqrt[3]{m}]/\mathbb{Q}}(\eta)\in(\mathbb{Q}^*)^3$.

Доказательство. Пусть L — нормальное замыкание поля $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{a}]$. Обозначения элементов α, β, γ, φ, $\psi,\theta,m=\alpha\beta\gamma$ поля L сохраняются в том виде, как были введены в начале параграфа.

Как уже было отмечено, $\xi=\sqrt[3]{\varphi\psi\theta}\left(\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\theta}\right)$. Аналогичным образом выводится равенство $\eta=\frac{\varphi+\psi+\theta}{\sqrt[3]{\varphi\psi\theta}}$. Поэтому ξ^3 и η^3 лежат в поле F и устойчивы по отношению к действию образующей группы Галуа $\sigma\in\mathrm{Gal}\,(F/F_0)$.

Произведение $\Pi = \xi\eta$ равно $3 + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} + \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}}$, то есть лежит в поле $F_0 = \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{m}\right]$ и по построению Π нетривиально раскладывается на множители в поле L. Простое наблюдение, которое мы, однако, не смогли обнаружить в литературе, состоит в том, что Π^3 раскладывается на множители уже в самом поле F_0, а именно,

$$\Pi^3 = \frac{(\varphi+\psi+\theta)^3}{\varphi\psi\theta} \cdot \frac{(\varphi\psi+\psi\theta+\theta\varphi)^3}{\varphi^2\psi^2\theta^2},$$

причем оба множителя не являются кубами в поле F_0.

Докажем теперь, что нормы элементов ξ^3 и η^3 являются кубами рациональных чисел. Для этого надо переставить операции возведения в куб и вычисления нормы. Но поскольку $\xi, \eta \notin \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{m}\right]$, требуется некоторый комментарий. Орбита элемента $\sqrt[3]{a}$ имеет длину девять. Так как $\frac{b}{a}$ не является кубом в F, имеем $\sqrt[3]{b} \notin F\left[\sqrt[3]{a}\right]$ и потому имеется автоморфизм $\tau \in \mathrm{Gal}\left(L[\omega]/F[\omega]\right)$ такой, что $\tau\left(\sqrt[3]{a}\right) = \left(\sqrt[3]{a}\right)$, а $\tau\left(\sqrt[3]{b}\right) = \omega\left(\sqrt[3]{b}\right)$. Из того, что $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c} = 1$, сразу же следует, что $\tau\left(\sqrt[3]{c}\right) = \omega^2\left(\sqrt[3]{c}\right)$. Таким образом, орбита элемента $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ под действием подгруппы $\langle\tau\rangle$ состоит из него и еще двух точек: $\sqrt[3]{a}+\omega\sqrt[3]{b}+\omega^2\sqrt[3]{c}$ и $\sqrt[3]{a}+\omega^2\sqrt[3]{b}+\omega\sqrt[3]{c}$. Заметим, что

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\omega\sqrt[3]{b}+\omega^2\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\omega^2\sqrt[3]{b}+\omega\sqrt[3]{c}\right) = a+b+c-3.$$

Применим к обеим частям равенства $\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\beta}{\sqrt[3]{m}}$ автоморфизм τ. При этом левая часть домножится на ω, так что $\tau\left(\frac{\beta}{\sqrt[3]{m}}\right) = \omega\frac{\beta}{\sqrt[3]{m}}$. Но $\tau(\beta) = \beta$, поскольку $\tau|_{\mathbb{Q}[a,b,c]} = \mathrm{Id}$. Поэтому $\tau(\sqrt[3]{m}) = \omega^2\sqrt[3]{m}$ и $\tau|_{\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{m},\omega\right]}$ порождает группу Галуа расширения $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{m},\omega\right]/\mathbb{Q}[\omega]$.

Посмотрим теперь на обе части равенства

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\theta}}\right)^3 = \varphi\psi\theta.$$

Правая часть лежит в $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{m}\right]$ и мы желаем показать, что норма правой части будет кубом. Норма числителя левой части равна кубу рационального числа $\mathrm{Nm}(\xi^3) = \xi^3\tau\left(\xi^3\right)\tau^2\left(\xi^3\right) = \left(\xi\tau(\xi)\tau^2(\xi)\right)^3 = (a+b+c-3)^3$ и норма знаменателя левой части тоже, разумеется, равна кубу рационального числа. Предложение доказано. $\square$

5. Арифметические соображения. Этот раздел содержит доказательство теоремы 1. Прежде всего отметим, что единицы вещественного кубического поля с нормой 1 образуют решетку ранга 2. С точностью до сопряжения в $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z})$ имеется ровно одна обратимая матрица $A \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Z})$ такая, что $A^3 = E$, а именно $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Поэтому в циклическом кубическом поле существует единица a такая, что a и $b = \sigma(a)$ порождают всю группу единиц единичной нормы. Если обозначить $c = \sigma(b)$, то набор из трех сопряженных образующих a, b, c группы единиц единичной нормы определен однозначно с точностью до перестановки и замены набора на обратный a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}. Минимальные многочлены для таких фундаментальных наборов в кубических подполях круговых полей $\mathbb{Q}[\varepsilon_p]$ для нескольких простых значений $p \equiv 1 \pmod 3$ приведены во введении.

Итак, пусть a — единица кубического поля $F \subset \mathbb{Q}[\varepsilon_p]$ такая, что $\frac{a}{b} \notin (F^*)^3$. Мы хотим показать, что

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} = n\sqrt[3]{p} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{b}} + \sqrt[3]{\frac{a}{c}} = m\sqrt[3]{p^2}$$

для некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$ и подходящего выбора образующей $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ (при замене σ на σ^{-1} правые части поменяются ролями).

Тогда, следуя описанию, данному нами в разделе 3, мы заключаем, что правая часть является целым алгебраическим числом и имеет вид $r\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ для некоторых $r \in \mathbb{Q}$ и $\alpha, \beta = \sigma(\alpha), \gamma = \sigma(\beta)$ таких, что $\frac{\alpha}{\beta} = a$. Домножая на общий целый рациональный множитель, мы можем считать, что α, β, γ — целые алгебраические. Разложим α в произведение простых дивизоров поля F. Так как $F/\mathbb{Q}$ — расширение Галуа простой степени, простое число $q \in \mathbb{Z}$ либо остается простым в кольце $\mathcal{O}_F$, либо полностью распадается $q = \mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_3$, либо в единственном случае, когда $q = p$, ветвится $p = \mathcal{P}^3$.

Можно считать, что у α нет инертных простых делителей (они обязаны быть общими делителями для α, β и γ, так что на них можно сократить). Далее, если скажем, $\mathcal{Q}_1$ делит α, то $\sigma(\mathcal{Q}_1) = \mathcal{Q}_2$ делит β. Поскольку $\frac{\alpha}{\beta}$ — целое алгебраическое, $\mathcal{Q}_2$ обязан делить и α тоже. Аналогично рассуждая, получаем, что все три простых дивизора $\mathcal{Q}_i$ делят и α, и β, и γ. Значит $q = \mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2\mathcal{Q}_3$ — это их общий делитель, на который можно сократить. Таким образом, дивизор элемента α равен $\mathcal{P}^k$, и, вычисляя норму, заключаем, что дивизор целого рационального числа $\alpha\beta\gamma$ равен p^k, что и требовалось доказать.

Заметка написана по мотивам дипломной работы первого автора, защищенной в 2012 году. Авторы глубоко благодарны Б. Б. Лурье за искренний интерес к задаче и поддержку.

Литература

1. *Berndt B. C.* Ramanujan's Notebooks. Part IV. New York: Springer-Verlag, 1994.

2. *Шевелев В. С.* Три формулы Рамануджана. Квант, 1988, №6. С. 52–55.

3. *Cohn H., Gorn S.* A computation of cyclic cubic units // Journal of Research of the National Bureau of Standards. 1957. Vol. 59, N 3. P. 155–168. (Доступно онлайн по адресу: http://nistdigitalarchives.contentdm.oclc.org/cdm/compoundobject/collection/p13011coll6/id/89262/rec/32)

4. *Witula R., Slota D.* New Ramanujan-Type Formulas and Quasi-Fibonacci Numbers of Order 7 // Journal of Integer Sequences. 2007. Vol. 10, N 5, Article 07.5.6. (http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/vol10.html)

5. *Witula R.* Ramanujan Type Trigonometric Formulas: The General Form for the Argument $\frac{2\pi}{7}$ // Journal of Integer Sequences. 2009. Vol. 12, N 3, Article 09.8.5. (http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL12/Witula/witula17.pdf)

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Пименов Константин Игоревич — кандидат физико-математических наук; kip302002@yahoo.com; k.pimenov@spbu.ru

Крепкий Илья Александрович — аспирант; feb418@gmail.com

CUBIC RAMANUJAN FORMULAE AND ELEMENTARY GALOIS THEORY

Konstantin I. Pimenov, Ilya A. Krepkiy

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034,
Russian Federation; kip302002@yahoo.com; k.pimenov@spbu.ru; feb418@gmail.com

Explanation for cubic root Ramanujan formulae is given from Galois theory perspective. Let F be a cyclic cubic extension over a base field K. It is proved that normal closure with respect to K of pure cubic extension of the field F contains certain pure cubic extension of the base field. Given proof can be generalized to the case where the radicals are of any prime degree. An explicit construction of the simple radical extension in question over a field of rational numbers is given for the field F being embedded in the cyclotomic prime field. The proof of the main result illustraes Hilbert 90 theorem. Example of Ramanujan formulae analogue for degree 5 is given. The neccceccary condition for nested radical expression of depth two to belong the normal closure of the normal closure of pure cubic extension of the field F is given. Refs 5.

Keywords: Kummer theory, Ramanujan formulae, radical extension, Gaussian periods.

References

1. Berndt B. C., *Ramanujan's Notebooks, Part IV* (Springer-Verlag, New York, 1994).
2. Shevelev V. S., *Three Ramanujan's formulae*, Issue 6 (Kvant, 1988, 52–55) [in Russian].
3. Cohn H., Gorn S., "A computation of cyclic cubic units", *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **59**(3), 155–168 (1957).
4. Witula R., Slota D., "New Ramanujan-Type Formulas and Quasi-Fibonacci Numbers of Order 7", *Journal of Integer Sequences*, **10**(5), Article 07.5.6 (2007).
5. Witula R., "Ramanujan Type Trigonometric Formulas: The General Form for the Argument $\frac{2\pi}{7}$", *Journal of Integer Sequences*, **12**(8), Article 09.8.5 (2009).