УДК 519.8 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРОПИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Н. К. Кривулин, В. Н. Сорокин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматривается задача оптимизации, которая формулируется в терминах тропической (идемпотентной) математики и состоит в минимизации нелинейной функции при наличии линейных ограничений на область допустимых значений. Целевая функция задается на множестве векторов над идемпотентным полуполем при помощи матрицы с использованием операции мультипликативно сопряженного транспонирования. Рассматриваемая задача является дальнейшим обобщением нескольких известных задач, в которых решение связано с вычислением спектрального радиуса матрицы. Это обобщение заключается в использовании целевой функции более сложного вида, чем в указанных задачах, и наличии дополнительных ограничений. Для решения новой задачи вводится вспомогательная переменная, которая описывает минимальное значение целевой функции. Затем задача сводится к решению неравенства, в котором вспомогательная переменная выступает в роли параметра. Необходимые и достаточные условия существования решений неравенства используются для вычисления параметра, а затем общее решение неравенства берется в качестве решения исходной задачи оптимизации. Приводятся числовые примеры решения задач на множестве двумерных векторов. Библиогр. 20 назв.

Ключевые слова: тропическая математика, идемпотентное полуполе, спектральный радиус, линейное неравенство, задачи оптимизации, полное решение.

1. Введение. Существует широкий класс задач оптимизации, в которых целевая функция и ограничения выражаются при помощи операций максимума и минимума, а также арифметических операций. К этому классу относятся, например, некоторые задачи размещения [1–3] и сетевого планирования [4–7]. Решение таких задач часто сопряжено с определенными трудностями, которые могут быть связаны, в частности, с нелинейностью и негладкостью целевой функции и ограничений.

Во многих случаях решение подобных задач можно упростить путем их представления на языке тропической математики и использования ее результатов. Тропическая (идемпотентная) математика охватывает область, связанную с изучением теории полуколец с идемпотентным сложением и ее приложениями [1, 6, 8–13]. Важным направлением развития этой области является разработка методов и алгоритмов решения задач оптимизации, сформулированных в терминах тропической математики [14].

Изучению задач тропической оптимизации посвящен ряд исследований, опубликованных за последние десятилетия, включая ранние работы [4–6], положившие начало этому направлению, а также недавние работы [3, 7, 13, 15–19].

Одна из задач оптимизации, которая рассматривалась еще в работе [4], связана с минимизацией функции, определенной на множестве вещественных векторов при помощи заданной матрицы и операции мультипликативно сопряженного транспонирования. В терминах тропического полукольца $\mathbb{R}_{\max,+}$, где максимум выступает в роли сложения, а арифметическое сложение — в роли умножения, эта задача приобретает форму

$$\min \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

где $\boldsymbol{A}$ — квадратная матрица, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}^{-}$ — неизвестный вектор и его сопряженное транспонирование, а матрично-векторные операции определены аналогично стандартным с заменой обычных покомпонентных операций сложения и умножения на тропические.

Такая задача имеет приложения, например, в сетевом планировании [1, 19], оптимальном размещении объектов [1, 20], принятии решений [15] и в других областях.

Известно (см., например, [4]), что минимум в задаче совпадает с тропическим спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$ и достигается на любом собственном векторе, соответствующем этому радиусу. Полное решение задачи, которое оказалось шире, чем множество собственных векторов матрицы $\boldsymbol{A}$, найдено в работах [16, 18] в форме следствия из решений других задач, а также в работе [19] как независимый результат.

В настоящей статье рассматривается дальнейшее обобщение задачи, в котором целевая функция имеет более сложную форму и введены дополнительные ограничения. Сначала представлен краткий обзор основных понятий и результатов тропической математики, необходимых для последующего анализа и решения задачи. Затем формулируется новая задача оптимизации и находится ее полное решение в явном виде в компактной векторной форме. Приводятся числовые примеры решения задач на множестве двумерных векторов.

2. Элементы тропической математики. В этом разделе приводятся основные понятия и результаты тропической математики [10, 16–20], на которые опираются решения, представленные в остальной части работы. Дополнительные детали и подробное изложение различных аспектов теории и методов тропической математики можно найти в работах [1, 8, 9, 11–13].

Рассмотрим набор $\langle \mathbb{X}, \oplus, \odot, \mathbb{0}, \mathbb{1} \rangle$, где $\mathbb{X}$ — непустое множество, на котором определены операции сложения $\oplus$ и умножения $\odot$. По сложению $\mathbb{X}$ является идемпотентным коммутативным моноидом с нейтральным элементом $\mathbb{0}$ (нулем). По умножению множество $\mathbb{X} \setminus \{\mathbb{0}\}$ образует коммутативную группу с нейтральным элементом $\mathbb{1}$ (единицей).

Идемпотентность сложения индуцирует частичный порядок на $\mathbb{X}$ такой, что $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Отсюда, в частности, следует, что неравенство $x \oplus y \leq z$ равносильно неравенствам $x \leq z$ и $y \leq z$. Кроме того, операции $\oplus$ и $\odot$ монотонны в смысле указанного порядка по каждому аргументу.

Умножение дистрибутивно относительно сложения, и для любого $x \in \mathbb{X} \setminus \{\mathbb{0}\}$ существует обратный по умножению x^{-1} такой, что $x \odot x^{-1} = \mathbb{1}$. Для любого $x \neq \mathbb{0}$ и натурального p определяются степени $x^0 = \mathbb{1}$, $x^p = x^{p-1} \odot x$, $x^{-p} = (x^{-1})^p$.

Учитывая, что множество $\mathbb{X}$ не является группой по сложению, такая структура обычно называется идемпотентным полуполем. Будем считать полуполе алгебраически замкнутым в том смысле, что уравнение $x^p = a$ имеет решение при любом $a \in \mathbb{X}$ и натуральном p. Далее для упрощения записи знак умножения $\odot$ будем опускать.

Примером вещественного полуполя является $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0 \rangle$, в котором сложение определено как $\max$, умножение как $+$, роль нуля играет $-\infty$, а единицы — 0. Для любого $x \in \mathbb{R}$ существует обратный по умножению x^{-1}, который равен противоположному числу $-x$ в обычной арифметике. Степень x^y определена для любых $x, y \in \mathbb{R}$ и соответствует арифметическому произведению xy. Порожденный сложением порядок на $\mathbb{R}_{\max,+}$ совпадает с естественным линейным порядком на $\mathbb{R}$.

Обозначим через $\mathbb{X}^{m \times n}$ множество матриц над $\mathbb{X}$, состоящих из m строк и n столбцов. Матрица, все элементы которой равны $\mathbb{0}$, считается нулевой. Матрица, у которой нет нулевых строк (столбцов), называется регулярной по строкам (столбцам).

Операции сложения и умножения матриц выполняются по обычным правилам с заменой соответствующих покомпонентных операций на $\oplus$ и $\odot$. Неравенства для матриц рассматриваются как покомпонентные в смысле введенного выше отношения порядка.

Рассмотрим квадратные матрицы из $\mathbb{X}^{n\times n}$. Обозначим через $\boldsymbol{I}$ единичную матрицу, на главной диагонали которой стоят $\mathbb{1}$, а вне ее — $\mathbb{0}$. Для любой квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ и натурального p определим степень $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A}$.

След квадратной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ вычисляется по формуле $\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}$.

Для любых двух матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, а также скаляра x из определения следа вытекают равенства $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \oplus \mathrm{tr}\boldsymbol{B}$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$ и $\mathrm{tr}(x\boldsymbol{A}) = x\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$.

Биномиальное тождество для матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ из $\mathbb{X}^{n\times n}$ и натуральной степени m имеет следующий вид:

$$(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^m = \bigoplus_{k=1}^{m} \bigoplus_{i_0+\cdots+i_k=m-k} \boldsymbol{B}^{i_0}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k} \oplus \boldsymbol{B}^m.$$

Нетрудно проверить справедливость тождества

$$\bigoplus_{k=1}^{m}(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^k = \bigoplus_{k=1}^{m} \bigoplus_{0\le i_0+\cdots+i_k\le m-k} \boldsymbol{B}^{i_0}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k} \oplus \bigoplus_{k=1}^{m}\boldsymbol{B}^k. \tag{1}$$

Множество вектор-столбцов размерности n обозначается $\mathbb{X}^n$. Если не оговорено иначе, будем рассматривать векторы как вектор-столбцы. Вектор, все элементы которого равны $\mathbb{0}$, называется нулевым. Вектор — регулярный, если у него нет нулевых компонент.

Мультипликативно сопряженным транспонированием вектора $\boldsymbol{x} = (x_j)$ называется преобразование, при котором $\boldsymbol{x}$ трансформируется в вектор-строку $\boldsymbol{x}^- = (x_j^-)$ с элементами $x_j^- = x_j^{-1}$, если $x_j \neq \mathbb{0}$, и $x_j^- = \mathbb{0}$ в противном случае.

Это преобразование обладает следующими свойствами: для ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$ справедливо равенство $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{x} = \mathbb{1}$, а если вектор $\boldsymbol{x}$ является регулярным, то $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^- \ge \boldsymbol{I}$.

Скаляр $\lambda \in \mathbb{X}$ является собственным числом матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$, если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ такой, что $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$. Максимальное собственное число называется спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$ и вычисляется по формуле

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/m}(\boldsymbol{A}^m). \tag{2}$$

3. Линейные неравенства и их решения. Приведем решения некоторых линейных неравенств, которые будут использованы ниже. Сначала предположим, что заданы матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m\times n}$ и регулярный вектор $\boldsymbol{d} \in \mathbb{X}^m$. Требуется найти все векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, удовлетворяющие неравенству

$$\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{d}. \tag{3}$$

Решение задачи обеспечивается следующим утверждением, разные доказательства которого приводятся, например, в работах [10, 19].

Лемма 1. *Для любой регулярной по столбцам матрицы $\boldsymbol{A}$ и регулярного вектора $\boldsymbol{d}$ все решения неравенства* (3) *имеют вид*

$$\boldsymbol{x} \le (\boldsymbol{d}^-\boldsymbol{A})^-.$$

Пусть теперь заданы матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и вектор $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^n$. Необходимо отыскать все регулярные векторы $\boldsymbol{x}$, для которых выполняется неравенство

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x}. \tag{4}$$

Чтобы записать решение задачи, сначала введем функцию, которая ставит в соответствие любой матрице $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ скаляр по правилу $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^n$.

При условии, что $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, введем оператор, известный также как «звезда Клини», который сопоставляет матрице $\boldsymbol{A}$ матрицу $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}$.

Решение неравенства (4) получено в [10, 18] в следующей форме.

Теорема 1. *Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ и вектора $\boldsymbol{b}$ справедливы утверждения:*

1) *если $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, то все регулярные решения неравенства (4) имеют вид $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u}$ — регулярный вектор такой, что $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{b}$;*

2) *если $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) > \mathbb{1}$, то регулярных решений не существует.*

4. Задачи тропической оптимизации. Рассмотрим ряд задач оптимизации, которые формулируются в терминах тропической математики, состоят в минимизации нелинейных функционалов и могут иметь ограничения в виде линейных векторных неравенств. Решение таких задач опирается на экстремальное свойство спектрального радиуса матрицы [16, 18–20].

Пусть спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ равен λ. Рассмотрим задачу

$$\min \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{5}$$

где минимум берется на множестве всех регулярных векторов $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$.

Полное решение задачи, найденное в [16, 18] как следствие из решений более общих задач с ограничениями, а также прямо полученное в [19], имеет следующий вид.

Лемма 2. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$. Тогда минимум в задаче (5) равен λ, а все регулярные решения задачи имеют вид*

$$\boldsymbol{x} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^n.$$

Известны решения [18, 19] для вариантов задачи (5) с целевой функцией более общего вида. Пусть, например, в дополнение к матрице $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ заданы векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{X}^n$ и скаляр $r \in \mathbb{X}$. Требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, обеспечивающие

$$\min \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^- \boldsymbol{x} \oplus r. \tag{6}$$

Полное решение этой задачи дает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$, а $\boldsymbol{q}$ — регулярный вектор. Тогда минимум в задаче (6) равен*

$$\mu = \lambda \oplus \bigoplus_{m=1}^{n} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{p})^{1/(m+1)} \oplus r, \tag{7}$$

а все регулярные решения задачи имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\mu^{-1}\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{u}, \qquad \mu^{-1}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{u} \leq \mu \left(\boldsymbol{q}^-(\mu^{-1}\boldsymbol{A})^*\right)^-. \tag{8}$$

Предположим, что для заданных матриц $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и вектора $\boldsymbol{p} \in \mathbb{X}^{n}$ необходимо определить множество всех регулярных векторов $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$, которые решают задачу

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p}, \\ &\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$, а $\boldsymbol{B}$ — матрица, для которой* $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$. *Тогда минимум в задаче* (9) *равен*

$$\theta = \lambda \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} \bigoplus_{1 \leq i_1 + \cdots + i_k \leq n-k} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}),$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} \geq \theta^{-1}\boldsymbol{p}.$$

Ниже будет предложено решение задачи, которая является дальнейшим обобщением задачи (9) с целевой функцией, определенной также, как в задаче (6).

5. Задача оптимизации с ограничениями. В этом разделе изучается новая задача оптимизации с нелинейной целевой функцией и ограничениями в форме линейного неравенства. Применяется подход, развитый в [16–19], при котором вводится дополнительная переменная, описывающая минимальное значение целевой функции. Затем задача сводится к решению неравенства, в котором эта переменная выступает в роли параметра. Необходимые и достаточные условия существования решений неравенства используются для вычисления параметра, а общее решение неравенства берется в качестве решения исходной задачи оптимизации.

Пусть заданы матрицы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{X}^{n \times n}$, векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{X}^{n}$ и скаляр $r \in \mathbb{X}$. Требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$, которые решают задачу

$$\begin{aligned} &\min\ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \oplus r, \\ &\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 4. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$, а $\boldsymbol{B}$ — матрица, для которой* $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$. *Для любого натурального m введем обозначения*

$$\boldsymbol{S}_{0m} = \bigoplus_{i=0}^{m} \boldsymbol{B}^{i}, \qquad \boldsymbol{S}_{km} = \bigoplus_{0 \leq i_0 + \cdots + i_k \leq m-k} \boldsymbol{B}^{i_0}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Тогда минимум в задаче (10) *равен*

$$\theta = r \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_{kn}) \oplus \bigoplus_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{S}_{k,n-1}\boldsymbol{p})^{1/(k+2)}, \tag{11}$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \theta^{-1}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{u} \leq \theta\left(\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*}\right)^{-}. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала заметим, что $\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p}\oplus\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x}\oplus r \geq \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \lambda > \mathbb{0}$ (по лемме 2), откуда следует, что целевая функция в (10) ограничена снизу. Обозначим минимум целевой функции на множестве всех регулярных векторов $\boldsymbol{x}$ через θ. Тогда все регулярные решения задачи (10) получаются из системы

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \oplus r = \theta, \qquad \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}.$$

Так как по предположению θ — минимум целевой функции, можно заменить равенство на неравенство

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \oplus r \leq \theta, \qquad \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}. \tag{13}$$

Первое неравенство в (13) равносильно системе неравенств

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \theta, \qquad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \leq \theta, \qquad \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \leq \theta, \qquad r \leq \theta.$$

После перемножения соответствующих частей второго и третьего неравенств имеем $\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \leq \theta^{2}$. Следовательно, $\theta \geq (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{p})^{1/2}$. Учитывая четвертое неравенство и то, что $\theta \geq \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \lambda$, находим нижнюю границу для θ в форме

$$\theta \geq \lambda \oplus (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{p})^{1/2} \oplus r.$$

Применив лемму 1 к первым трем неравенствам рассматриваемой системы, а затем умножая первые два из полученных неравенств на θ^{-1}, приходим к неравенствам

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \qquad \theta^{-1}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \leq \theta\boldsymbol{q}.$$

Наконец, объединяя эти неравенства с неравенством $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}$, запишем систему (13) в виде двойного неравенства

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x} \leq \theta\boldsymbol{q}. \tag{14}$$

По теореме 1 существование регулярных решений $\boldsymbol{x}$ для левой части неравенства (14) равносильно выполнению условия $\mathrm{Tr}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$. Рассмотрим выражение

$$\mathrm{Tr}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{k} = \mathrm{tr}\left(\bigoplus_{k=1}^{n}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{k}\right).$$

Сначала, применяя тождество (1) при $m = n$, запишем

$$\bigoplus_{k=1}^{n}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{k} = \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{0 \leq i_0 + \cdots + i_k \leq n-k} \theta^{-k}(\boldsymbol{B}^{i_0}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}) \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} \boldsymbol{B}^{k}.$$

Теперь с учетом обозначения $\boldsymbol{S}_{kn}$ получим

$$\mathrm{Tr}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) = \bigoplus_{k=1}^{n} \theta^{-k}\mathrm{tr}\boldsymbol{S}_{kn} \oplus \mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}).$$

Заметим, что неравенство $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$ уже выполнено по условиям теоремы. Остается обеспечить выполнение неравенства

$$\bigoplus_{k=1}^{n} \theta^{-k}\mathrm{tr}\boldsymbol{S}_{kn} \leq \mathbb{1}.$$

Последнее неравенство эквивалентно системе неравенств $\theta^{-k}\mathrm{tr}\boldsymbol{S}_{kn} \leq \mathbb{1}$, в которых $k = 1, \ldots, n$. Решение этих неравенств приводит к системе $\mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_{kn}) \leq \theta$, $k = 1, \ldots, n$, которая, в свою очередь, равносильна одному неравенству

$$\theta \geq \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_{kn}).$$

Нетрудно заметить, что $\boldsymbol{S}_{kn} \geq \boldsymbol{A}^k$ для всех $k = 1, \ldots, n$, откуда следует

$$\bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_{kn}) \geq \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}^k) = \lambda.$$

Тогда можно уточнить установленную ранее границу для θ следующим образом:

$$\theta \geq r \oplus (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{p})^{1/2} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_{kn}).$$

Найдем решение неравенства (14). Применяя теорему 1, запишем решение левой части в виде $\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u}$ — любой регулярный вектор такой, что $\boldsymbol{u} \geq \theta^{-1}\boldsymbol{p}$.

С учетом этого решения правая часть неравенства (14) приобретает вид неравенства $(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u} \leq \theta\boldsymbol{q}$, решение которого с помощью леммы 1 дает $\boldsymbol{u} \leq \theta(\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*})^{-}$.

Объединив оба неравенства для $\boldsymbol{u}$, имеем

$$\theta^{-1}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{u} \leq \theta\left(\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*}\right)^{-}.$$

Выясним, для каких значений θ множество регулярных решений $\boldsymbol{u}$ полученного неравенства не пусто. Необходимо решить неравенство $\theta^{-1}\boldsymbol{p} \leq \theta(\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*})^{-}$.

Умножая это неравенство на $\theta^{-1}\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*}$ слева, приходим к неравенству

$$\theta^{-2}\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{p} \leq \mathbb{1}. \tag{15}$$

Покажем, что предыдущее неравенство, в свою очередь, тоже является следствием (15), а значит, они эквивалентны. Действительно, умножая неравенство (15) слева на $\theta(\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*})^{-}$ и применяя свойство сопряженного транспонирования, получим

$$\theta^{-1}\boldsymbol{p} \leq \theta^{-1}\left(\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*}\right)^{-}\boldsymbol{q}^{-}\left(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\right)^{*}\boldsymbol{p} \leq \theta(\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*})^{-}.$$

Рассмотрим неравенство (15). Учитывая, что $\mathrm{Tr}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$, можно записать

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*} = \bigoplus_{m=0}^{n-1}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{m} = \boldsymbol{I} \oplus \bigoplus_{m=1}^{n-1}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{m}.$$

Так же, как и в первой части доказательства, применим тождество (1) при $m = n-1$. Используя обозначение $\boldsymbol{S}_{k,n-1}$, с учетом условия теоремы $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$ имеем

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*} = \boldsymbol{I} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1}\theta^{-k}\boldsymbol{S}_{k,n-1} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{B}^{k} = \bigoplus_{k=1}^{n-1}\theta^{-k}\boldsymbol{S}_{k,n-1} \oplus \boldsymbol{S}_{0,n-1} = \bigoplus_{k=0}^{n-1}\theta^{-k}\boldsymbol{S}_{k,n-1}.$$

Подставляя полученное выражение в неравенство (15), приходим к неравенству

$$\bigoplus_{k=0}^{n-1} \theta^{-k-2} \boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{S}_{k,n-1} \boldsymbol{p} \leq \mathbb{1}.$$

Решая его относительно θ тем же путем, что и выше, получим неравенство

$$\theta \geq \bigoplus_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{S}_{k,n-1} \boldsymbol{p})^{1/(k+2)},$$

в котором правая часть не меньше, чем $(\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{S}_{0,n-1} \boldsymbol{p})^{1/2} = (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{B}^{*} \boldsymbol{p})^{1/2} \geq (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{p})^{1/2}$.

Объединение всех нижних границ, установленных для θ, приводит к неравенству

$$\theta \geq r \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_{kn}) \oplus \bigoplus_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{S}_{k,n-1} \boldsymbol{p})^{1/(k+2)}.$$

Чтобы получить минимум целевой функции, заменим в этом соотношении знак неравенства на знак равенства. Осталось записать общее решение в форме

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1} \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*} \boldsymbol{u}, \qquad \theta^{-1} \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{u} \leq \theta (\boldsymbol{q}^{-} (\theta^{-1} \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*})^{-},$$

и тем самым завершить доказательство теоремы. □

6. Численные примеры. Чтобы проиллюстрировать полученные результаты, приведем примеры их использования в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$. Сначала найдем решение задачи без ограничений, которое затем распространим на случай задачи с ограничениями.

Пусть в задаче (10) отсутствуют ограничения так, что она принимает форму (6). Положим $n = 2$ и зададим матрицу $\boldsymbol{A}$, векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, а также скаляр r в виде

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}^{-} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad r = 2.$$

Для решения задачи применим теорему 2. Сначала по формуле (7) найдем минимум целевой функции $\mu = \lambda \oplus (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{p})^{1/2} \oplus (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{A} \boldsymbol{p})^{1/3} \oplus r$. Используя формулу (2), получаем

$$\boldsymbol{A}^{2} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = 4, \qquad (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{p})^{1/2} = 1, \qquad (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{A} \boldsymbol{p})^{1/3} = 4/3.$$

Теперь находим $\mu = 4$. Также вычислим

$$\mu^{-1} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\mu^{-1} \boldsymbol{A})^{*} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mu^{-1} \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \mu (\boldsymbol{q}^{-} (\mu^{-1} \boldsymbol{A})^{*})^{-} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Применяя формулу (8), запишем решение в виде

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}, \qquad \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{u} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Переходя к обычной записи, положив $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ и $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^T$, получаем

$$x_1 = \max(u_1, u_2 - 4), \qquad x_2 = \max(u_1 - 1, u_2), \qquad -3 \leq u_1 \leq 3, \qquad -3 \leq u_2 \leq 5.$$

Найдем решение задачи с ограничениями в виде (10). В качестве примера рассмотрим предыдущую задачу, в которой добавлено ограничение $\boldsymbol{Bx} \leq \boldsymbol{x}$ с матрицей

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы использовать теорему 4, сначала вычислим

$$\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^*, \qquad \mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) = 0 = \mathbb{1}, \qquad \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Применение формулы (11) для вычисления минимума целевой функции дает выражение $\theta = r \oplus \mathrm{tr}(\boldsymbol{S}_{12}) \oplus \mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{S}_{22}) \oplus (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{S}_{01} \boldsymbol{p})^{1/2} \oplus (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{S}_{11} \boldsymbol{p})^{1/3}$, для которого находим

$$\boldsymbol{S}_{01} = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{S}_{11} = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{S}_{12} = \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{BA} \oplus \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_{22} = \boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Затем подсчитаем значения

$$\left(\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{S}_{01} \boldsymbol{p}\right)^{1/2} = 1, \qquad \left(\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{S}_{11} \boldsymbol{p}\right)^{1/3} = 4/3, \qquad \mathrm{tr}\boldsymbol{S}_{12} = 4, \qquad \mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{S}_{22}) = 8/2 = 4.$$

После подстановки получаем, что минимум $\theta = 4$ не изменился. Осталось вычислить

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\right)^*, \qquad \theta\left(\boldsymbol{q}^- \left(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\right)^*\right)^- = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись формулой (12), находим решение в виде

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}, \qquad \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{u} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

В терминах обычных операций решение приобретает форму

$$x_1 = \max(u_1, u_2 - 1), \qquad x_2 = \max(u_1 - 1, u_2), \qquad -3 \leq u_1 \leq 3, \qquad -3 \leq u_2 \leq 4.$$

Пусть теперь в рассматриваемой задаче матрица $\boldsymbol{B}$ задана следующим образом:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Чтобы воспользоваться формулами из теоремы 4, вычислим

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) = 0 = \mathbb{1}, \qquad \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Снова применим формулу (11) для θ. Сначала необходимо подсчитать

$$\boldsymbol{S}_{01} = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^*, \qquad \left(\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{S}_{01} \boldsymbol{p}\right)^{1/2} = 5/2, \qquad \boldsymbol{S}_{12} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{tr}\boldsymbol{S}_{12} = 5.$$

Отсюда получаем $\theta = 5$, из чего следует, что минимум увеличился. Осталось найти

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \theta^{-1}\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad \theta(\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*})^{-} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Решение находится по формуле (12) в виде

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}, \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{u} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

С использованием обычных операций полученное решение записывается в форме

$$x_1 = \max(u_1, u_2 - 5), \qquad x_2 = \max(u_1 + 5, u_2), \qquad -4 \leq u_1 \leq 1, \qquad -4 \leq u_2 \leq 6.$$

Авторы благодарят рецензентов за ряд важных замечаний и полезных предложений, которые были учтены при подготовке окончательного варианта статьи.

Литература

1. *Cuninghame-Green R. A.* Minimax algebra and applications // Advances in Imaging and Electron Physics / ed. by P. W. Hawkes. San Diego, CA: Academic Press, 1994. (Advances in Imaging and Electron Physics. Vol. 90). P. 1–121.

2. *Zimmermann K.* Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras // Theoret. Comput. Sci. 2003. Vol. 293, N 1. P. 45–54.

3. *Tharwat A., Zimmermann K.* One class of separable optimization problems: solution method, application // Optimization. 2010. Vol. 59, N 5. P. 619–625.

4. *Cuninghame-Green R. A.* Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour // Oper. Res. Quart. 1962. Vol. 13, N 1. P. 95–100.

5. *Cuninghame-Green R. A.* Projections in minimax algebra // Math. Program. 1976. Vol. 10. P. 111–123.

6. *Zimmermann U.* Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures. Amsterdam: Elsevier, 1981. (Annals of Discrete Mathematics. Vol. 10). 390 p.

7. *Butkovič P., Aminu A.* Introduction to max-linear programming // IMA J. Manag. Math. 2009. Vol. 20, N 3. P. 233–249.

8. *Baccelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P.* Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems. Wiley Series in Probability and Statistics. Chichester: Wiley, 1993. 514 p.

9. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.

10. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 256 с.

11. *Golan J. S.* Semirings and Affine Equations Over Them: Theory and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003. (Mathematics and Its Applications. Vol. 556). 256 p.

12. *Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J.* Max-plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2006. 226 p.

13. *Butkovič P.* Max-linear Systems: Theory and Algorithms. Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 2010. 272 p.

14. *Krivulin N.* Tropical optimization problems // Advances in Economics and Optimization: Collected Scientific Studies Dedicated to the Memory of L. V. Kantorovich / eds L. A. Petrosyan, J. V. Romanovsky, D. W. K. Yeung. New York: Nova Science Publishers, 2014. Economic Issues, Problems and Perspectives. P. 195–214.

15. *Gaubert S., Katz R. D., Sergeev S.* Tropical linear-fractional programming and parametric mean payoff games // J. Symbolic Comput. 2012. Vol. 47, N 12. P. 1447–1478.

16. *Krivulin N.* A constrained tropical optimization problem: Complete solution and application example // Tropical and Idempotent Mathematics and Applications / eds G. L. Litvinov, S. N. Sergeev. Providence, RI: American Mathematical Society, 2014. (Contemporary Mathematics. Vol. 616). P. 163–177.

17. *Krivulin N.* Complete solution of a constrained tropical optimization problem with application to location analysis // Relational and Algebraic Methods in Computer Science / eds P. Höfner, P. Jipsen, W. Kahl, M. E. Müller. Cham: Springer, 2014. (Lecture Notes in Computer Science. Vol. 8428). P. 362–378.

18. *Krivulin N.* A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints // Optimization. 2015. Vol. 64, N 5. P. 1107–1129.

19. *Krivulin N.* Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems // Linear Algebra Appl. 2015. Vol. 468. P. 211–232.

20. *Krivulin N. K.* An extremal property of the eigenvalue for irreducible matrices in idempotent algebra and an algebraic solution to a Rawls location problem // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2011. Vol. 44, Issue 4. P. 272–281.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Кривулин Николай Кимович — доктор физико-математических наук, доцент; nkk@math.spbu.ru

Сорокин Владимир Николаевич — SovanSB@gmail.com

SOLVING A TROPICAL OPTIMIZATION PROBLEM WITH LINEAR CONSTRAINTS

Nikolai K. Krivulin, Vladimir N. Sorokin

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; nkk@math.spbu.ru, SovanSB@gmail.com

An optimization problem is considered in terms of tropical (idempotent) mathematics to minimize a nonlinear function subject to linear inequality constraints on the feasible solution set. The objective function is defined on a vector set over an idempotent semifield by using a matrix through multiplicative conjugate transposition. The considered problem is a further generalization of some known problems, involving the evaluation of the spectral radius of a matrix. The generalization implies the use of a more complicated objective function and the imposition of additional constraints. To solve the new problem, an auxiliary variable is introduced, which represents the minimum value of the objective function. Then, the problem is reduced to the solving of an inequality, where the auxiliary variable plays the role of a parameter. Necessary and sufficient conditions for the existence of the solution are used to calculate the parameter, and the general solution of the inequality is then taken as a solution of the initial optimization problem. Numerical examples of the solution of problems on two-dimensional vectors are provided. Refs 20.

Keywords: tropical mathematics, idempotent semifield, spectral radius, linear inequality, optimization problem, complete solution.

References

1. Cuninghame-Green R. A., "Minimax algebra and applications", *Advances in Imaging and Electron Physics*, eds P. W. Hawkes (San Diego, CA, Academic Press, 1994, **90** Advances in Imaging and Electron Physics, 1–121).

2. Zimmermann K., "Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras", *Theoret. Comput. Sci.* **293**(1), 45–54 (2003).

3. Tharwat A., Zimmermann K., "One class of separable optimization problems: solution method, application", *Optimization* **59**(5), 619–625 (2010).

4. Cuninghame-Green R. A., "Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour", *Oper. Res. Quart.* **13**(1), 95–100 (1962).

5. Cuninghame-Green R. A., "Projections in minimax algebra", *Math. Program.* **10**, 111–123 (1976).

6. Zimmermann U., *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures* (Amsterdam, Elsevier, 1981, **10** Annals of Discrete Mathematics, 390 p.).

7. Butkovič P., Aminu A., "Introduction to max-linear programming", *IMA J. Manag. Math.* **20**(3), 233–249 (2009).

8. Baccelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P., *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems. Wiley Series in Probability and Statistics* (Chichester, Wiley, 1993, 514 p.).

9. Maslov V. P., Kolokoltsov V. N., *Idempotent Analysis and Its Applications to Optimal Control Theory* (Nauka, Moscow, 1994, 144 p.) [in Russian].

10. Krivulin N. K., *Methods of Idempotent Algebra for Problems in Modeling and Analysis of Complex Systems* (St. Petersb. Univ. Press, St. Petersburg, 2009, 256 p.) [in Russian].

11. Golan J. S., *Semirings and Affine Equations Over Them: Theory and Applications* (Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2003, **556** Mathematics and Its Applications, 256 p.).

12. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J., *Max-plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems. Princeton Series in Applied Mathematics* (Princeton, NJ, Princeton Univ. Press, 2006, 226 p.).

13. Butkovič P., *Max-linear Systems: Theory and Algorithms. Springer Monographs in Mathematics* (Springer, London, 2010, 272 p.).

14. Krivulin N., "Tropical optimization problems", *Advances in Economics and Optimization: Collected Scientific Studies Dedicated to the Memory of L. V. Kantorovich*, eds L. A. Petrosyan, J. V. Romanovsky, D. W. K. Yeung (New York, Nova Science Publishers, 2014. Economic Issues, Problems and Perspectives, 195–214).

15. Gaubert S., Katz R. D., Sergeev S., "Tropical linear-fractional programming and parametric mean payoff games", *J. Symbolic Comput.* **47**(12), 1447–1478 (2012).

16. Krivulin N., "A constrained tropical optimization problem: Complete solution and application example", *Tropical and Idempotent Mathematics and Applications*, eds G. L. Litvinov, S. N. Sergeev (Providence, RI, American Mathematical Society, 2014, **616** Contemporary Mathematics, 163–177).

17. Krivulin N., "Complete solution of a constrained tropical optimization problem with application to location analysis", *Relational and Algebraic Methods in Computer Science*, eds P. Höfner, P. Jipsen, W. Kahl, M. E. Müller (Cham, Springer, 2014, **8428** Lecture Notes in Computer Science, 362–378).

18. Krivulin N., "A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints", *Optimization* **64**(5), 1107–1129 (2015).

19. Krivulin N., "Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems", *Linear Algebra Appl.* **468**, 211–232 (2015).

20. Krivulin N. K., "An extremal property of the eigenvalue for irreducible matrices in idempotent algebra and an algebraic solution to a Rawls location problem", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **44**, Issue 4, 272–281 (2011).