УДК 517.586 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 4

АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛОВ ОТ МНОГОЧЛЕНА ЛЕЖАНДРА И ИХ СУММ*

К. В. Холшевников[1,2], *В. Ш. Шайдулин*[3]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
[2] Институт прикладной астрономии РАН,
Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10
[3] Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
Российская Федерация, 196140, Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, 65-1

Исследованы асимптотические представления интегралов $P_{nk}(\cos\theta)$ от многочленов Лежандра и их сумм по первому индексу от $n+1$ до бесконечности. Здесь

$$P_{n0}(x) = P_n(x), \qquad P_{nk}(x) = \int\limits_{-1}^{x} P_{n,k-1}(y)dy.$$

Показано, что асимптотика P_{nk} при $n \to \infty$ аналогична асимптотике P_n. Однако слагаемое порядка $n^{-k-m-1/2}$ представляется линейной комбинацией не одного, а m косинусов вида

$$\cos\left[\left(n+s_1+\frac{1}{2}\right)\theta + \left(s_2+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right],$$

где s_1, s_2 — целые числа, зависящие от k, m. Для сумм P_{nk} по первому индексу от 0 до ∞ получены замкнутые выражения. Для сумм от $n+1$ до ∞ получена асимптотика. Она отличается от асимптотики P_{nk} лишь дополнительным множителем $\operatorname{ctg}\theta/2$. Попутно установлен интеграл типа Мелера—Дирихле для $P_{nk}(\cos\theta)$. Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: асимптотика, интегралы от полиномов Лежандра.

Введение. В работах [1, 2] подробно рассмотрены различные свойства интегралов от многочлена Лежандра

$$\begin{gathered} P_{n0}(x) = P_n(x), \qquad P_{nk}(x) = \int\limits_{-1}^{x} P_{n,k-1}(y)\,dy, \\ P_{nk}(\cos\theta) = \int\limits_{\theta}^{\pi} P_{n,k-1}(\cos t)\sin t\,dt, \qquad k \geqslant 1. \end{gathered} \tag{1}$$

Однако в посвященном асимптотике кратком параграфе [2] приведен лишь главный член разложения и слишком грубая оценка остаточного члена. Здесь мы восполняем пробел, приводя асимптотику интегралов P_{nk} и их сумм. Попутно получен интеграл типа Мелера—Дирихле. Результаты будут использованы при описании свойств ряда по сферическим функциям, представляющего ньютоновский потенциал небесных тел.

Асимптотическое разложение $P_{nk}(\cos)$. Асимптотическое разложение $P_n(\cos\theta)$ при фиксированном θ, $0<\theta<\pi$, $n\to\infty$ хорошо известно [3, п. 191]:

$$P_n(\cos\theta) \asymp \xi_n \sum_{m=0}^{\infty} c_m(n)\sin^{-m-1/2}\theta\cos\left[\left(n+m+\frac{1}{2}\right)\theta - \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]. \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-02-00804) и СПбГУ (грант 6.37.341.2015).

Здесь

$$\xi_n = \frac{2\sqrt{2}(2n)!!}{\pi(2n+1)!!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \asymp \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\left(1 - \frac{3}{8n} + \frac{25}{128n^2} + \dots\right) \asymp$$
$$\asymp \sqrt{\frac{2}{\pi(n+3/4)}}\left(1 - \frac{1}{64n^2} + \dots\right), \tag{3}$$
$$c_m = \frac{\eta_m}{(n+3/2)^{\overline{m}}}, \quad \eta_m = \frac{[(2m-1)!!]^2}{4^m(2m)!!}\,, \quad \eta_0 = 1, \quad \eta_1 = \frac{1}{8}\,, \quad \eta_2 = \frac{9}{128}\,.$$

Мы пользуемся символом возрастающей степени [4]:

$$a^{\overline{m}} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ a(a+1)\cdots(a+m-1), & \text{если } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Теорема 1. *Асимптотическое разложение $P_{nk}(\cos\theta)$ при фиксированном $k \geqslant 0$, $0 < \theta < \pi$, $n \to \infty$, имеет вид*

$$P_{nk}(\cos\theta) \asymp \xi_n \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{k-m-1/2}\theta\, T_{km}(n,\theta). \tag{4}$$

Здесь T_{km} — линейная комбинация косинусов вида

$$\cos\left[\left(n + s_1 + \frac{1}{2}\right)\theta + \left(s_2 + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right], \tag{5}$$

где s_1, s_2 — целые числа, зависящие лишь от k, m. В частности, тригонометрический многочлен T_{km} не содержит постоянного слагаемого. При фиксированных k, m, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ справедлива оценка

$$|\xi_n T_{km}(n,\theta)| \leqslant \frac{C_{km}}{n^{k+m+1/2}}\,, \tag{6}$$

где C_{km} не зависит от n, θ.

Доказательство. При $k = 0$ представление (4) совпадает с (2) при

$$T_{0m}(n,\theta) = c_m(n)\cos\left[\left(n + m + \frac{1}{2}\right)\theta - \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \tag{7}$$

и удовлетворяет утверждению теоремы. Далее воспользуемся индукцией по k с помощью рекуррентности [2]:

$$(2n+1)P_{n,k+1} = P_{n+1,k} - P_{n-1,k}. \tag{8}$$

Комбинируя (4) и (8), получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_{km}(n,\theta)\sin^{k-m-1/2}\theta \asymp 0,$$

где

$$Q_{km}(n,\theta) = (2n+1)\xi_n \sin\theta T_{k+1,m}(n,\theta) - \xi_{n+1}T_{km}(n+1,\theta) + \xi_{n-1}T_{km}(n-1,\theta).$$

Положим

$$(2n+1)\sin\theta\tilde{T}_{k+1,m}(n,\theta) = \frac{\xi_{n+1}}{\xi_n}T_{km}(n+1,\theta) - \frac{\xi_{n-1}}{\xi_n}T_{km}(n-1,\theta). \tag{9}$$

Величины ξ с близкими индексами имеют одинаковый порядок малости. В частности,

$$\frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} \asymp 1 + \frac{1}{2n} + \frac{0}{n^2} + \dots, \qquad \frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} \asymp 1 - \frac{1}{2n} + \frac{3}{4n^2} + \dots,$$

что позволяет переписать (9) в виде

$$(2n+1)\tilde{T}_{k+1,m}(n,\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\left[T_{km}(n+1,\theta) - T_{km}(n-1,\theta)\right] - \\ - \frac{1}{2n\sin\theta}\left[T_{km}(n+1,\theta) + T_{km}(n-1,\theta)\right] + \dots\ .$$

Разность T_{km} с указанными аргументами представляет собой линейную комбинацию разностей

$$\cos\left[\left(n+s_1-\frac{1}{2}\right)\theta + \left(s_2+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] - \cos\left[\left(n+s_1+\frac{3}{2}\right)\theta + \left(s_2+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = \\ = 2\sin\theta\ \cos\left[\left(n+s_1+\frac{1}{2}\right)\theta + \left(s_2-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

и содержит $\sin\theta$ множителем. Соответствующую комбинацию косинусов включаем в $T_{k+1,m}$, а поправочные члены относим к $T_{k+1,m+1}$. Теорема доказана. □

Явный вид T_{k0}, T_{k1}. Для получения простых рекуррентных по k соотношений используем равенство

$$\frac{dP_{n,k+1}(\cos\theta)}{d\theta} = -\sin\theta P_{nk}(\cos\theta),$$

которое вместе с (4) дает

$$T'_{k+1,m} = -\left(k-m+\frac{3}{2}\right)\cos\theta\, T_{k+1,m-1} - T_{km}\,. \tag{10}$$

Здесь штрих обозначает производную по θ и мы позволяем себе опускать аргументы n,θ у исследуемых функций.

Величины T_{0m} известны и задаются формулой (7). Запишем (10) при $m=0$:

$$T'_{k+1,0} = -T_{k0} \tag{11}$$

с базой индукции $T_{00} = \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]$. Решение дается формулой

$$T_{k0}(n,\theta) = A_{k00}(n)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right], \tag{12}$$

где

$$A_{k00}(n) = \frac{1}{(n+1/2)^k}. \tag{13}$$

Действительно, при $k = 0$ это верно. Интегрирование (11) дает для $T_{k+1,0}$ нужный тригонометрический одночлен плюс постоянное слагаемое. По теореме 1 это слагаемое равно нулю, что и доказывает (12).

Итак, T_{k0} найдены. Переходим к T_{k1}:

$$T'_{k+1,1} = -T_{k1} - \left(k + \frac{1}{2}\right) \cos\theta \, T_{k+1,0} \, .$$

Второе слагаемое в правой части известно. Переходя от произведения к сумме косинусов, придем к рекуррентности

$$\begin{aligned} T'_{k+1,1} = -T_{k1} - \frac{k+1/2}{2} A_{k+1,00} \left\{ \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + \right. \\ \left. + \cos\left[\left(n + \frac{3}{2}\right)\theta + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \right\} \end{aligned} \tag{14}$$

с базой

$$T_{01} = c_1 \cos\left[\left(n + \frac{3}{2}\right)\theta - \frac{3\pi}{4}\right].$$

Ищем T_{k1} в виде

$$\begin{aligned} T_{k1}(n,\theta) = A_{k10}(n) \cos\left[\left(n + \frac{3}{2}\right)\theta + \left(k - \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + \\ + A_{k11}(n) \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta + \left(k - \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставим (15) в (14):

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{3}{2}\right) A_{k+1,10} \cos\left[\left(n + \frac{3}{2}\right)\theta + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + \\ + \left(n - \frac{1}{2}\right) A_{k+1,11} \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = \\ = -A_{k10} \cos\left[\left(n + \frac{3}{2}\right)\theta + \left(k - \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] - A_{k11} \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta + \left(k - \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] - \\ - \frac{k+1/2}{2} A_{k+1,00} \left\{ \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + \cos\left[\left(n + \frac{3}{2}\right)\theta + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \right\}. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты, получаем

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{3}{2}\right) A_{k+1,10} = A_{k10} - \frac{k+1/2}{2} A_{k+1,00} = A_{k10} - \frac{k+1/2}{2(n+1/2)^{k+1}} \, , \quad A_{010} = c_1 \, , \\ \left(n - \frac{1}{2}\right) A_{k+1,11} = A_{k11} - \frac{k+1/2}{2} A_{k+1,00} = A_{k11} - \frac{k+1/2}{2(n+1/2)^{k+1}} \, , \quad A_{011} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Подстановка $x_k = (n + 3/2)^k A_{k10}$ переводит первое соотношение (16) в

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(k+1/2)}{2\,(n+1/2)} \left(\frac{n+3/2}{n+1/2}\right)^k, \qquad x_0 = c_1 = \frac{1}{8(n+3/2)} \, . \tag{17}$$

Решение рекуррентности (17) очевидно:

$$x_k = \frac{1}{8(n+3/2)} - \frac{1}{2n+1}\sum_{i=0}^{k-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n+3/2}{n+1/2}\right)^i. \tag{18}$$

Компактное выражение для x_k легко получить, поскольку

$$\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}+i\right)b^i = \frac{1+b-(2k+1)b^k+(2k-1)b^{k+1}}{2(1-b)^2},$$

но мы не рекомендуем им пользоваться. К асимптотике прибегают при больших n и малых k, а в этом случае $b \sim 1$, $1-b \sim -1/n$.

Рекуррентность для A_{k11} решается аналогично и мы получаем

$$\begin{aligned} A_{k10}(n) &= \frac{1}{8(n+3/2)^{k+1}} - \frac{1}{(2n+1)(n+3/2)^k}\sum_{i=0}^{k-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n+3/2}{n+1/2}\right)^i, \\ A_{k11}(n) &= -\frac{1}{(2n+1)(n-1/2)^k}\sum_{i=0}^{k-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n-1/2}{n+1/2}\right)^i. \end{aligned} \tag{19}$$

Асимптотически

$$\begin{aligned} A_{k10}(n) &\asymp \frac{1-2k^2}{8n^{k+1}} + \frac{(k+1)(10k^2+2k-9)}{48n^{k+2}} + \dots\,, \\ A_{k11}(n) &\asymp -\frac{k^2}{4n^{k+1}} + \frac{k(k^2-1)}{24n^{k+2}} + \dots\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Представление T_{km}. Представления (12), (15) легко обобщить:

$$T_{km}(n,\theta) = \sum_{s=0}^{m} A_{kms}(n)\cos\left[\left(n+m-2s+\frac{1}{2}\right)\theta + \left(k-m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]. \tag{21}$$

При $m=0$ и $m=1$ это совпадает с (12) и (15) соответственно. Подставим (21) в (10):

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{m}\left(n+m-2s+\frac{1}{2}\right)A_{k+1,ms}\cos\left[\left(n+m-2s+\frac{1}{2}\right)\theta+\left(k-m+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = \\ &= -\sum_{s=0}^{m-1}\left(k-m+\frac{3}{2}\right)A_{k+1,m-1,s}\cos\theta\,\cos\left[\left(n+m-2s-\frac{1}{2}\right)\theta+\left(k-m+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] - \\ &\quad -\sum_{s=0}^{m}A_{kms}\cos\left[\left(n+m-2s+\frac{1}{2}\right)\theta+\left(k-m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = \\ &= -\sum_{s=0}^{m-1}\frac{k-m+3/2}{2}A_{k+1,m-1,s}\left\{\cos\left[\left(n+m-2s+\frac{1}{2}\right)\theta+\left(k-m+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + \right.\\ &\quad \left. + \cos\left[\left(n+m-2s-\frac{3}{2}\right)\theta+\left(k-m+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\} - \\ &\quad -\sum_{s=0}^{m}A_{kms}\cos\left[\left(n+m-2s+\frac{1}{2}\right)\theta+\left(k-m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left(n+m-2s+\frac{1}{2}\right)A_{k+1,ms}-A_{kms}=-\frac{k-m+3/2}{2}\left(A_{k+1,m-1,s}+A_{k+1,m-1,s-1}\right). \tag{22}$$

При $m=0,1,2$ правая часть известна, что позволяет найти все A_{k2s}, поскольку

$$A_{020}=c_2\,, \qquad A_{021}=A_{022}=0.$$

Далее можно перейти к значению $m=3$ и так далее, что полностью определяет все A_{kms}.

Из сказанного вытекает представление

$$\xi_n A_{kms}(n)\asymp\frac{1}{n^{k+m+1/2}}\left(C_1+\frac{C_2}{n}+\frac{C_3}{n^2}+\dots\right), \tag{23}$$

где постоянные $C_1, C_2, \dots$ зависят от индексов k, m, s, но не n.

В заключение приведем первые два члена асимптотики для P_{n0}, P_{n1}, P_{n2}:

$$T_{00}(n)=\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right], \qquad T_{01}(n)=\frac{9}{8(n+3/2)}\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{3\pi}{4}\right];$$

$$T_{10}(n)=\frac{1}{n+1/2}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right],$$

$$T_{11}(n)=A_{110}(n)\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]+A_{111}(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right];$$

$$T_{20}(n)=\frac{1}{(n+1/2)^2}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{3\pi}{4}\right],$$

$$T_{21}(n)=A_{210}(n)\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right]+A_{211}(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right].$$

Здесь

$$A_{110}(n)=-\frac{n+5/2}{8\,(n+1/2)\,(n+3/2)^2}, \qquad A_{111}(n)=-\frac{1}{4\,(n-1/2)\,(n+1/2)};$$

$$A_{210}(n)=-\frac{7n^2+21n+59/4}{8(n+1/2)^2(n+3/2)^3}\,, \qquad A_{211}(n)=-\frac{4n-1}{4(n-1/2)^2(n+1/2)^2}\,.$$

Интеграл типа Мелера—Дирихле.

Теорема 2. *Справедливо интегральное представление*

$$P_{nk}(\cos\theta)=\frac{2^{k+1/2}}{\pi(2k-1)!!}\int\limits_{\theta}^{\pi}(\cos\theta-\cos\varphi)^{k-1/2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi. \tag{24}$$

Доказательство. При $k=0$ соотношение (24) представляет собой формулу Мелера [3, п. 18]. Считая ее справедливой для индекса $k\geqslant 0$, докажем и для индекса $k+1$.

Из формул (1), (24) следует

$$P_{n,k+1}(\cos\theta) = \frac{2^{k+1/2}}{\pi(2k-1)!!}\int\limits_{\theta}^{\pi}\sin t\,dt\int\limits_{t}^{\pi}(\cos t-\cos\varphi)^{k-1/2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{2^{k+1/2}}{\pi(2k-1)!!}\int\limits_{\theta}^{\pi}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi\int\limits_{\theta}^{\varphi}(\cos t-\cos\varphi)^{k-1/2}\sin t\,dt.$$

Внутренний интеграл равен $(\cos\theta-\cos\varphi)^{k+1/2}/(k+1/2)$, что доказывает индуктивное предположение. □

Сумма интегралов от многочленов Лежандра. Обозначим

$$R_k(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{nk}(\cos\theta). \tag{25}$$

Как известно [3, § 2.8], ряд (25) при $k=0$, $0<\theta<\pi$ сходится к сумме

$$R_0(\theta) = \frac{1}{2\sin\theta/2}. \tag{26}$$

Теорема 3. *При $k \geqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ ряд (25) сходится абсолютно и равномерно к сумме вида*

$$R_k(\theta) = \sum_{m=0}^{2k-1} B_{km}\sin^m\frac{\theta}{2}, \qquad B_{km} = \mathrm{const}. \tag{27}$$

Доказательство. Сходимость следует из оценки [2]

$$\overline{\lim}\, n^{k+1/2}\,|P_{nk}(\cos\theta)| \leqslant \sqrt{2/\pi}\,.$$

Из определения P_{nk}, R_k вытекает

$$R_{k+1}(\theta) = \int\limits_{\theta}^{\pi} R_k(t)\sin t\;dt. \tag{28}$$

Вычисляя интеграл (28) при $k=0$, придем к представлению (27) для R_1 при $B_{10}=2$, $B_{11}=-2$.

Действуем по индукции, вычисляя интеграл (28) от тригонометрического многочлена (27):

$$R_{k+1}(\theta) = 2\int\limits_{\theta}^{\pi} R_k(t)\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\;dt = 4\int\limits_{\sin\theta/2}^{1}\sum_{m=0}^{2k-1} B_{km}\tau^{m+1}\,d\tau =$$

$$= 4\sum_{m=0}^{2k-1}\frac{B_{km}}{m+2}\left(1-\sin^{m+2}\frac{\theta}{2}\right).$$

Окончательно, при $k \geqslant 1$

$$B_{k+1,0} = 4 \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{B_{km}}{m+2}, \quad B_{k+1,1} = 0, \quad B_{k+1,m} = -\frac{4}{m} B_{k,m-2} \quad \text{для} \quad 2 \leqslant m \leqslant 2k+1,$$

что и доказывает теорему. □

Приведем значения B_{km} при $k = 1, 2, 3$:

$$B_{10} = 2, \quad B_{11} = -2;$$
$$B_{20} = \frac{4}{3}, \quad B_{21} = 0, \quad B_{22} = -4, \quad B_{23} = \frac{8}{3};$$
$$B_{30} = \frac{4}{5}, \quad B_{31} = 0, \quad B_{32} = -\frac{8}{3}, \quad B_{33} = 0, \quad B_{34} = 4, \quad B_{35} = -\frac{32}{15}.$$

Легко показать, что при $k \geqslant 1$

$$B_{k,2k-1} = \frac{2^{2k-1}(-1)^k}{(2k-1)!!}, \qquad B_{k,2k-2} = \frac{2^{2k-1}(-1)^{k-1}}{(2k-2)!!}, \tag{29}$$

а для $k \geqslant 2$

$$B_{km} = 0 \qquad \text{при} \qquad m = 1, 3, \ldots, 2k-3. \tag{30}$$

Перейдем от полных сумм к остаткам

$$R_{nk}(\theta) = \sum_{r=n+1}^{\infty} P_{rk}(\cos\theta). \tag{31}$$

Представления (4), (21) позволяют записать

$$R_{nk}(\theta) \asymp$$
$$\asymp \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{k-m-1/2}\theta \sum_{s=0}^{m} \sum_{r=n+1}^{\infty} \xi_r A_{kms}(r) \cos\left[\left(r+m-2s+\frac{1}{2}\right)\theta + \left(k-m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right].$$

Внутренняя сумма с точностью до обозначений имеет вид (34) (см. приложение), причем коэффициенты $\xi_r A_{kms}(r)$ удовлетворяют условиям (35) в силу (23). Поэтому согласно (36)

$$R_{nk}(\theta) \asymp \sum_{m=0}^{\infty} \sin^{k-m-1/2}\theta \sum_{s=0}^{m} \Psi_{nkms}(\theta). \tag{32}$$

Здесь

$$\Psi = \frac{\xi_{n+1} A_{kms}(n+1)}{2\sin(\theta/2)} \cos\left[(n+m-2s+1)\theta + \left(k-m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] +$$
$$+ \frac{\xi_{n+1} A_{kms}(n+1) - \xi_{n+2} A_{kms}(n+2)}{[2\sin(\theta/2)]^2} \cos\left[\left(n+m-2s+\frac{3}{2}\right)\theta + \left(k-m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + \ldots .$$

Выпишем явно первые два члена асимптотики, пользуясь (3), (13), (20):

$$R_{nk}(\theta) \asymp \frac{\sin^{k-1/2}\theta}{\sqrt{2\pi(n+7/4)}(n+3/2)^k \sin(\theta/2)} \times$$
$$\times \left\{ \cos\left[(n+1)\theta + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + \frac{1}{n+3/2}\tilde{R}_{nk}(\theta) + \dots \right\}, \quad (33)$$

где

$$\tilde{R}_{nk}(\theta) = \frac{2k+1}{4\sin(\theta/2)}\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta + \left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] +$$
$$+ \frac{1-2k^2}{8\sin\theta}\cos\left[(n+2)\,\theta + \left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] - \frac{k^2}{4\sin\theta}\cos\left[n\theta + \left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right].$$

Приложение. Сумма одного ряда. Пусть

$$\Phi_n(x,y) = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos(mx+y), \quad n > 0, \quad x \neq 2\pi k, \quad (34)$$

и для некоторого $\sigma > 0$ выполнено

$$\overline{\lim}\, |a_m| m^{\sigma} < \infty, \quad \overline{\lim}\, |b_m| m^{\sigma+1} < \infty, \quad \overline{\lim}\, |c_m| m^{\sigma+2} < \infty, \quad (35)$$

где

$$b_m = a_m - a_{m+1}\,, \qquad c_m = b_m - b_{m+1} = a_m - 2a_{m+1} + a_{m+2}\,.$$

Тогда при $n \to \infty$ справедлива асимптотика

$$\Phi_n(x,y) \asymp -a_{n+1}\frac{\sin[(n+1/2)\,x+y]}{2\sin x/2} + b_{n+1}\frac{\cos[(n+1)x+y]}{4\sin^2 x/2} + \dots\ . \quad (36)$$

Доказательство. Обозначим

$$v_m = \sum_{k=0}^{m} \cos(kx+y) = \frac{\sin(x/2-y) + \sin[(m+1/2)\,x+y]}{2\sin x/2}\,.$$

Суммируя (34) по частям [4, § 2.6], получим

$$\Phi_n(x,y) = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m(v_m - v_{m-1}) = -a_{n+1}v_n + \sum_{m=n+1}^{\infty} v_m(a_m - a_{m+1}) =$$
$$= -a_{n+1}v_n + \frac{\sin(x/2-y)}{2\sin x/2}\sum_{m=n+1}^{\infty}(a_m - a_{m+1}) + \frac{1}{2\sin x/2}\tilde{\Phi}_n(x,y)\,. \quad (37)$$

Здесь $\tilde{\Phi}$ аналогична Φ:

$$\tilde{\Phi}_n(x,y) = \sum_{m=n+1}^{\infty} b_m \cos(mx+z), \quad z = \frac{1}{2}x + y - \frac{\pi}{2}\,.$$

Последняя сумма в правой части (37) равна a_{n+1}, так что

$$\Phi_n(x,y) = -a_{n+1}\frac{\sin[(n+1/2)x+y]}{2\sin x/2} + \frac{1}{2\sin x/2}\tilde{\Phi}_n(x,y)\,.$$

Повторяя процесс, получим (36), что и требовалось. □

Замечание. Нетрудно достроить формулу (36) до бесконечного ряда, если потребовать выполнения (35) для разностей последовательности a_m произвольного порядка. Достаточно наложить условие

$$a_m \asymp \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\beta_s}{m^{\sigma+s}}, \qquad \beta_s = \text{const}. \tag{38}$$

Литература

1. *Антонов В. А., Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш.* Об оценке производной многочлена Лежандра // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 4. С. 3–9.
2. *Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш.* О свойствах интегралов от многочлена Лежандра // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Т. 1(59). Вып. 1. С. 55–67.
3. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
4. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. М., 1998. 704 с.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Холшевников Константин Владиславович — доктор физико-математических наук, профессор; kvk@astro.spbu.ru

Шайдулин Вахит Шамильевич — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, shvak@yandex.ru

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF INTEGRALS OF LEGENDRE POLYNOMIAL AND THEIR SUMS

Konstantin V. Kholshevnikov[1,2], *Vakhit Sh. Shaidulin*[3]

[1] St.Petersburg State University,
Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru

[2] Institute of Applied Astronomy RAS,
Kutuzova nab., 10, St. Petersburg, 191187, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru

[3] Pulkovo Observatory of RAS, Pulkovskoe chaussee, 65-1, St. Petersburg, 196140,
Russian Federation; shvak@yandex.ru

Asymptotic representations of the integrals $P_{nk}(\cos\theta)$ of the Legendre polynomials and their first-index sums from $n+1$ to infinity are investigated. Here

$$P_{n0}(x) = P_n(x), \qquad P_{nk}(x) = \int_{-1}^{x} P_{n,k-1}(y)dy.$$

It is shown that the asymptotic behaviour P_{nk} as $n \to \infty$ is similar to that of P_n. Hovewer, the summand of order $n^{-k-m-1/2}$ is represented as a linear combination of m cosines of the form

$$\cos\left[\left(n + s_1 + \frac{1}{2}\right)\theta + \left(s_2 + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right],$$

instead of a single cosine, where s_1 and s_2 are integers which depend only on k, m. For the first-index sum P_{nk} from 0 to ∞ closed expressions are obtained. Asymptotic behaviour of sums from $n+1$ to ∞ is derived. Its form differs from the asymptotic behaviour of P_{nk} by a single multiplier $\operatorname{ctg}\theta/2$. Simultaneously, the integral of Mehler—Dirichlet type for $P_{nk}(\cos\theta)$ is established. Refs 4.

Keywords: asymptotics, integrals of Legendre polynom.

References

1. Antonov V. A., Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh., “Estimating the derivative of the Legendre polynomial”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **43**(4), 191–197 (2010).
2. Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh., “On Properties of Integrals of the Legendre Polynomial”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **47**(1), 28–38 (2014).
3. Hobson E. W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931, 476 p.).
4. Graham R., Knuth D., Patashnik O., *Concrete Mathematics* (Berkeley, California, Addison-Wesley, 1998).