УДК 517.5 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 4

НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО РОДА НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ И КРИВЫХ, ЗАДАВАЕМЫХ МОДУЛЯМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ*

М. Ш. Шабозов[1], *К. Тухлиев*[2]

[1] Институт математики им. А. Джураева АН,
Республика Таджикистан, 734051, Душанбе, пр. Рудаки, 42
[2] Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова,
Республика Таджикистан, 735700, Худжанд, мкр. 20

Рассматривается экстремальная задача минимизации погрешности приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и классов пространственных кривых, задаваемых модулями непрерывности.

Доказано, что если граничные точки отрезка $[0, L]$ (L — длина кривой, по которой вычисляется интеграл) не включать в число узлов квадратурной формулы для вычисления криволинейного интеграла первого типа, то наилучшей квадратурной формулой для классов $\mathfrak{m}_\rho^{(p)}$ и кривых $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ является формула средних прямоугольников. Если же в число узлов квадратурной формулы приближенного вычисления криволинейного интеграла добавить крайние точки отрезка $x = 0$ и $x = L$ (такие формулы называются формулами типа Маркова), то для указанных классов функций наилучшей является формула трапеций. Вычислены точные оценки погрешности для всех рассматриваемых классов функций и кривых и дано обобщение для более общих классов. Библиогр. 15 назв.

Ключевые слова: криволинейный интеграл, квадратурная формула, погрешность, формула прямоугольников, формула трапеций, узлы.

Экстремальная задача отыскания наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы и получение точной оценки ее остатка является одной из наиболее актуальных задач вычислительной математики. Наиболее важные результаты, полученные по экстремальным задачам теории квадратур до конца прошлого столетия, приведены в дополнении к монографии С. М. Никольского [1] «Квадратурные формулы», последнее издание которой вышло в 1988 году. В дополнении отмечается, что по экстремальным задачам теории квадратур получен ряд существенных окончательных результатов для соболевских классов и классов функций, задаваемых модулями непрерывности (см., например, [2–12] и литературу к ним). В то же время в указанном дополнении отмечается, что до настоящего времени немало задач для многомерных случаев еще не решено. Это замечание, в частности, относится к задаче отыскания оптимальных квадратурных формул для криволинейных интегралов. Для указанных интегралов задача отыскания наилучших квадратурных формул находится на стадии разработки. Некоторые результаты в этом направлении получены совсем недавно в [13] и [14].

В данной статье рассматривается задача о приближенном вычислении криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и классов пространственных кривых, задаваемых модулями непрерывности.

Пусть функция $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена и интегрируема вдоль кривой $\Gamma \subset R^m$ и

$$J(f; \Gamma) := \int_\Gamma f(M)dt = \int_\Gamma f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dt. \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00769-а).

Предположим, что на кривой Γ установлено положительное направление так, что положение точки $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на кривой может быть определено длиной дуги $t = \smile{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A. Тогда кривая Γ параметрически выразится уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t), \quad 0 \le t \le L, \tag{2}$$

а функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, заданная в точках кривой, сведется к сложной функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))$ от переменной t. Хорошо известно, что в этом случае интеграл (1) запишется в виде следующего определенного интеграла:

$$J(f; \Gamma) = \int_0^L f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\, dt. \tag{3}$$

Всякая квадратурная формула

$$J(f; \Gamma) \approx \mathcal{L}_N(f; \Gamma; P, T) := \sum_{k=1}^{N} p_k\, f\Big(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)\Big) \tag{4}$$

для приближенного вычисления интеграла (3) задается векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и векторами узлов

$$T = \{t_k : \ 0 \le t_1 < \ldots < t_N \le L\},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_N$ — произвольные действительные числа.

Погрешность квадратурной формулы (4) обозначим

$$\Big|R_N(f; \Gamma)\Big| := \Big|R_N(f; \Gamma; P, T)\Big| = \Big|J(f; \Gamma) - \mathcal{L}_N(f; \Gamma; P, T)\Big|.$$

Если $\mathfrak{m}$ — некоторый класс функций $\{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\}$, определенных в точках кривой Γ и интегрируемых как сложные функции параметра t на отрезке $[0, L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности, примем верхнюю грань

$$R_N(\mathfrak{m}; \Gamma; P, T) = \sup\left\{ \Big|R_N(f; \Gamma; P, T)\Big| : \ f \in \mathfrak{m} \right\}.$$

Пусть $\mathfrak{n}(L)$ — класс кривых Γ, заданных параметрическими уравнениями (2), длина которых равна L. Наибольшую погрешность квадратурной формулы (4) всего класса функций $\mathfrak{m}$ на классе кривых $\mathfrak{n}(L)$ обозначим

$$R_N(\mathfrak{m}; \mathfrak{n}(L); P, T) = \sup\Big\{R_N(\mathfrak{m}; \Gamma; P, T) : \ \Gamma \subset \mathfrak{n}(L)\Big\}.$$

Для того чтобы получить оптимальную квадратурную формулу на классах функций $\mathfrak{m}$ и кривых $\mathfrak{n}(L)$, потребуем, чтобы формула (4) была точна для функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)) = \mathrm{const}$, то есть чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^L dt = \sum_{k=1}^N p_k = L.$$

Нижнюю грань

$$\mathfrak{e}_N(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}(L)) = \inf_{(P,T)} \{R_N(\mathfrak{m}; \mathfrak{n}(L), P, T)\}, \tag{5}$$

по аналогии с определением из монографии [1], будем называть оптимальной оценкой погрешности квадратурной формулы (4) на классах функций $\mathfrak{m}$ и кривых $\mathfrak{n}(L)$. Если существует вектор (P^0, T^0), для которого

$$\mathfrak{e}_N(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}(L)) = R_N(\mathfrak{m}; \mathfrak{n}(L), P^0, T^0),$$

то указанный вектор определяет наилучшую квадратурную формулу вида (4) в смысле С. М. Никольского [1] на классах функций $\mathfrak{m}$ и кривых $\mathfrak{n}(L)$.

Здесь исследуются квадратурные формулы (4) в двух случаях:

а) с произвольными векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и произвольными векторами узлов

$$T = \{t_k\}_{k=1}^N : \ 0 \le t_1 < t_2 \ldots < t_N \le L;$$

б) с произвольными векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=0}^N$ и произвольными векторами узлов, крайние узлы которых фиксированы:

$$T = \{t_k\}_{k=0}^N : \ 0 = t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_N = L.$$

Обозначим через $H^\omega := H^\omega[0, L]$ множество функций $\varphi(t) \in C[0, L]$, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \le \omega\left(|t' - t''|\right), \quad t', t'' \in [0, L],$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная функция, удовлетворяющая соотношениям $0 \le \omega(t'') - \omega(t') \le \omega(t'' - t'), 0 \le t' \le t'' \le L$, $\omega(0) = 0$.

Через $\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, L]$ обозначим класс гладких кривых $\Gamma \subset R^m$, заданных параметрическими уравнениями (2) с координатными функциями $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L]$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

В евклидовом пространстве R^m для любых двух точек $M' = M(x_1', x_2', \ldots, x_m')$, $M'' = M(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$ введем в рассмотрение следующие l_p-расстояния:

$$\rho_p(M', M'') = \left\{\sum_{i=1}^m |x_i' - x_i''|^p\right\}^{1/p} \qquad (1 \le p \le \infty).$$

Очевидно, что расстояние $\rho_p(M', M'')$, в частности, включает в себя:

1) хэммингово расстояние $\rho_1(M', M'') = \sum_{i=1}^m |x_i' - x_i''|$;

2) евклидово расстояние $\rho_2(M', M'') = \left\{\sum_{i=1}^m (x_i' - x_i'')^2\right\}^{1/2}$;

3) расстояние Минковского $\rho_\infty(M', M'') = \max_{1 \le i \le m} |x_i' - x_i''|$.

Через $\mathfrak{m}_\rho^{(p)} (1 \le p \le \infty)$ обозначим класс функций $f(M) = f(x_1, \ldots, x_m)$, определенных на кривых $\Gamma \subset \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$, для любых двух точек $M', M'' \in \Gamma$ удовлетворяющих условию

$$\Big|f(M') - f(M'')\Big| \le \rho_p(M', M'').$$

Таким образом, будем писать $f(M) \in \mathfrak{m}_{\rho}^{(p)}$, если для любых двух точек $M', M'' \in \Gamma \subset \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ и $t', t'' \in [0, L]$ выполняется неравенство

$$\Big|f(M') - f(M'')\Big| \le \left\{\sum_{i=1}^{m} |x_i' - x_i''|^p\right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{m} \Big|\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')\Big|^p\right\}^{1/p} \le \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\left(|t' - t''|\right)\right\}^{1/p}.$$

Приступая к рассмотрению случая а), сформулируем утверждение.

Теорема 1. *Среди всех квадратурных формул вида (4) в случае (а) с произвольными векторами-коэффициентами и узлами* (P, T), $P = \{p_k\}_{k=1}^{N}$, $T = \{t_k\}_{k=1}^{N}:\ 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_N \le L$ *наилучшей для класса функций* $\mathfrak{m}_{\rho}^{(p)}$ *при всех* $1 \le p \le \infty$ *и класса кривых* $\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *является формула средних прямоугольников*

$$\int_0^L f\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\right) dt =$$

$$= \frac{L}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f; \Gamma). \quad (6)$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (6) на классах функций $\mathfrak{m}_{\rho}^{(p)}$ *и кривых* $\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *справедлива точная оценка*

$$\mathfrak{e}_N\left(\mathfrak{m}_{\rho}^{(p)}; \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) = (2N) \int_0^{L/(2N)} \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^p(t)\right\}^{1/p} dt. \quad (7)$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма A [5, с. 177]. *Пусть в области* $D \in R^m$ *фиксирована произвольная система точек* $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ *и функция* $g(M)$ *определена равенством*

$$g(M) = \min_{1 \le j \le \nu} \varphi[\rho(M, M_j)], \quad M \in D,$$

где $\varphi(t)$ *— неубывающая и полуаддитивная, то есть удовлетворяющая соотношениям*

$$0 \le \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \le \varphi(t_2 - t_1), \quad 0 \le t_1 \le t_2 \le \theta$$

(θ — диаметр области D), функция, а $\rho(M, M_j)$ — расстояние между точками M и M_j. Тогда для любых точек M' и M'' из D имеет место неравенство

$$|g(M') - g(M'')| \le \varphi[\rho(M', M'')].$$

Следующее утверждение является несложной модификацией леммы 8.2.9 из [15, с. 369–370], доказательство которой проводится по той же схеме.

Лемма B. *Пусть* $\psi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *— неубывающие и неотрицательные для* $0 \le t \le L$ *функции и при фиксированном* $N = 1, 2, \ldots$ *вектору*

$$T = \{t_k:\ 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_N \le L\}$$

сопоставлены функции

$$\Phi_{1,p}(T,t)=\min_{1\le k\le N}\left\{\sum_{i=1}^{m}\psi_i^p(|t-t_k|)\right\}^{1/p},\quad 0\le t\le L,\quad 1\le p\le\infty,$$

$$\Phi_{2,p}(T,t)=\min_{0\le k\le N}\left\{\sum_{i=1}^{m}\psi_i^p(|t-t_k|)\right\}^{1/p},\quad t_0=0,\quad t_N=L,\quad 0\le t\le L,\quad 1\le p\le\infty.$$

Тогда выполняются неравенства

$$\int_0^L\Phi_{1,p}(T,t)dt\ge\int_0^L\Phi_{1,p}(T_1,t)dt,\quad \int_0^L\Phi_{2,p}(T,t)dt\ge\int_0^L\Phi_{2,p}(T_2,t)dt, \tag{8}$$

где вектор T_1 *определяется координатами* $\tau_k=(2k-1)L/(2N)$, *а вектор* T_2 — *координатами* $\tau_k=kL/N$.

Доказательство теоремы 1. Оценку снизу получим хорошо известным методом Н. П. Корнейчука [15]. Пусть (P,T) — произвольный вектор коэффициентов и узлов, для которых имеет смысл формула (1). Через $\mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)}$ обозначим множество функций $f(M)\in\mathfrak{m}_\rho^{(p)}$, определенных вдоль кривой $\Gamma\subset\bar H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$, которые в узлах вектора $T=\{t_k\}_{k=1}^N$ обращаются в нуль: $f\left(\varphi_1(t_k),\ldots,\varphi_m(t_k)\right)=0$, $k=1,2,\ldots,N$. В силу того, что $\mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)}\subset\mathfrak{m}_\rho^{(p)}$, имеем

$$R_N\left(\mathfrak{m}_\rho^{(p)};\bar H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m};P,T\right)\ge R_N\left(\mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)};\bar H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m};P,T\right).$$

Полагая

$$\mathfrak{e}_N\left(\mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)};\bar H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)=\inf\left\{R_N\left(\mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)};\bar H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m};P,T\right):\ (P,T)\in\mathcal{A}\right\}$$

и учитывая, что для всех функций $f(M)\in\mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)}$ квадратурная сумма $\mathcal{L}_N(f;\Gamma;P,T)\equiv 0$, будем иметь

$$\mathfrak{e}_N\left(\mathfrak{m}_\rho^{(p)};\bar H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)\ge\mathfrak{e}_N\left(\mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)};\bar H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)=$$
$$=\inf_{(P,T)}\ \sup_{f\in\mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)}}\ \sup_{\Gamma\subset\bar H^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}}\left|\int_0^L f\left(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)\right)dt\right|, \tag{9}$$

причем правая часть неравенства (9) не зависит от коэффициентов $\{p_k\}_{k=1}^N$. Фиксируем произвольный вектор узлов

$$T=\{t_k\}_{k=1}^N\quad(0\le t_1<t_2<\ldots<t_N\le L)$$

и определяем кривую Γ_0 параметрическими уравнениями

$$x_i:=\varphi_i(t)=\min_k\,\omega_i\Big(|t-t_k|\Big),\quad i=1,2,\ldots,m.$$

Легко проверить, что $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L]$, а значит, $\Gamma_0 \subset \bar{H}^{\,\omega_1,\,\dots,\,\omega_m}$. Если теперь $f(M) \in \mathfrak{m}^{(p)}_{\rho,T,}$ то в точках $M^{(k)} = M(\varphi_1(t_k),\, \varphi_2(t_k), \dots,\, \varphi_m(t_k)) \in \Gamma$ имеем $f(M^{(k)}) \equiv 0,\ k = 1, 2, \dots, N$, а потому

$$\Big|f(M)\Big| = \Big|f(M) - f(M^{(k)})\Big| \le \left\{\sum_{i=1}^{m}\Big|\varphi_i(t) - \varphi_i(t_k)\Big|^p\right\}^{1/p} \le \left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(|t - t_k|\right)\right\}^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\Big|f(M)\Big| \le \min_{t_k}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(|t - t_k|\right)\right\}^{1/p} = f_{p,T}(\varphi_1(t),\, \dots,\, \varphi_m(t)) := f_{p,T}(M). \qquad (10)$$

Функцию $f_{p,T}(M)$, определенную в правой части неравенства (10), в силу расположения узлов t_k $(t_k < t_{k+1}),\ k = 1, 2, \dots, N-1$, а также монотонности $\omega_i(\delta),\ i = 1, 2, \dots, m$, можно записать в виде

$$f_{p,T}(M) = \left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\min_k|t - t_k|\right)\right\}^{1/p}.$$

Докажем, что функция $f_{p,T}(M) \in \mathfrak{m}^{(p)}_{\rho,T}$. Действительно, если $t', t'' \in [0, L]$, то для любых узлов $t_k \in [0, L]$, применяя лемму А, получаем

$$\begin{aligned}
&\Big|f_{p,T}(M') - f_{p,T}(M'')\Big| = \rho\Big(f_{p,T}(M'), f_{p,T}(M'')\Big) = \\
&\qquad= \left|\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\min_k|t' - t_k|\right)\right\}^{1/p} - \left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\min_k|t'' - t_k|\right)\right\}^{1/p}\right| \le \\
&\le \left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\omega_i\left(\min_k|t' - t_k|\right) - \omega_i\left(\min_k|t'' - t_k|\right)\right|^p\right\}^{1/p} \le \left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(|t' - t''|\right)\right\}^{1/p}.
\end{aligned}$$

Так как $f_{p,T}(M^{(k)}) = 0,\ k = 1, 2, \dots, N$, выполняется $f_{p,T}(M) \in \mathfrak{m}^{(p)}_{\rho,T}$. Это с учетом (10) приводит к соотношению

$$\begin{aligned}
\sup_{f\in\mathfrak{m}^{(p)}_{\rho,T}}\ \sup_{\Gamma\subset\bar{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}}\Big|R_N(f; \Gamma; P, T)\Big| &= \sup_{f\in\mathfrak{m}^{(p)}_{\rho,T}}\ \sup_{\Gamma\subset\bar{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}}\left|\int_0^L f\left(\varphi_1(t),\, \dots,\, \varphi_m(t)\right)dt\right| = \\
&= \int_0^L f_T(\varphi_1(t),\, \dots,\, \varphi_m(t))dt := \int_0^L\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\min_k|t - t_k|\right)\right\}^{1/p}dt. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Пусть $T_1 = \{t_k :\ t_k = (2k-1)L/(2N),\ k = 1, 2, \dots, N\}$. Тогда из первого неравенства (8) и вышеприведенной леммы В сразу следует, что

$$\begin{aligned}
&\int_0^L\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\min_k|t - t_k|\right)\right\}^{1/p}dt = \\
&\qquad= \int_0^L f_{p,T}(\varphi_1(t),\, \dots,\, \varphi_m(t))dt \ge \int_0^L f_{p,T_1}(\varphi_1(t),\, \dots,\, \varphi_m(t))dt =
\end{aligned}$$

$$= \int_0^L \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left(|t - \tau_k| \right) \right\}^{1/p} dt = \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left(\left| t - \frac{(2k-1)L}{2N} \right| \right) \right\}^{1/p} dt =$$

$$= \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{(k-1)L/N}^{(2k-1)L/(2N)} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left(\frac{(2k-1)L}{2N} - t \right) \right\}^{1/p} dt + \right.$$

$$\left. + \int_{(2k-1)L/(2N)}^{kL/N} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left(t - \frac{(2k-1)L}{2N} \right) \right\}^{1/p} dt \right\} =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^N \int_0^{L/(2N)} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} dt = 2N \int_0^{L/(2N)} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} dt, \quad 1 \le p \le \infty. \quad (12)$$

Таким образом, с учетом (11) и (12) имеем оценку снизу

$$\mathfrak{e}_N \left(\mathfrak{m}_\rho^{(p)}; \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m} \right) \ge \mathfrak{e}_N \left(\mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)}; \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m} \right) = \inf_{(P,T)} \int_0^L f_{p,T}(\varphi_1(t), \, \ldots, \, \varphi_m(t)) dt =$$

$$= \int_0^L f_{p,T_1}(\varphi_1(t), \, \ldots, \, \varphi_m(t)) dt = 2N \int_0^{L/(2N)} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} dt. \quad (13)$$

Чтобы получить оценку сверху, равную правой части (13), зададим квадратурную формулу (4) векторами-коэффициентами

$$P_1 = \{ p_k : \; p_k = L/N \}_{k=1}^N$$

и узлами

$$T_1 = \left\{ \tau_k : \; \tau_k = (2k-1)L/(2N), \; k = 1, 2, \ldots, N \right\}.$$

Тогда для произвольной функции $f(M) \in \mathfrak{m}_\rho^{(p)}$ и любой кривой $\Gamma \subset \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ будем иметь

$$\Big| R_N(f; \Gamma; P_1, T_1) \Big| =$$

$$= \left| \int_0^L f\left(\varphi_1(t), \, \ldots, \, \varphi_m(t) \right) dt - \frac{L}{N} \sum_{k=1}^N f \left(\varphi_1 \left(\frac{2k-1}{2N} L \right), \ldots, \varphi_m \left(\frac{2k-1}{2N} L \right) \right) \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \left| f\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t) \right) - f \left(\varphi_1 \left(\frac{2k-1}{2N} L \right), \ldots, \varphi_m \left(\frac{2k-1}{2N} L \right) \right) \right| dt \le$$

$$\le \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p \left(\left| t - \frac{(2k-1)L}{2N} \right| \right) \right\}^{1/p} dt = 2N \int_0^{L/(2N)} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^p(t) \right\}^{1/p} dt. \quad (14)$$

Сравнивая неравенства (13) и (14), получаем требуемое равенство (7), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Следствие 1 [14]. *В условиях теоремы 1 имеют место равенства*

$$\mathfrak{e}_N \left(\mathfrak{m}_\rho^{(1)}; \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m} \right) = 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i(t) dt,$$

$$\mathfrak{e}_N\left(\mathfrak{m}_\rho^{(2)};\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)=2N\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^2(t)\right\}^{1/2}dt,$$

$$\mathfrak{e}_N\left(\mathfrak{m}_\rho^{(\infty)};\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)=2N\int_0^{L/(2N)}\left\{\max_{1\le i\le m}\omega_i(t)\right\}dt.$$

В случае, когда $\omega_i(t)\equiv\omega(t)$, $i=1,2,\ldots,m$; $0\le t\le L$, класс кривых $\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}([0,L])$ обозначим $\bar{H}^{\,\omega}_{\,m}[0,L]$. Тогда из теоремы 1 получаем

Следствие 2. *Среди всех квадратурных формул (4) с произвольными векторами коэффициентов и узлов (P,T) наилучшей для классов функций $\mathfrak{m}_\rho^{(p)}$ и кривых $\bar{H}^{\,\omega}_{\,m}[0,L]$ является формула средних прямоугольников (6). При этом для погрешности формулы на указанных классах функций и кривых справедлива точная оценка*

$$\mathfrak{e}_N(\mathfrak{m}_\rho^{(p)};\bar{H}^{\,\omega}_{\,m}[0,L])=2\sqrt[p]{m}\,N\int_0^{L/(2N)}\omega(t)dt.$$

Приступая к рассмотрению случая (б), наряду с квадратурной формулой (4) параллельно вводим в рассмотрение следующую квадратурную формулу типа Маркова:

$$\int_0^L f\left(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)\right)dt=p_0f\left(\varphi_1(0),\,\ldots,\,\varphi_m(0)\right)+p_Nf\left(\varphi_1(L),\,\ldots,\,\varphi_m(L)\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{N-1}p_kf\left(\varphi_1(t_k),\,\ldots,\,\varphi_m(t_k)\right)+R_N\left(f;\Gamma\right). \qquad (15)$$

Далее исследуем квадратурные формулы вида (15), где заранее зафиксированы в качестве узлов концы промежутка $t_0=0,t_N=L$, а узлы $t_1,t_2,\ldots,t_{N-1}$ и коэффициенты p_k $(k=0,1,\ldots,N)$ нужно выбрать оптимальным образом.

Теорема 2. *Среди всех квадратурных формул вида (15) с произвольными векторами коэффициентов и узлов (P,T),*

$$P=\{p_k\}_{k=0}^N,\ T=\{t_k:0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_N=L\},$$

наилучшей для классов функций $\mathfrak{m}_\rho^{(p)}$ и кривых $\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ является формула трапеций

$$\int_0^L f\left(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)\right)dt=$$
$$=\frac{L}{2N}\Big(f(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0))+f(\varphi_1(L),\varphi_2(L),\ldots,\varphi_m(L))\Big)+$$
$$+\frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N-1}f\left(\varphi_1\left(\frac{kL}{N}\right),\varphi_2\left(\frac{kL}{N}\right),\ldots,\varphi_m\left(\frac{kL}{N}\right)\right)+R_N(f;\Gamma). \qquad (16)$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (16) на классах функций $\mathfrak{m}_\rho^{(p)}$ $(1\le p\le\infty)$ и кривых $\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ справедлива точная оценка

$$\mathfrak{e}_N\left(\mathfrak{m}_\rho^{(p)};\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)=(2N)\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt. \qquad (17)$$

Доказательство. Если, как и в предыдущем случае, через $\mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)}$ обозначить множество функций $f(M) \in \mathfrak{m}_{\rho}^{(p)}$, определенных вдоль кривых $\Gamma \subset \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$, которые в узлах вектора

$$T = \{t_k:\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = L\}$$

обращаются в нуль:

$$f\left(\varphi_1(t_k),\, \ldots,\, \varphi_m(t_k)\right) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N,$$

то в силу включения $\mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)} \subset \mathfrak{m}_{\rho}^{(p)}$ (как и при доказательстве теоремы 1) приходим к следующей оценке снизу величины (5) для квадратурной формулы (15):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}_N\left(\mathfrak{m}_{\rho}^{(p)}; \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) &\geq \mathfrak{e}_N\left(\mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)}; \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) = \\
&= \inf_{(P,T)} \sup_{f \in \mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)}} \sup_{\Gamma \in \bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}} \left| \int_0^L f\left(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt \right| = \\
&= \inf_{(P,T)} \int_0^L f_{p,T}^{*}\left(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt, \quad (18)
\end{aligned}$$

где

$$f_{p,T}^{*}\left(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t)\right) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p \left(\min_k |t - t_k| \right) \right\}^{1/p}, \quad t_0 = 0,\ t_N = L.$$

Полагая

$$T_2 = \{\tau_k:\ \tau_k = kL/N,\ k = 0, 1, \ldots, N\},$$

введем обозначение

$$s_0 = 0 = \tau_0, \quad s_k = (\tau_{k-1} + \tau_k)/2, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad s_{N+1} = \tau_N = L.$$

При этом очевидно равенство

$$f_{p,T_2}^{*}\left(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t)\right) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\left(|t - \tau_k|\right) \right\}^{1/p}, \quad s_k \leq t \leq s_{k+1}, \quad k = \overline{0, N},$$

используя которое, согласно второму неравенству (8), получаем нужную нам оценку снизу:

$$\begin{aligned}
\int_0^L f_{p,T}^{*}\left(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt &= \int_0^L \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p \left(\min_k |t - t_k| \right) \right\}^{1/p} dt \geq \\
&\geq \int_0^L f_{p,T_2}^{*}\left(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt = \sum_{k=0}^{N} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\left(|t - \tau_k|\right) \right\}^{1/p} dt = \\
&= \int_0^{s_1} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\left(t\right) \right\}^{1/p} dt + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\int_{s_k}^{\tau_k} + \int_{\tau_k}^{s_{k+1}} \right) \left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\left(|t - \tau_k|\right) \right\}^{1/p} dt +
\end{aligned}$$

$$+\int_{s_N}^{L}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(L-t\right)\right\}^{1/p}dt=\int_0^{s_1}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\left(\int_0^{\tau_k-s_{k-1}}+\int_0^{s_k-\tau_k}\right)\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt+\int_0^{L-s_N}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt=$$

$$=\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt+2(N-1)\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt+$$

$$+\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt=2N\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt.$$

Учитывая неравенство (18), получаем оценку снизу

$$\mathfrak{e}_N\left(\mathfrak{m}_\rho^{(p)};\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)\geq\mathfrak{e}_N\left(\mathfrak{m}_{\rho,T}^{(p)};\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)\geq 2N\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt. \qquad (19)$$

Для получения оценки сверху рассмотрим квадратурную формулу (15) с вектором коэффициентов

$$P_2=\{p_k:\ p_0=p_N=L/(2N);\ p_k=L/N,\ k=1,2,\ldots,N-1\}$$

и вектором узлов $T_2=\{\tau_k:\ \tau_k=kL/N,k=0,1,\ldots,N\}$, полагая

$$s_0=0,\quad s_k=(\tau_{k-1}+\tau_k)/2,\quad k=1,2,\ldots,\quad s_{N+1}=L.$$

В самом деле, для произвольных $f\in\mathfrak{m}_\rho^{(p)}$ и $\Gamma\subset\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ имеем

$$|R_N(f;\Gamma;P_2,T_2)|=\left|\sum_{k=0}^{N}\int_{s_k}^{s_{k+1}}\left[f\left(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\right)-f\left(\varphi_1(\tau_k),\ldots,\varphi_m(\tau_k)\right)\right]dt\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{N}\int_{s_k}^{s_{k+1}}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(|t-\tau_k|\right)\right\}^{1/p}dt=\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(t\right)\right\}^{1/p}dt+$$

$$+\int_{L-L/(2N)}^{L}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(L-t\right)\right\}^{1/p}dt+\sum_{k=1}^{N-1}\int_{\tau_k-L/(2N)}^{\tau_k+L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(|t-\tau_k|\right)\right\}^{1/p}dt=$$

$$=2\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt+2(N-1)\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt=$$

$$=2N\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt. \qquad (20)$$

Требуемое равенство (17) следует из сопоставления неравенств (19) и (20). Теорема 2 доказана.

Отметим, что точные оценки погрешности (7) и (17) имеют место на более широких классах функций и кривых, чем классы $\mathfrak{m}_\rho^{(p)}$ и $\bar{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$.

Пусть $\mathfrak{m}_{2,\rho}^{(p)}$ — класс функций $f(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t))$, определенных на кривых $\Gamma \subset \bar{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, удовлетворяющих для точек $t, t\pm\tau \in [0,L]$ условию

$$\Big|f\Big(\varphi_1(t+\tau),\ldots,\varphi_m(t+\tau)\Big)+f\Big(\varphi_1(t-\tau),\ldots,\varphi_m(t-\tau)\Big)-2f\Big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\Big)\Big| \le$$

$$\le 2\left\{\sum_{k=1}^{m}\omega_i^p(|\tau|)\right\}^{1/p}, \quad 1\le p\le\infty. \quad (21)$$

Приводим это утверждение, например, для квадратурной формулы (4), заданной векторами коэффициентов

$$P^0=\Big\{p_k^0:\ p_k^0=L/N,\ k=1,2,\ldots,N\Big\}$$

и узлов

$$T^0=\left\{t_k^0:\ t_k^0=(2k-1)L/(2N),\ k=1,2,\ldots,N\right\}.$$

Имеем

$$R_N(f;\Gamma,P^0,T^0)=\mathcal{J}(f;\Gamma)-L_N(f;\Gamma,P^0,T^0)=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\int_0^{L/(2N)}\Big[f\Big(\varphi_1(t+t_k^0),\ldots,\varphi_m(t+t_k^0)\Big)+f\Big(\varphi_1(t-t_k^0),\ldots,\varphi_m(t-t_k^0)\Big)-$$
$$-2f\Big(\varphi_1(t_k^0),\ldots,\varphi_m(t_k^0)\Big)\Big]dt. \quad (22)$$

Из соотношения (22) с учетом неравенства (21) сразу следует оценка сверху

$$\mathfrak{e}_N\Big(\mathfrak{m}_{2,\rho}^{(p)};\bar{H}^{\omega_1,\ldots\omega_m}\Big)\le R_N\Big(\mathfrak{m}_{2,\rho}^{(p)};\bar{H}^{\omega_1,\ldots\omega_m};P^0,T^0\Big)\le 2N\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt,$$

а учитывая включение $\mathfrak{m}_{2,\rho}^{(p)}\supset\mathfrak{m}_{\rho}^{(p)}$, справедливое для любой кривой $\Gamma\subset\bar{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, приходим к равенству

$$\mathfrak{e}_N\Big(\mathfrak{m}_{2,\rho}^{(p)};\bar{H}^{\omega_1,\ldots\omega_m}\Big)=\mathfrak{e}_N\Big(\mathfrak{m}_{\rho}^{(p)};\bar{H}^{\omega_1,\ldots\omega_m}\Big)=2N\int_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}dt.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. *Среди всех квадратурных формул вида (4) с произвольными векторами коэффициентов и узлов (P,T) наилучшей для классов $\mathfrak{m}_{\rho}^{(p)}$, $\mathfrak{m}_{2,\rho}^{(p)}$ и кривых $\bar{H}^{\omega_1,\ldots\omega_m}$ является формула средних прямоугольников (6). При этом для погрешности формулы (6) на указанных классах функций и кривых справедливо равенство*

$$\mathfrak{e}_N\Big(\mathfrak{m}_{2,\rho}^{(p)};\bar{H}^{\omega_1,\ldots\omega_m}\Big)=\mathfrak{e}_N\Big(\mathfrak{m}_{\rho}^{(p)};\bar{H}^{\omega_1,\ldots\omega_m}\Big), \quad (23)$$

где значение правой части определено в правой части соотношения (7).

Аналогично доказывается

Теорема 4. *Среди всех квадратурных формул вида (15) с произвольными векторами коэффициентов и узлов (P,T):*

$$P = \{p_k\}_{k=0}^{N}, \quad T = \{t_k: \ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = L\},$$

наилучшей для классов функций $\mathfrak{m}_{\rho}^{(p)}$, $\mathfrak{m}_{2,\rho}^{(p)}$ и кривых $\bar{H}^{\omega_1,\ldots\omega_m}$ является формула трапеций (16). При этом для погрешности формулы (16) на указанных классах функций и кривых справедливо равенство (23).

Литература

1. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы // Изв. АН СССР, сер. матем. 1952, № 16. С. 181–196.

2. *Молозёмов В. Н.* Оценка точности одной квадратурной формулы для периодических функций // Вестник ЛГУ, Сер. 1. Математика, механика, астрономия, 1967. Вып. 1. С. 52–59.

3. *Молозёмов В. Н.* О точности квадратурной формулы прямоугольников // Матем. заметки, 1967. Т. 2, № 4. С. 357–360.

4. *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР, сер. матем. 1974. Т. 38, № 3. С. 583–614.

5. *Корнейчук Н. П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Матем. заметки. 1968. Т. 3, № 5. С. 565–576.

6. *Корнейчук Н. П., Лушпай Н. Е.* Наилучшие квадратурные формулы для классов дифференцируемых функций и кусочно-полиномиальное приближение // Изв. АН СССР. Серия матем. 1969. Т. 33, № 6. С. 1416–1437.

7. *Женсыкбаев А. А.* Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Серия матем. 1977. Т. 41, № 5. С. 1110–1124.

8. *Женсыкбаев А. А.* Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // УМН. 1981. Т. 36, № 4(220). С. 107–159.

9. *Лигун А. А.* О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов периодических функций // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 5. С. 661–669.

10. *Боянов Б. Д.* Существование оптимальных квадратурных формул с заданными кратностями узлов // Мат. сборник. 1978. Т. 105(147), № 3. С. 342–370.

11. *Осколков К. И.* Об оптимальности квадратурной формулы с равноотстоящими узлами на классах периодических функций // ДАН СССР. 1979. Т. 249, № 1. С. 49–52.

12. *Бабенко В. Ф.* Приближения, поперечники и наилучшие квадратурные формулы для классов периодических функций с перестановочно инвариантными множествами производных // Anal. Math. 1987. Т. 13, № 4. С. 15–28.

13. *Шабозов М. Ш., Мирпоччоев Ф. М.* Оптимизация приближенного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ. 2010. Т. 53, № 6. С. 415–419.

14. *Шабозов М. Ш.* О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Матем. заметки. 2014. Т. 96, № 7. С. 637–640.

15. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Шабозов Мирганд Шабозович — доктор физико-математических наук, профессор, академик; shabozov@mail.ru

Тухлиев Камаридин — кандидат физико-математических наук, доцент; kamaridin.t54@mail.ru

BEST QUADRATURE FORMULAS FOR CALCULATION THE CURVELINE INTEGRALS OF THE FIRST KIND OF SOME CLASSES FUNCTIONS DEFINED BY THE MODULUS OF CONTINUITY

Mirgand Sh. Shabozov[1], *Kamaridin Tukhliev*[2]

[1] A. Juraev Institute of mathematics AS, pr. Rudaki, 42, Dushanbe, 734051, Republic Tajikistan; shabozov@mail.ru

[2] B. G. Gafurov Khujand State University, Micro-district 20, Khujand, 735700, Republic Tajikistan; kamaridin.t54@mail.ru

We consider the extremal problem of minimization the error of the approximate calculation of the curveline integral of the first kind for some classes of functions and classes of space curves given by modulus of continuity. It is proved that if the boundary points of the segment $[0, L] (L$ — length of the curve along which the integral is calculated) are not included in the number of nodes of the quadrature formula for the calculation of the curveline integral of the first kind, then the best quadrature formulas for classes $\mathfrak{m}_\rho^{(p)}$ and curves $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ is the formula of average rectangles. And if the number of nodes of the quadrature formula for approximate calculation of the curveline integral added extreme points of the interval $x = 0$ and $x = L$ (such formulas are called the Markov-type), then for these classes of functions the best is trapezoid rule. The exact error estimates for all the considered class of functions and curves are calculated and the generalizations for more general classes are founded. Refs 15.

Keywords: curvilinear integral, quadrature formula, error, formula rectangle, formula of trapezes, nodes.

References

1. Nikol'skiy S. M., "Quadrature formulas", *Izv. AN USSR. Series mathem.* (16), 181–196 (1952) [in Russian].

2. Malozemov V. N., "Exact estimate of one quadrature formulas for periodic function", *Vestnik Leningrad. Univ., Ser. 1. Mathematics, mechanics, astronomy*, Issue 1, 52–59 (1967) [in Russian].

3. Malozemov V. N., "About exact quadrature rectangular formula", *Math. Notes* **2**(4), 357–360 (1967) [in Russian].

4. Motorniy V. P., "About the best quadrature formulas of type $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ fore some classes periodic functions", *Izv. AN USSR. Series mathem.* **38**(3), 583–614 (1974) [in Russian].

5. Korneichuk N. P., "Best cubature formulas for some classes of functions of many variables", *Math. Notes* **3**(5), 565–576 (1968) [in Russian].

6. Korneichuk N. P., Lushpai N. E., "Best quadrature formulas for classes of differentiable functions and piecewise-polynomial approximation", *Izv. AN USSR. Series mathem.* **33**(6), 1416–1473 (1969) [in Russian].

7. Zhensykbaev A. A., "Best quadrature formula for some classes of periodic differentiable functions", *Izv. AN USSR. Series mathem.* **41**(5), 1110–1124 (1977) [in Russian].

8. Zhensykbaev A. A., "Monosplines of minimal norm and the best quadrature formulae", *Russian Mathematical Survers* **36**(4(220)), 107–159 (1981) [in Russian].

9. Ligun A. A., "Best quadrature formulas for certain classes of periodic functions", *Math. Notes* **24**(5), 661–669 (1978) [in Russian].

10. Boyanov B. D., "The existence of optimal quadrature formulas for with given multiplicities of nodes", *Math. Sb.* **105(147)**(3), 342–370 (1978) [in Russian].

11. Oskolkov K. I., "Optimal quadrature formulas with equidistant on the classes of periodic functions", *DAN USSR* **249**(1), 49–52 (1979) [in Russian].

12. Babenko V. F., "Approximation, the diameter and best quadrature formulas for the classes of periodic functions with commutative invariant sets derived", *Anal. Math.* **13**(4), 15–28 (1987) [in Russian].

13. Shabozov M. Sh., Mirpochchoev F. M., "Optimizing approximate integration of curvilinear integral of the first type for some classes functions and curves", *DAN RT* **53**(6), 415–419 (2010) [in Russian].

14. Shabozov M. Sh., "About the best quadrature formulas for calculation of curvilinear integral in some classes functions and curves", *Math. Notes* **96**(7), 637–640 (2014) [in Russian].

15. Korneichuk N. P., *Exact constant in theory approximations* (Nauka, Moscow, 1987, 424 p.) [in Russian].