УДК 539.3 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 4

К ВОПРОСУ О ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН И СТЕРЖНЕЙ

Б. А. Зимин[1], *И. С. Зорин*[2]

[1] Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН),
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Проводится асимптотический анализ задач о деформации тонких упругих анизотропных неоднородных пластин и стержней. В линейной постановке обосновывается неустойчивость плоских форм равновесия предельной поверхности и предельной линии таких тонких тел. Библиогр. 14 назв.

Ключевые слова: пластины, стержни, анизотропия, устойчивость равновесия.

Исследованию напряженно-деформированного состояния упругих анизотропных пластин, стержней и оболочек посвящено большое число публикаций ([1–3], см. также имеющуюся там литературу). Сведение трехмерных задач к двумерным или одномерным проводится с использованием классических гипотез Кирхгофа—Лява, Тимошенко—Рейсснера, методов асимптотического интегрирования [4] или вариационно-асимптотического подхода [5].

Цель работы — при помощи метода асимптотического интегрирования показать универсальный алгоритм, позволяющий для достаточно общего случая анизотропии тонких упругих тел получать асимптотически точные разрешимые краевые задачи на предельных двумерных и одномерных поверхностях. Применяется подход, реализованный в работах [6, 7].

Приведен явный вид оператора предельной (двумерной) краевой задачи для пластины. Указаны формулы для вычисления ее эффективных модулей упругости. Обсуждается вопрос о связанности форм равновесия тонких упругих анизотропных неоднородных тел.

Рассматриваются задачи об упругой деформации трехмерных областей $\Omega_p\,(x,y,z,h) = [\omega\,(x,y)\otimes(hl_+,hl_-)]$ и $\Omega_r\,(x,y,z,h) = [\omega\,(hx,hy)\otimes(l_+,l_-)]$, заполненных анизотропным неоднородным упругим материалом. Здесь $\omega\,(x,y)$ — область с гладкой границей, $h \ll 1$ — малый положительный безразмерный параметр, характеризующий относительные продольный и поперечный размеры областей Ω_r и Ω_p.

В условиях отсутствия объемных сил уравнения равновесия для этих областей представляются в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_{ij}\,(x,y,z) = 0. \tag{1}$$

Соотношения закона упругости Гука можно записать так:

$$\sigma_{ij}\,(x,y,z) = a_{ijkl}\,(x,y,z)\,e_{kl}\,(x,y,z)\,. \tag{2}$$

Здесь $i,j = \overline{1,3}$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$; σ_{ij} и $e_{ij} = (\partial u_j/\partial x_i + \partial u_i/\partial x_j)/2$ — симметричные двухвалентные тензоры упругих напряжений и деформаций, a_{ijkl} — четырехвалентный симметричный тензор модулей упругости, $u = (u_1,u_2,u_3)$ — вектор смещений; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Условия на лицевых поверхностях пластины и боковой поверхности стержня можно задать соотношениями

$$(\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}\left(\omega\left(x,y\right), z = hl_{\pm}\right) = (0,0,p_{\pm}), \quad u(\partial\omega(x,y), z \in (l_{-}, l_{+})) = 0, \tag{3}$$

$$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})\left(h\partial\omega\left(x,y\right), z \in (l_{-}, l_{+})\right) = (q_1, q_2, 0), \quad u(h\omega(x,y), z = l_{\pm}) = 0. \tag{4}$$

Задачи (1)–(4) однозначно разрешимы для гладких границ $\partial L^{(p)}$, $\partial L^{(r)}$ этих областей [8]. При этом для пластин предполагается гладкость коэффициентов $a_{ijkl}(x,y,z)$ по переменным x и y, возможны разрывы первого рода по z; для стержней — гладкость коэффициентов $a_{ijkl}(x,y,z)$ по переменной z, возможны разрывы первого рода по x и y соответственно в Ω_r и Ω_r вплоть до их границ.

Однако области Ω_p и Ω_r вырождаются при $h \to 0$ в область $\omega\left(x,y\right)$ на плоскости Oxy и отрезок (l_{+}, l_{-}) прямой на оси Oz трехмерной системы координат $Oxyz$ соответственно. Это затрудняет применение здесь численных методов исследования и пакетов прикладных задач.

Построение решений задач в сингулярно возмущенных областях проводится методами асимптотического интегрирования [4, 9]. При этом представления решений u^p и u^r в областях Ω_p и Ω_r отыскиваются в виде рядов по степеням параметра h:

$$u^p\left(x,y,z,h\right) = u_0^p\left(x,y,\zeta\right) + hu_1^p\left(x,y,\zeta\right) + h^2u_0^p\left(x,y,\zeta\right) + h^3u_0^p\left(x,y,\zeta\right) + \dots\ , \tag{5}$$

$$u^r\left(x,y,z,h\right) = u_0^r\left(\xi,\eta,z\right) + hu_1^r\left(\xi,\eta,z\right) + h^2u_0^r\left(\xi,\eta,z\right) + h^3u_0^r\left(\xi,\eta,z\right) + \dots\ . \tag{6}$$

Здесь $\zeta = z/h$, $\xi = x/h$, $\eta = y/h$ — «быстрые» переменные. Представления (5)–(6) оставляют невязки в граничных условиях (3) и (4) по смещениям у краев пластины и на торцах стержня. Эти невязки можно компенсировать построением функций пограничного слоя, экспоненциально убывающих при удалении от границы $\partial\omega(x,y)$ предельной поверхности пластины и границ $z = l_{\pm}$ предельной линии стержня, и получить краевые условия для системы предельных уравнений.

Равномерные по параметру h асимптотические представления решений задач (1)–(4) могут быть получены сращиванием (5) и (6) с функциями пограничного слоя в зонах $O(h)$ границ $\partial\omega(x,y)$ и $z = l_{\pm}$ для пластины и стержня соответственно и применением срезающих функций, локализованных в этих зонах [9, 10]. Обоснование асимптотических разложений в областях разных размерностей можно найти в [11].

Введение «быстрых» переменных приводит к расщеплению оператора задачи (1)–(4) и соответствующих граничных условий по напряжениям в (3) и (4) по степеням параметра h:

$$\begin{aligned}
&L^{(p,r)} = h^{-2}L_2^{(p,r)} + h^{-1}L_1^{(p,r)} + h^0L_0^{(p,r)},\\
&\partial L^{(p)} = h^{-1}B_2(x,y,\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta} + \left(B_{12}^t\left(x,y,\zeta\right)D_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) + B_2(x,y,\zeta)D_2\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\right),\\
&\partial L^{(r)} = h^{-1}\left(B_1\left(\xi,\eta,z\right)D_1\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + B_{12}(\xi,\eta,z)D_2\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right) + B_{12}(\xi,\eta,z)\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Непосредственными вычислениями можно проверить, что операторы из правой части (7) для пластины имеют вид

$$L_2^{(p)}\left(x,y,\zeta,\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)=\frac{\partial}{\partial\zeta}B_2(x,y,\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta},$$

$$L_1^{(p)}\left(x,y,\zeta,\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)=D_1^t\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)B_{12}(x,y,\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\partial}{\partial\zeta}B_{12}^t(x,y,\zeta)D_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)+$$
$$+D_2^t\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)B_2(x,y,\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{\partial}{\partial\zeta}B_2(x,y,\zeta)D_2\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$L_0^{(p)}\left(x,y,\zeta,\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)=D_1^t\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)B_1(x,y,\zeta)D_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)+$$
$$+D_1^t\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)B_{12}(x,y,\zeta)D_2\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)+$$
$$+D_2^t\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)B_{12}^t(x,y,\zeta)D_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)+D_2^t\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)B_2(x,y,\zeta)D_2\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right).\tag{8}$$

Аналогично для стержня получаем

$$L_2^{(r)}\left(\xi,\eta,z,\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)=D_1^t\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)B_1(\xi,\eta,z)D_1\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+$$
$$+D_1^t\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)B_{12}(\xi,\eta,z)D_2\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+D_2^t\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)B_{12}^t(\xi,\eta,z)D_1\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+$$
$$+D_2^t\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)B_2(\xi,\eta,z)D_2\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right),$$

$$L_1^{(r)}\left(\xi,\eta,z,\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta},\frac{\partial}{\partial z}\right)=D_1^t\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)B_{12}(\xi,\eta,z)\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}B_{12}^t(\xi,\eta,z)D_1\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+$$
$$+D_2^t\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right)B_2(\xi,\eta,z)\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}B_2(\xi,\eta,z)D_2\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\eta}\right),$$

$$L_0^{(r)}\left(\xi,\eta,z,\frac{\partial}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}B_2(\xi,\eta,z)\frac{\partial}{\partial z}.\tag{9}$$

Здесь используется представление тензора упругих постоянных $a_{ijkl}\,(x,y,z,h)$ [1] в виде симметричной матрицы 6×6 с блоками 3×3: $A_{11}=B_1$, $A_{22}=B_2$, $A_{12}=B_{12}=B_{21}^t$. Индекс t обозначает транспонирование матрицы или оператора. Блоки B_1, B_2, B_{12} размерности 3×3 выделены из симметричной 6×6 матрицы B в представлении $(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12},\sigma_{13},\sigma_{23},\sigma_{33})^t=B\,(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{23},\varepsilon_{33})^t$ закона Гука [1, 6].

Для матричных 3×3 дифференциальных операторов первого порядка имеем

$$D_1\,(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ \beta & \alpha & 0\end{pmatrix},\quad D_2\,(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha\\ 0 & 0 & \beta\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

При этом в представлениях (8) и (9) следует положить $\alpha=\partial/\partial x$, $\beta=\partial/\partial x$ для пластины и $\alpha=\partial/\partial\xi$, $\beta=\partial/\partial\eta$ для стержня.

Подстановка представлений (5)–(6) в исходную систему (1)–(4) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях h нулю приводят к рекуррентным системам дифференциальных уравнений и соответствующих краевых условий, требования разрешимости которых позволяют получить систему 3×3 предельных уравнений в области $\omega(x, y)$ для пластин и систему 4×4 предельных уравнений для стержней на отрезке (l_+, l_-) [12, 13].

Явный вид оператора предельной задачи на $\omega(x, y)$ для пластин принимает вид

$$\mathcal{L}^p\left(x, y, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= D_2^t\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) D_1^t\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) E^3(x, y, \zeta) D_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) D_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) -$$

$$-D_2^t\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) D_1^t\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) E^2(x, y) D_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) +$$

$$+ D_1^t\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) E^1(x, y) D_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) -$$

$$- D_1^t\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) E^2(x, y) D_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) D_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Здесь

$$E^j(x, y) = \int_{l_-}^{l_+} t^{j-1}\left(B_1(x, y, t) - B_{12}(x, y, t) B_2^{-1}(x, y, t) B_{12}^t(x, y, t)\right) dt \tag{10}$$

— эффективные (осредненные) модули упругости пластины.

Краевая задача $\mathcal{L}^p(x, y, \partial/\partial x, \partial/\partial y)(u, v, w) = (0, 0, p)$ для области ω, $u = v = w = 0$, $\partial w/\partial n = 0$, однозначно разрешима на границе $\partial\omega$.

Аналогичную (10) структуру имеет предельный оператор $\mathcal{L}^r(z, \partial/\partial z)$ для стержней на отрезке (l_+, l_-). При этом в представлении (10) операторы D_1 и D_2 заменяются на $\mathrm{diag}(\partial/\partial z)$, а эффективные модули упругости являются осредненными по области $\omega(x, y)$ моментами второго, первого и нулевого порядков относительно предельной линии.

Соответствующие граничные условия гарантируют однозначную разрешимость краевой задачи $\mathcal{L}^r(z, \partial/\partial z)(u, v, \theta, w) = (q_1, q_2, 0, 0)$ на $z \in (l_-, l_+)$, $u = v = \theta = w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$, $z = l_\pm$.

В работе проведен асимптотический анализ решений задач о равновесии трехмерных упругих неоднородных анизотропных тел, один или два относительных размеров тел малы.

Показано, как процесс расщепления уравнений и краевых условий исходной задачи приводит к разрешающим системам уравнений на предельной поверхности и предельной линии для пластин и стержней. Предельные краевые задачи наследуют основные свойства исходных задач.

Структура операторов предельных краевых задач в рассматриваемых тонких областях показывает, что для общего случая неоднородного анизотропного материала расщепление напряженно-деформированного состояния на независимые формы изгиба, растяжения-сжатия и кручения не имеет места. Известны [14] частные случаи геометрии и упругих характеристик неоднородных слоистых пластин, для которых существует нейтральная поверхность. Проведенные рассмотрения позволяют провести простую аналогию с задачей о нейтральной линии для стержней.

Литература

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.

2. *Донелл Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. М., 1982.

3. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1977.

4. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26, № 4. С. 1057–1074.

5. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.

6. *Шойхет Б. А.* Об асимптотически точных уравнениях изгиба тонких плит сложной структуры // ПММ. 1973. Т. 37, № 5. С. 914–924.

7. *Товстик П. Е.* Модели анизотропных пластин // ДАН РАН. 2009. Т. 425, № 4. С. 487–491.

8. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.

9. *Назаров С. А.* Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.

10. *Friedrichs K. O., Dressler R. F.* A boundary-layer theory of elastic plates // Comm. Pure and Appl. Math. 1961. Vol. 14, N 1. P. 1–33.

11. *Назаров С. А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Т. 1. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск, 2002.

12. *Зорин И. С.* Операторное представление системы уравнений Ламе и предельные краевые задачи теории тонких плит // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер.: Математика, механика, астрономия. Вып. 1. 1987. С. 108.

13. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982.

14. *Зорин И. С., Ромашев Ю. А.* О напряженно-деформированном состоянии слоистых плит несимметричного строения // ПММ. 1988. Т. 52, вып. 1. С. 75–85.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Зимин Борис Александрович — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник; bazimin@mail.ru

Зорин Игорь Святославович — кандидат физико-математических наук, доцент; i.s.zorin@spbu.ru

ON THE STABILITY OF A FLAT SHAPE BALANCE INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC ELASTIC PLATES AND RODS

Boris A. Zimin[1], *Igor S. Zorin*[2]

[1] Institute of Problems of Mekhanical Engineering RAS, Bolshoy pr. V.O., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation; bazimin@mail.ru

[2] St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; i.s.zorin@spbu.ru

Held asymptotic analysis of problems of deformation of thin elastic anisotropic inhomogeneous plates and rods. In the linear formulation instability settles flat forms of equilibrium limit surface and the marginal line of thin bodies. Refs 14.

Keywords: plates, rods, anisotropy, stability of equilibrium.

References

1. Lekhnitskii S. G., *Anisotropic plates* (Gostexizdat, Moscow, Leningrad, 1957) [in Russian].

2. Donell L. G., *Beams, Plates and Shells* (Nauka, Moscow, 1982) [in Russian].

3. Agalovian L. A., *Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].

4. Gol'denveiser A. L., "Derivation of an approximate theory of bending of a plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity", *Prikl. Math. Mech.* **26**(4), 1057–1074 (1962) [in Russian].

5. Berdichevsky V. L., *Variotional Principles of Continuum Mechanics* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].

6. Shoikhet B. A., "On asymptotically exact equations of thin plates of complex structure", *Prikl. Math. Mech.* **37**(5), 914–924 (1973) [in Russian].

7. Tovstik P. E., "Models of plates made of an anisotropic material", *Doklady Physics* **54**(4), 205–209 (2009).

8. Fichera G., “Existance theorems in elasticity”, *Handbuch der physic* **6a/2** (Springer-Verlag, Berlin, New York, 1972).
9. Nazarov S. A., *Introduction to the asymptotic methods of elasticity theory* (Izd. Leningrad University, 1983) [in Russian].
10. Friedrichs K. O., Dressler R. F., “A boundary-layer theory of elastic plates”, *Comm. Pure and Appl. Math.* **14**(1), 1–33 (1961).
11. Nazarov S. A., “Asymptotical theory of thin plates and roads” *Dimension reduction and integral estimates*, **1** (Nauchnaja kniga, Novosibirsk, 2002) [In Russian].
12. Zorin I. S., “Operator representation system of Lame equations and boundary value problems of the theory of marginal thin plates”, *Vestnik Leningrad State University, Series 1* **22**, 108 (1987).
13. Christensen R. M., *Mechanics of composite materials* (New York, Dover Publications Inc., 1979).
14. Zorin I. S., Romashev Yu. A., “On the state of stress and strain of layered plates of non-symmetrical constraction”, *Prikl. Math. Mech.* **52**(1), 75–85 (1988) [in Russian].

ХРОНИКА

18 ноября 2015 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступил доктор физ.-мат. наук, профессор Г. Т. Алдошин (Балтийский Государственный Технический Университет им. Д. Ф. Устинова) с докладом на тему «К вопросу о силах инерции».

Краткое содержание доклада:

Уравнения относительного движения материальной точки в движущейся системе координат имеют структуру уравнений абсолютного движения при добавлении к активным силам переносной силы инерции и силы инерции Кориолиса. В физической трактовке сил инерции имеются разночтения, вызванные нечеткостью определения переносного движения в кинематике и динамике. Влияние сил инерции проявляется в разнообразных явлениях, поэтому их естественно считать реальными силами. С другой стороны, для этих сил нельзя указать конкретные тела, являющиеся их источником, они не удовлетворяют третьему закону динамики и потому являются силами фиктивными, но, чтобы движение точки было переносным в динамике, на нее должна быть наложена связь. Реакция связи, со стороны точки вызывает равную и противоположно направленную силу, приложенную к телу. Так, что телом — источником сил инерции, является тело-носитель подвижной системы координат. Потому силы инерции следует рассматривать как реальные силы.