

## БАЛАНСИРОВКА ДИНАМИЧЕСКИ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТОРА С УЧЕТОМ НЕИДЕАЛЬНОСТИ АВТОБАЛАНСИРОВОЧНЫХ УСТРОЙСТВ

*А. С. Ковачев*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматривается динамически неуравновешенный ротор, оснащенный двухплоскостным шаровым автобалансирующим устройством. Предполагается, что обе обоймы АБУ насажены на вал ротора с некоторым эксцентриситетом. Выведены уравнения движения системы в неподвижной и вращающейся системах координат, а также уравнения, описывающие стационарные режимы движения. Для двухплоскостного автобалансирующего устройства с двумя шариками в каждой из обойм АБУ показана возможность существования двух различных типов несбалансированных стационарных режимов. Стационарный режим с постоянной остаточной вибрацией, амплитуда которой не зависит от угловой скорости, предложено называть полусбалансированным. Решение, отвечающее полусбалансированному режиму, построено аналитически; получены условия его существования. Численными методами проведено исследование несбалансированных режимов движения ротора в случае его вращения с постоянной и переменной угловыми скоростями. Библиогр. 9 назв. Ил. 5.

*Ключевые слова:* двухплоскостное шаровое автобалансирующее устройство, динамически неуравновешенный ротор.

Вопросы автобалансировки динамически неуравновешенных роторов, оснащенных двухплоскостными шаровыми автобалансирующими устройствами (АБУ), ранее рассматривались в работах [1–3], где было показано, что полная балансировка ротора возможна лишь тогда, когда его угловая скорость превышает вторую критическую частоту. В работах [4–5], посвященных проблеме автобалансировки роторов, оснащенных неидеальными шаровыми АБУ, был установлен и экспериментально подтвержден факт невозможности полной балансировки ротора вследствие наличия постоянного остаточного дисбаланса в закритической области. В [6] было установлено, что в некоторых частных случаях при определенных конструкционных условиях динамическая неуравновешенность ротора может быть полностью компенсирована одноплоскостным АБУ в области угловых скоростей ротора, превышающих первую критическую скорость. В работах [7] и [8] исследовались динамика и устойчивость стационарных режимов статически неуравновешенного ротора с неидеальным (эксцентрически насаженным) АБУ. Настоящая работа продолжает и развивает исследования, проведенные в [6–8] для случая динамически неуравновешенного ротора с эксцентрически насаженным двухплоскостным шаровым АБУ.

**1. Механическая модель ротора с двухплоскостным АБУ.** Рассматривается ротор в виде динамически симметричного абсолютно твердого тела, закрепленного в вертикальных шарнирных упруго-вязких изотропных опорах (рис. 1).

Предполагается, что ротор имеет динамическую неуравновешенность, для компенсации которой он оснащен двухплоскостным АБУ, представляющим собой две закрепленные на одной оси с ротором круговые обоймы, в которых могут свободно передвигаться балансирующие шарики. Также предполагается, что обе обоймы АБУ насажены на вал с некоторым эксцентриситетом.

Обозначим через  $G$  центр масс ротора;  $E_j$  ( $j = 1, 2$ ) — геометрический центр обоймы  $j$ -го АБУ;  $C$  и  $C_j$  — точки пересечения оси вращения с перпендикулярными к ней

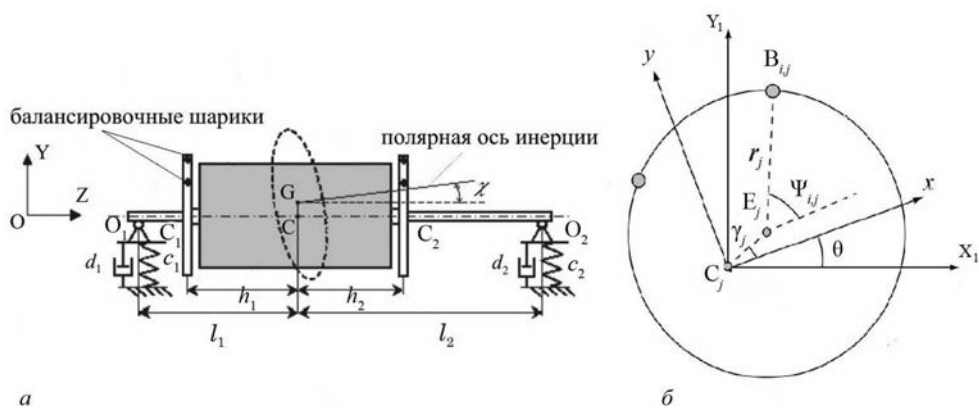


Рис. 1. Динамически неуравновешенный ротор с двухплоскостным АБУ.

плоскостями, проходящими через точки  $G$  и  $E_j$  соответственно;  $l_1$  и  $l_2$  — расстояния от точки  $C$  до опор;  $c_1$  и  $c_2$  — коэффициенты жесткости в опорах;  $s_0 = |CG|$  — статический эксцентриситет;  $\chi$  — угол между осью вращения и осью динамической симметрии ротора (моментный эксцентриситет);  $\gamma$  — угол между плоскостью моментного эксцентриситета и плоскостью, проходящей через ось вращения и центр масс ротора (фазовый сдвиг моментного эксцентриситета по отношению к статическому [9]);  $r_j$  и  $h_j$  — радиус и смещение круговой полости  $j$ -го АБУ. Для описания эксцентриситетов обойм АБУ введем параметры  $s_j$  — расстояния между точками  $C_j$  и  $E_j$ . Будем считать ротор симметричным, если  $l_1 = l_2$ .

Введем следующие системы координат:  $OXYZ$  — неподвижная абсолютная система координат, ось  $OZ$  которой направлена по оси, соединяющей центры опор  $O_1$  и  $O_2$  в недеформированном состоянии;  $CX_1Y_1Z_1$  — подвижная невращающаяся система координат с началом в точке  $C$ , сонаправленная с осями неподвижной системы  $OXYZ$  (рис. 2,а);  $Cxyz$  — жестко связанная с ротором система координат (рис. 2,б);  $G\xi\eta\zeta$  — система главных центральных осей инерции ротора.

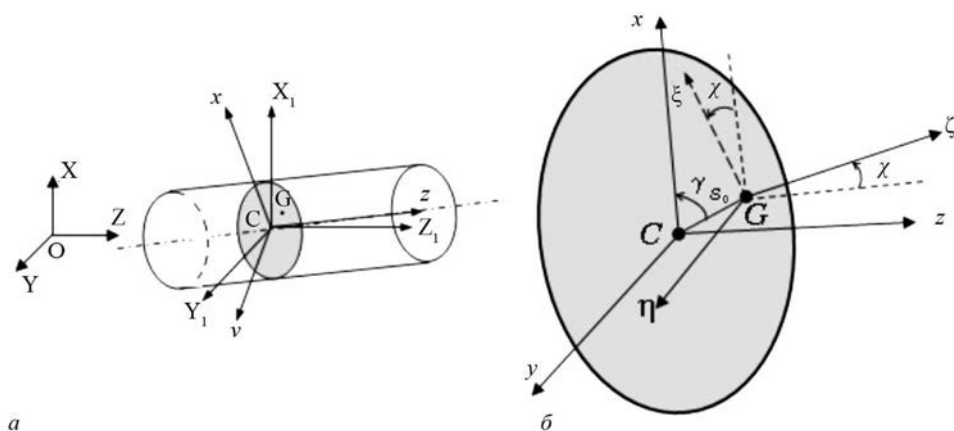


Рис. 2. Подвижная и неподвижная системы координат.

Система  $Cxyz$  при повороте на угол  $\chi$  относительно оси  $Cy$  переходит в систему, оси которой сонаправлены главным осям инерции ротора. Угол  $\gamma$  рассматривается

в плоскости статического эксцентриситета, а углы  $\gamma_j$  (между отрезком  $C_jE_j$  и осью  $C_jx$ ) — в плоскости  $j$ -го АБУ. Описанная механическая система имеет  $(5 + 2n)$  степеней свободы. В качестве обобщенных координат будем использовать:  $X, Y$  — абсолютные координаты точки  $C$ ;  $\alpha, \beta$  — углы между осью вращения и неподвижными плоскостями  $XZ$  и  $YZ$ ;  $\theta$  — угол собственного вращения ротора;  $\psi_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, 2$ ) — углы отклонения балансировочных шариков в плоскости АБУ (рис. 1, б).

Матрицы перехода между системами координат  $Cxyz$  и  $CX_1Y_1Z_1$ , а также  $G\xi\eta\zeta$  и  $Cxyz$  с учетом предположения о малости углов  $\alpha$  и  $\beta$  имеют вид [6]

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & \alpha \sin \theta - \beta \cos \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad P_\chi = \begin{pmatrix} \cos \chi & 0 & -\sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \chi & 0 & \cos \chi \end{pmatrix}.$$

Используя их, найдем координаты точек  $G, E_j$ , координаты шариков  $j$ -го АБУ  $B_{ij}$  и проекции вектора абсолютной угловой скорости ротора на оси Кёнига  $G\xi\eta\zeta$  [6]:

$$\begin{aligned} R_G &= \begin{pmatrix} X + s_0 \cos(\theta + \gamma) \\ Y + s_0 \sin(\theta + \gamma) \\ s_0(\alpha \sin(\theta + \gamma) - \beta \cos(\theta + \gamma)) \end{pmatrix}, \\ R_{E_j} &= \begin{pmatrix} X + s_j \cos(\gamma_j + \theta) + h_j \beta \\ Y + s_j \sin(\gamma_j + \theta) - h_j \alpha \\ s_j(\alpha \sin(\gamma_j + \theta) - \beta \cos(\gamma_j + \theta)) + h_j \end{pmatrix}, \\ R_{B_{ij}} &= \begin{pmatrix} X + r_j \cos \phi_{ij} + s_j \cos(\gamma_j + \theta) + h_j \beta \\ Y + r_j \sin \phi_{ij} + s_j \sin(\gamma_j + \theta) - h_j \alpha \\ r_j(\alpha \sin \phi_{ij} - \beta \cos \phi_{ij}) + s_j(\alpha \sin(\gamma_j + \theta) - \beta \cos(\gamma_j + \theta)) + h_j \end{pmatrix}, \\ \Omega &= \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \cos \theta + \dot{\beta} \sin \theta - \chi \dot{\theta} \\ -\dot{\alpha} \sin \theta + \dot{\beta} \cos \theta \\ \dot{\alpha}(\beta + \chi \cos \theta) + \dot{\beta} \chi \sin \theta + \dot{\theta} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть  $m_0$  — масса ротора,  $\tilde{J}_p, \tilde{J}_t$  — полярный и экваториальный моменты инерции,  $p_j$  — масса обоймы  $j$ -го АБУ,  $m_j$  — масса балансировочного шарика  $j$ -го АБУ. Будем называть ротор «длинным», если  $\tilde{J}_t > \tilde{J}_p$ , и «коротким» в противном случае. Кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left( m_0 \dot{R}_G^2 + \Omega^T (J_G \Omega) \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \left( p_j \dot{R}_{E_j}^2 + \Omega^T (J_{E_j} \Omega) + m_j \sum_{i=1}^n \dot{R}_{B_{ij}}^2 \right), \\ V &= \frac{c_1}{2} \left( (X - l_1 \beta)^2 + (Y + l_1 \alpha)^2 \right) + \frac{c_2}{2} \left( (X + l_2 \beta)^2 + (Y - l_2 \alpha)^2 \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $J_G = \text{diag}\{\tilde{J}_t, \tilde{J}_t, \tilde{J}_p\}$  и  $J_{E_j} = \text{diag}\{J_{t_j}, J_{t_j}, J_{p_j}\}$  — матрица центрального тензора инерции ротора и матрица тензора инерции обоймы  $j$ -го АБУ.

Пусть  $d_1, d_2$  — коэффициенты демпфирования в опорах, а  $d_3, d_4, d_5$  — коэффициенты диссипации, учитывающие потери энергии при вращении ротора и движении шариков АБУ соответственно. Предполагая, что на ротор действуют только силы

внешнего демпфирования, запишем выражение для диссипативной функции Рэлея:

$$D = \frac{d_1}{2} \left( (\dot{X} - l_1 \dot{\beta})^2 + (\dot{Y} + l_1 \dot{\alpha})^2 \right) + \frac{d_2}{2} \left( (\dot{X} + l_2 \dot{\beta})^2 + (\dot{Y} - l_2 \dot{\alpha})^2 \right) + \frac{d_3}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{d_4}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\psi}_{i1}^2 + \frac{d_5}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\psi}_{i2}^2. \quad (2)$$

Пусть  $M_z$  — внешний вращающий момент, приложенный к ротору. Тогда обусловленные им обобщенные силы будут выглядеть следующим образом [6]:

$$Q_X = Q_Y = 0, \quad Q_\alpha = M_z \beta, \quad Q_\beta = 0, \quad Q_\theta = M_z. \quad (3)$$

Используя выражения (1)–(3), а так же малость углов  $\alpha, \beta$  и  $\chi$ , получаем  $(5 + 2n)$  уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\begin{aligned} & \left( m_0 + \sum_{j=1}^2 f_j \right) \ddot{X} + \sum_{j=1}^2 f_j h_j \ddot{\beta} + d_{11} \dot{X} + d_{12} \dot{\beta} + c_{11} X + c_{12} \beta = m_0 s_0 (\dot{\theta}^2 \cos(\theta + \gamma) + \\ & + \ddot{\theta} \sin(\theta + \gamma)) + \sum_{j=1}^2 \left( f_j s_j \left( \dot{\theta}^2 \cos(\theta + \gamma_j) + \ddot{\theta} \sin(\theta + \gamma_j) + m_j r_j \sum_{i=1}^n (\dot{\phi}_{ij}^2 \cos \phi_{ij} + \dot{\phi}_{ij} \sin \phi_{ij}) \right) \right), \\ & \left( m_0 + \sum_{j=1}^2 f_j \right) \ddot{Y} - \sum_{j=1}^2 f_j h_j \ddot{\alpha} + d_{11} \dot{Y} - d_{12} \dot{\alpha} + c_{11} Y - c_{12} \alpha = m_0 s_0 (\dot{\theta}^2 \sin(\theta + \gamma) - \\ & - \ddot{\theta} \cos(\theta + \gamma)) + \sum_{j=1}^2 \left( f_j s_j (\dot{\theta}^2 \sin(\theta + \gamma_j) - \ddot{\theta} \cos(\theta + \gamma_j) + m_j r_j \sum_{i=1}^n (\dot{\phi}_{ij}^2 \sin \phi_{ij} - \dot{\phi}_{ij} \cos \phi_{ij})) \right), \\ & \left( J_t + \sum_{j=1}^2 f_j h_j^2 \right) \ddot{\alpha} - \sum_{j=1}^2 f_j h_j \ddot{Y} + d_{22} \dot{\alpha} - d_{12} \dot{Y} + c_{22} \alpha - c_{12} Y + J_p (\dot{\beta} \dot{\theta} + \beta \ddot{\theta}) = M_z \beta + \\ & + \chi (J_p - J_t) (\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta) - \sum_{j=1}^2 \left( h_j \left( f_j s_j (\dot{\theta}^2 \sin(\theta + \gamma_j) - \ddot{\theta} \cos(\theta + \gamma_j)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + m_j r_j \sum_{i=1}^n (\dot{\phi}_{ij}^2 \sin \phi_{ij} - \dot{\phi}_{ij} \cos \phi_{ij}) \right) \right), \\ & \left( J_t + \sum_{j=1}^2 f_j h_j^2 \right) \ddot{\beta} + \sum_{j=1}^2 f_j h_j \ddot{X} + d_{22} \dot{\beta} + d_{12} \dot{X} + c_{22} \beta + c_{12} X - J_p \dot{\alpha} \dot{\theta} = \\ & - \chi (J_p - J_t) (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) + \sum_{j=1}^2 \left( h_j \left( f_j s_j (\dot{\theta}^2 \cos(\theta + \gamma_j) + \ddot{\theta} \sin(\theta + \gamma_j)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + m_j r_j \sum_{i=1}^n (\dot{\phi}_{ij}^2 \cos \phi_{ij} + \dot{\phi}_{ij} \sin \phi_{ij}) \right) \right), \\ & (J_p + m_0 s_0^2) \ddot{\theta} + d_3 \dot{\theta} = M_z + m_0 s_0 (\ddot{X} \sin(\theta + \gamma) - \ddot{Y} \cos(\theta + \gamma)) - \sum_{j=1}^2 \left( m_j r_j \sum_{i=1}^n (r_j \ddot{\phi}_{ij} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\ddot{X} + h_j \ddot{\beta}) \sin \phi_{ij} + (\ddot{Y} - h_j \ddot{\alpha}) \cos \phi_{ij} - s_j f_j ((\ddot{X} + h_j \ddot{\beta}) \sin(\gamma_j + \theta) - (\ddot{Y} - h_j \ddot{\alpha}) \cos(\gamma_j + \theta)), \\
& m_j r_j^2 \ddot{\phi}_{ij} + d_4 (\dot{\phi}_{ij} - \dot{\theta}) = m_j r_j ((\ddot{X} + h_j \ddot{\beta}) \sin \phi_{ij} - (\ddot{Y} - h_j \ddot{\alpha}) \cos \phi_{ij}) + \\
& + s_j (\dot{\theta}^2 \sin(\psi_{ij} - \gamma_j) - \ddot{\theta} \cos(\psi_{ij} - \gamma_j)), \quad j = 1, 2; \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
d_{11} &= d_1 + d_2, \quad d_{12} = d_2 l_2 - d_1 l_1, \quad d_{22} = d_1 l_1^2 + d_2 l_2^2, \quad c_{11} = c_1 + c_2, \\
c_{12} &= c_2 l_2 - c_1 l_1, \quad c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2, \quad J_t = \tilde{J}_t + \sum_{j=1}^2 J_{t_j}, \quad J_p = \tilde{J}_p + \sum_{j=1}^2 J_{p_j}, \\
\phi_{ij} &= \theta + \psi_{ij}, \quad f_j = p_j + n m_j.
\end{aligned}$$

Введем вектор-столбец комплексных переменных  $q = \{X + iY, \beta - i\alpha\}^T$  и представим уравнения (4) в матричной форме:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \left( \mathbf{M}_0 + \sum_{j=1}^2 f_j \mathbf{M}_j \right) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} - i\dot{\theta} \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{F}_0 (\dot{\theta}^2 - i\ddot{\theta}) e^{i\theta} + \\
& + \sum_{j=1}^2 f_j s_j \mathbf{F}_j e^{i\gamma_j} (\dot{\theta}^2 - i\ddot{\theta}) e^{i\theta} + \sum_{j=1}^2 m_j r_j \mathbf{F}_j \sum_{k=1}^n (\dot{\phi}_{kj}^2 - i\ddot{\phi}_{kj}) e^{i\phi_{kj}}, \\
& (J_p + m_0 s_0^2) \ddot{\theta} + d_3 \dot{\theta} = M_z + m_0 s_0 \mathbf{K}^T \text{Im}[\ddot{\mathbf{q}} e^{-i(\theta+\gamma)}] - \sum_{j=1}^2 \left( m_j r_j \sum_{k=1}^n (r_j \ddot{\phi}_{kj} - \right. \\
& \left. - \mathbf{K}^T \text{Im}[\ddot{\mathbf{q}} e^{-i\phi_{kj}}] - s_j f_j \mathbf{K}^T \text{Im}[\ddot{\mathbf{q}} e^{-i(\theta+\gamma_j)}]) \right), \\
& m_j r_j^2 \ddot{\phi}_{kj} + d_4 (\dot{\phi}_{kj} - \dot{\theta}) + \mathbf{F}_j^T \text{Im}[\ddot{\mathbf{q}} e^{-i\phi_{kj}}] = s_j (\dot{\theta}^2 \sin(\psi_{kj} - \gamma_j) - \ddot{\theta} \cos(\psi_{kj} - \gamma_j)), \\
& j = 1, 2; \quad k = 1, \dots, n,
\end{aligned} \right. \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_0 &= \begin{pmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & J_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_j = \begin{pmatrix} 1 & h_j \\ h_j & h_j^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{G} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} m_0 s_0 e^{i\gamma} \\ -\chi(J_p - J_t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ h_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**2. Стационарные режимы движения ротора.** Далее мы будем рассматривать ротор с двухплоскостным АБУ, каждая из обоем которого содержит два шарика. Предположим, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью  $\dot{\theta} = \omega$ . Для исследования стационарных режимов движения ротора удобно перейти к уравнениям относительно системы координат, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $OZ$ . Обозначим через  $\tilde{\mathbf{q}}$  комплексный координатный вектор-столбец во вращающейся системе координат. Связь между старыми и новыми переменными выражается следующими соотношениями:

$$\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}} e^{i\omega t}, \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + i\tilde{\mathbf{q}}\omega) e^{i\omega t}, \quad \ddot{\mathbf{q}} = (\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + 2i\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\omega - \tilde{\mathbf{q}}\omega^2) e^{i\omega t}. \quad (6)$$

Подставляя соотношения (6) в уравнения (5), получим автономные уравнения движения во вращающейся системе координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \mathbf{M}_0 + \sum_{j=1}^2 f_j \mathbf{M}_j \right) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \left( \mathbf{D} + i\omega \left( 2 \left( \mathbf{M}_0 + \sum_{j=1}^2 f_j \mathbf{M}_j \right) - \mathbf{G} \right) \right) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \left( \mathbf{C} + i\omega \mathbf{D} - \omega^2 \left( \mathbf{M}_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=1}^2 f_j \mathbf{M}_j - \mathbf{G} \right) \right) \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_0 \omega^2 + \sum_{j=1}^2 f_j s_j \mathbf{F}_j e^{i\gamma_j} \omega^2 + \sum_{j=1}^2 m_j r_j \mathbf{F}_j \sum_{k=1}^2 ((\omega + \dot{\psi}_{kj})^2 - i\ddot{\psi}_{kj}) e^{i\psi_{kj}}, \\ m_j r_j^2 \ddot{\psi}_{kj} + d_4 \dot{\psi}_{kj} + \mathbf{F}_j^T \text{Im}[(\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + 2i\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\omega - \tilde{\mathbf{q}}\omega^2) e^{-i\psi_{kj}}] = s_j \omega^2 \sin(\psi_{kj} - \gamma_j), \quad j=1, 2; \quad k=1, 2. \end{array} \right. \quad (7)$$

Полагая в (7) значения всех производных от обобщенных координат равными нулю, получим уравнения, описывающие стационарные режимы движения ротора:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \mathbf{C} + i\omega \mathbf{D} - \omega^2 \left( \mathbf{M}_0 + \sum_{j=1}^2 f_j \mathbf{M}_j - \mathbf{G} \right) \right) \tilde{\mathbf{q}} = \omega^2 \left( \mathbf{F}_0 + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^2 f_j s_j \mathbf{F}_j e^{i\gamma_j} + \sum_{j=1}^2 m_j r_j \mathbf{F}_j \sum_{k=1}^2 e^{i\psi_{kj}} \right), \\ \mathbf{F}_j^T \text{Im}[-\tilde{\mathbf{q}}\omega^2 e^{-i\psi_{kj}}] = s_j \omega^2 \sin(\psi_{kj} - \gamma_j), \quad j=1, 2; \quad k=1, 2. \end{array} \right. \quad (8)$$

Выражая во втором уравнении (8) вектор обобщенных координат в тригонометрической форме  $\tilde{\mathbf{q}} = \{a_1 e^{i\varphi_1}, a_2 e^{i\varphi_2}\}^T$ , где

$$\begin{aligned} a_1 e^{i\varphi_1} &= \xi_1 + i\eta_1, & a_1 &= \sqrt{X^2 + Y^2}, \\ a_2 e^{i\varphi_2} &= \xi_2 + i\eta_2, & a_2 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \end{aligned}$$

запишем его в скалярном виде

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \sin(\varphi_1 - \psi_{11}) + h_1 a_2 \sin(\varphi_2 - \psi_{11}) = s_1 \sin(\psi_{11} - \gamma_1), \\ a_1 \sin(\varphi_1 - \psi_{21}) + h_1 a_2 \sin(\varphi_2 - \psi_{21}) = s_1 \sin(\psi_{21} - \gamma_1), \\ a_1 \sin(\varphi_1 - \psi_{12}) + h_2 a_2 \sin(\varphi_2 - \psi_{12}) = s_2 \sin(\psi_{12} - \gamma_2), \\ a_1 \sin(\varphi_1 - \psi_{22}) + h_2 a_2 \sin(\varphi_2 - \psi_{22}) = s_2 \sin(\psi_{22} - \gamma_2). \end{array} \right.$$

Преобразуем полученные уравнения: умножим первое уравнение на  $\sin \psi_{21}$  и вычтем из него второе уравнение, умноженное на  $\sin \psi_{11}$ . Затем вычтем второе уравнение, умноженное на  $\cos \psi_{11}$ , из первого, умноженного на  $\cos \psi_{21}$ . Аналогично для уравнений, содержащих  $\psi_{12}$  и  $\psi_{22}$ . В итоге получим

$$\begin{aligned} \sin(\psi_{11} - \psi_{21}) (\eta_1 + h_1 \eta_2 + s_1 \sin \gamma_1) &= 0, \\ \sin(\psi_{12} - \psi_{22}) (\eta_1 + h_2 \eta_2 + s_2 \sin \gamma_2) &= 0, \\ \sin(\psi_{11} - \psi_{21}) (\xi_1 + h_1 \xi_2 + s_1 \cos \gamma_1) &= 0, \\ \sin(\psi_{12} - \psi_{22}) (\xi_1 + h_2 \xi_2 + s_2 \cos \gamma_2) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения (9) имеют два решения, отвечающие двум различным типам стационарных режимов. Для режимов первого типа, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \sin(\psi_{11} - \psi_{21}) &= 0, \\ \sin(\psi_{12} - \psi_{22}) &= 0, \end{aligned}$$

из которых получаем  $\psi_{11} = \psi_{21} + \pi k$  ( $k = 0, 1$ ) и  $\psi_{12} = \psi_{22} + \pi k$  ( $k = 0, 1$ ), т. е. балансировочные шарики либо соприкасаются, либо находятся на противоположных сторонах круговых полостей АБУ. Такой режим назовем полностью несбалансированным.

Решения второго типа удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{-h_2 s_1 \sin \gamma_1 + h_1 s_2 \sin \gamma_2}{h_2 - h_1}, & \xi_1 &= \frac{-h_2 s_1 \cos \gamma_1 + h_1 s_2 \cos \gamma_2}{h_2 - h_1}, \\ \eta_2 &= \frac{s_1 \sin \gamma_1 - s_2 \sin \gamma_2}{h_2 - h_1}, & \xi_2 &= \frac{s_1 \cos \gamma_1 - s_2 \cos \gamma_2}{h_2 - h_1}, \end{aligned} \quad (10)$$

откуда получим выражения для амплитуд прецессионных движений ротора:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\eta_1^2 + \xi_1^2} = \sqrt{\frac{h_2^2 s_1^2 - 2h_1 h_2 s_1 s_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) + h_1^2 s_2^2}{(h_1 - h_2)^2}}, \\ a_2 &= \sqrt{\eta_2^2 + \xi_2^2} = \sqrt{\frac{s_1^2 - 2s_1 s_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) + s_2^2}{(h_1 - h_2)^2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Этот режим будем называть полусбалансированным, так как полученные амплитуды прецессионных движений не зависят от угловой скорости ротора.

Найдем углы отклонения балансировочных шариков, соответствующие полусбалансированному стационарному режиму. Перепишем первое уравнение (8) в скалярном виде:

$$\begin{aligned} \cos \psi_{11} + \cos \psi_{21} &= \frac{1}{2k_{01}}(2k_{12}(-\xi_1 + l_1 \xi_2) - 2k_{22}(\xi_1 + l_2 \xi_2) + \omega(2w_{12}(\eta_1 - l_1 \eta_2) + \\ &+ 2w_{22}(\eta_1 + l_2 \eta_2) + \omega(w_{01} - 4\xi_2(h_2^2 p_2 + h_1^2 f_1) - 4h_1 f_1(\xi_1 + s_1 \cos \gamma_1) + \\ &+ 4h_2(m_0(\xi_1 + s_0 \cos \gamma) + f_1(\xi_1 + s_1 \cos \gamma_1) + 2m_1 h_1 \xi_2)))) \equiv \varsigma_{1,1}, \\ \cos \psi_{12} + \cos \psi_{22} &= \frac{1}{2k_{02}}(2k_{11}(\xi_1 - l_1 \xi_2) + 2k_{21}(\xi_1 + l_2 \xi_2) + \omega(2w_{11}(-\eta_1 + l_1 \eta_2) - \\ &- 2w_{21}(\eta_1 + l_2 \eta_2) + \omega(-w_{01} + 4\xi_2(h_1^2 p_1 + h_2^2 f_2) + 4h_2 f_2(\xi_1 + s_2 \cos \gamma_2) - \\ &- 4h_1(m_0(\xi_1 + s_0 \cos \gamma) + f_2(\xi_1 + s_2 \cos \gamma_2) + 2m_2 h_2 \xi_2)))) \equiv \varsigma_{2,1}, \\ \sin \psi_{11} + \sin \psi_{21} &= \frac{1}{k_{01}}(k_{12}(-\eta_1 + l_1 \eta_2) - k_{22}(\eta_1 + l_2 \eta_2) + \omega(w_{12}(-\xi_1 + l_1 \xi_2) + \\ &+ w_{22}(\xi_1 + l_2 \xi_2) + \omega(w_{02} - 2\eta_2(h_1^2 f_1 + h_2^2 p_2) - 2h_1 f_1(\eta_1 + s_1 \cos \gamma_1) + 2h_2(m_0(\eta_1 + \\ &+ s_0 \cos \gamma) + f_1(\eta_1 + s_1 \cos \gamma_1) + 2m_1 h_1 \eta_2)))) \equiv \varsigma_{1,2}, \\ \sin \psi_{12} + \sin \psi_{22} &= \frac{1}{k_{02}}(k_{11}(\eta_1 - l_1 \eta_2) + k_{21}(\eta_1 + l_2 \eta_2) + \omega(w_{12}(\xi_1 - l_1 \xi_2) + \\ &+ w_{21}(\xi_1 + l_2 \xi_2) + \omega(-w_{02} + 2\eta_2(h_2^2 f_2 + h_1^2 p_1) + 2h_2 f_2(\eta_1 + s_2 \cos \gamma_2) - 2h_1(m_0(\eta_1 + \\ &+ s_0 \cos \gamma) + f_2(\eta_1 + s_2 \cos \gamma_2) + 2m_2 h_2 \eta_2)))) \equiv \varsigma_{2,2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} k_{01} &= 2\omega^2(h_1 - h_2)m_1 r_1, & k_{02} &= 2\omega^2(h_1 - h_2)m_2 r_2, & k_{11} &= 2c_1(h_1 + l_1), \\ k_{12} &= 2c_1(h_2 + l_1), & k_{21} &= 2c_2(h_1 + l_2), & k_{22} &= 2c_2(h_2 + l_2), \\ w_{01} &= 4(J_p - J_t)(\xi_2 + \chi) - 3J_p \chi \xi_2^2, & w_{02} &= \eta_2(2(J_p - J_t) + J_p \chi \xi_2), \\ w_{11} &= 2d_1(h_1 + l_1), & w_{12} &= 2d_1(h_2 + l_1), & w_{21} &= 2d_2(h_1 + l_2), & w_{22} &= 2d_2(h_2 + l_2). \end{aligned}$$

Подставляя решения (10) в систему (12), находим

$$\begin{aligned}\psi_{1j} &= \arctan \frac{\varsigma_{j,2}}{\varsigma_{j,1}} \pm \arccos \left[ \pm \sqrt{\varsigma_{j,1}^2 + \varsigma_{j,2}^2/2} \right], \\ \psi_{2j} &= \arctan \frac{\varsigma_{j,2}}{\varsigma_{j,1}} \mp \arccos \left[ \pm \sqrt{\varsigma_{j,1}^2 + \varsigma_{j,2}^2/2} \right], \quad j = 1, 2.\end{aligned}\tag{13}$$

Из формул (13) вытекают следующие условия существования полусбалансированного стационарного режима:

$$\varsigma_{j,1}^2 + \varsigma_{j,2}^2 \leq 4, \quad j = 1, 2.\tag{14}$$

Выведем уравнения для расчета стационарных амплитуд полностью несбалансированного режима. Для этого представим первое уравнение системы (8) в виде

$$\begin{aligned}(A_{11}a_1 - 2\mu_1\omega^2)e^{i\varphi_1} + A_{12}a_2e^{i\varphi_2} &= \omega^2(m_0s_0e^{i\gamma} + f_1s_1e^{i\gamma_1} + f_2s_2e^{i\gamma_2}), \\ (A_{21}a_1 - 2\mu_2\omega^2)e^{i\varphi_1} + A_{22}a_2e^{i\varphi_2} &= \omega^2(\chi(J_t - J_p) + f_1s_1h_1e^{i\gamma_1} + f_2s_2h_2e^{i\gamma_2}),\end{aligned}\tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}A_{11} &= c_{11} + i\omega d_{11} - \omega^2(m_0 + f_1 + f_2), \\ A_{12} &= A_{21} = c_{12} + i\omega d_{12} - \omega^2(f_1h_1 + f_2h_2), \\ A_{22} &= c_{22} + i\omega d_{22} - \omega^2(J_t - J_p + f_1h_1^2 + f_2h_2^2), \\ \mu_1 &= m_1r_1 + m_2r_2, \quad \mu_2 = m_1r_1h_1 + m_2r_2h_2.\end{aligned}$$

Разрешая систему (15) относительно  $e^{i\varphi_1}$  и учитывая, что  $|e^{i\varphi_i}| = 1$ , получим уравнение относительно амплитуды  $a_1$ :

$$|\tilde{A}a_1 - 2\mu_1\omega^2A_{22} + 2\mu_2\omega^2A_{12}| = \omega^2|\tilde{B}|,\tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}, \\ \tilde{B} &= A_{22}(m_0s_0e^{i\gamma} + f_1s_1e^{i\gamma_1} + f_2s_2e^{i\gamma_2}) - A_{12}(\chi(J_t - J_p) + f_1s_1h_1e^{i\gamma_1} + f_2s_2h_2e^{i\gamma_2}).\end{aligned}$$

Возведя выражение (16) в квадрат, получим квадратное уравнение

$$P_1a_1^2 - 2P_2a_1 + P_3 = 0,\tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}P_1 &= (\operatorname{Re}\tilde{A})^2 + (\operatorname{Im}\tilde{A})^2, \\ P_2 &= 2\mu_2\omega^2(\operatorname{Re}\tilde{A} \operatorname{Re}A_{12} + \operatorname{Im}\tilde{A} \operatorname{Im}A_{12}) - 2\mu_1\omega^2(\operatorname{Re}\tilde{A} \operatorname{Re}A_{22} + \operatorname{Im}\tilde{A} \operatorname{Im}A_{22}), \\ P_3 &= 4\omega^4(\mu_1((\operatorname{Re}A_{22})^2 + (\operatorname{Im}A_{22})^2) + \mu_2((\operatorname{Re}A_{12})^2 + (\operatorname{Im}A_{12})^2) - \\ &\quad - \mu_1\mu_2(\operatorname{Re}A_{22} \operatorname{Re}A_{12} + \operatorname{Im}A_{22} \operatorname{Im}A_{12}) - (\operatorname{Re}\tilde{B})^2 + (\operatorname{Im}\tilde{B})^2).\end{aligned}$$

Разрешим систему (15) относительно  $e^{i\varphi_2}$  и подставим решение из уравнения (17):

$$\begin{aligned}|a_2| &= \frac{1}{|\tilde{A}a_1 - 2\mu_1\omega^2A_{22} + 2\mu_2\omega^2A_{12}|} \omega^2 |(\chi(J_t - J_p) + f_1s_1h_1e^{i\gamma_1} + \\ &+ f_2s_2h_2e^{i\gamma_2})(A_{11}a_1 - 2\mu_1\omega^2) - (m_0s_0e^{i\gamma} + f_1s_1e^{i\gamma_1} + f_2s_2e^{i\gamma_2})(A_{21}a_1 - 2\mu_2\omega^2)|.\end{aligned}\tag{18}$$



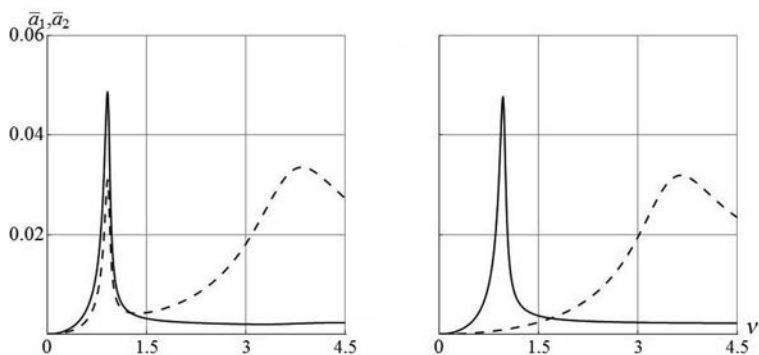


Рис. 3. АЧХ длинного несимметричного и симметричного роторов с неидеальным АБУ.

На рис. 3 представлена зависимость безразмерных амплитуд прецессионных движений  $\bar{a}_1 = a_1/(l_1 + l_2)$  (сплошная кривая) и  $\bar{a}_2 = a_2$  (штриховая линия) от  $\nu = \omega/\sqrt{c_{11}/m_0}$  для «длинного» ротора, рассчитанные из соотношений (17) и (18). Левый график соответствует симметричному ротору ( $l_1 = l_2 = 0.5$  м); правый — несимметричному ( $l_1 = 1/3$  м,  $l_2 = 2/3$  м). Расчет проведен при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned}
 m_0 &= 10 \text{ кг}, & m_1 &= m_2 = 0.07 \text{ кг}, & p_1 &= p_2 = 1 \text{ кг}, \\
 \gamma &= 0.01, & \chi &= 0.02, & \gamma_1 &= 1, & \gamma_2 &= 1 + \pi/2, & s_1 &= s_2 = 0.01 \text{ м}, \\
 h_1 &= h_2 = 0.45 \text{ м}, & r_1 &= r_2 = 0.1 \text{ м}, & s_0 &= 0.005 \text{ м}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Из графиков видно, что в области первой критической скорости движение несимметричного длинного ротора представляет собой суперпозицию цилиндрической и конической прецессий, которую будем далее называть гиперболоидальной [9], а движение симметричного ротора (правый график) близко к цилиндрической прецессии, так как амплитуда угловой прецессии мала. В области второй критической скорости у обоих типов роторов движение в силу малости амплитуды  $\bar{a}_1$  близко к конической прецессии, которая уменьшается в закритической области.

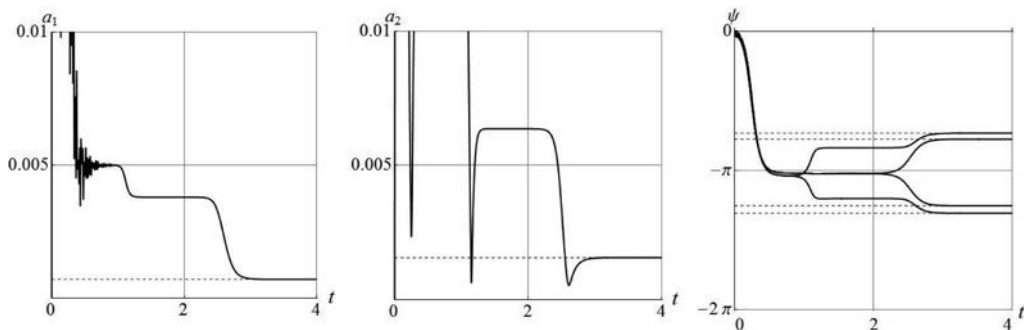


Рис. 4. Процесс установления полусбалансированного режима.

Процесс установления полусбалансированного режима при постоянной угловой скорости вращения ротора  $\omega = 600 \text{ с}^{-1}$  продемонстрирован на рис. 4 для шариков массой  $m_1 = m_2 = 0.375$  кг. Прочие расчетные параметры аналогичны (19). В этом

случае амплитуды прецессионного движения стремятся к значениям, определяемым соотношениями (11) и показанными пунктиром на левом и среднем графиках. При этом балансировочные шарики занимают позицию, определяемую соотношениями (13).

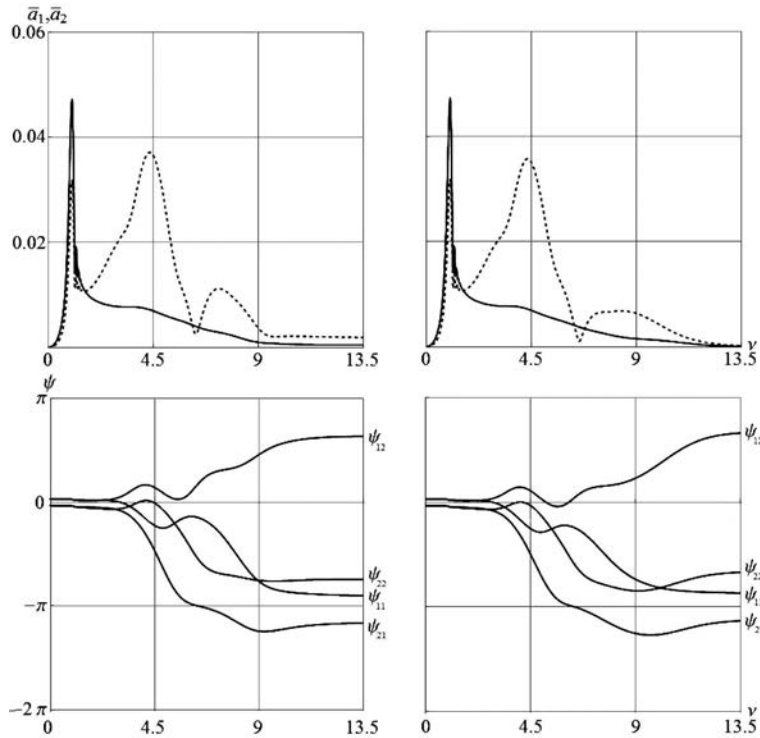


Рис. 5. Прохождение через резонансы длинного несимметричного ротора с неидеальным и идеальным АБУ.

Рисунок 5 демонстрирует процесс установления полусбалансированного режима при разгоне с постоянным угловым ускорением несимметричного ротора с идеальным и неидеальным АБУ. В случае неидеального АБУ (левый график) после прохождения обоих резонансов устанавливается полусбалансированный режим (11), тогда как для идеального АБУ (правый график) происходит полная балансировка ротора.

Таким образом, результаты расчетов подтверждают, что для динамически неуравновешенного ротора, оснащенного двухплоскостным эксцентрично насаженным АБУ, при выполнении условий (14) в закритической области устанавливается полусбалансированный режим с постоянными амплитудами остаточной вибрации, зависящими от эксцентриситетов АБУ и определяемыми формулами (11).

## Литература

1. Rodrigues D. J., Champneys A. R., Friswell M. I., Wilson R. E. Automatic Two-Plane Balancing for Rigid Rotors // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2008. Vol. 43. P. 527–541.
2. Sperling L., Ryzhik B., Linz Ch., Duckstein H. Simulation of two-plane automatic balancing of a rigid rotor // Mathematics and Computers in Simulation. 2002. Vol. 58. P. 351–365.
3. Ryzhik B., Duckstein H., Sperling L. Partial Compensation of Unbalance by One and Two-Plane Automatic Balancing Devices // International Journal of Rotating Machinery. 2004. Vol. 10, N 3. P. 193–201.

4. Нестеренко В. П., Соколов А. П. Остаточный дисбаланс, вызванный эксцентриситетом беговой дорожки, при автоматической балансировке роторов шарами // Динамика управляемых механических систем. Иркутск: ИЛИ, 1983. С. 46–50.

5. Агафонов Ю. В., Базыкин Ю. В. Исследование влияния эксцентриситета беговой дорожки шарового автобалансира на качество балансировки // Вестник машиностроения. 1986. № 8. С. 23–25.

6. Быков В. Г. Балансировка статически и динамически неуравновешенного ротора одноплоскостным автобалансирующим механизмом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2009. Вып. 4. С. 90–101.

7. Быков В. Г., Ковачев А. С. Динамика ротора с эксцентрическим шаровым автобалансирующим устройством // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Вып. 4. С. 579–588.

8. Bykov V. G., Kovachev A. S. On stability of unbalanced steady-state motions of a rotor with eccentric ball autobalancing device // International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading, 2015; DOI:10.1109/POLYAKHOV.2015.7106720

9. Пасынкова И. А. Динамика прецессионного движения неуравновешенного ротора. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014. 238 с.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторе

Ковачев Александр Светославович — аспирант; alex0303@mail.ru

## BALANCING OF DYNAMICALLY UNBALANCED ROTOR CONSIDERING IMPERFECTIONS OF AUTOBALANCING DEVICES

Alexander S. Kovachev

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;  
alex0303@mail.ru

A dynamically unbalanced rotor equipped with two-plane automatic ball balancer is considered. It is assumed that both the ABB's cages are planted on the rotor shaft with some eccentricity. The equations of motion of the system in the stationary and rotating coordinate systems, as well as the equations describing stationary modes of motion, are obtained. The possibility of existence of two different types of unbalanced stationary modes is demonstrated for two-plane ABB with two balls in each of the ABB's cages. The steady state mode with a constant residual vibration amplitude, which is independent of the angular velocity, is proposed to call half-balanced. The solution corresponding to half-balanced mode is built analytically; the conditions of its existence are obtained. Unbalanced modes of motion of the rotor when it rotates at a constant and a variable angular velocity are investigated using numerical methods. Refs 9. Figs 5.

*Keywords:* two-plane automatic ball balancer, dynamically unbalanced rotor.

## References

1. Rodrigues D. J., Champneys A. R., Friswell M. I., Wilson R. E., “Automatic Two-Plane Balancing for Rigid Rotors”, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **43**, 527–541 (2008).

2. Sperling L., Ryzhik B., Linz Ch., Duckstein H., “Simulation of two-plane automatic balancing of a rigid rotor”, *Mathematics and Computers in Simulation* **58**, 351–365 (2002).

3. Ryzhik B., Duckstein H., Sperling L., “Partial Compensation of Unbalance by One and Two-Plane Automatic Balancing Devices”, *International Journal of Rotating Machinery* **10**(3), 193–201 (2004).

4. Nesterenko V. P., Sokolov A. P., “The residual imbalance caused by the eccentricity of the treadmill during automatic rotor balancing by balls”, *Dynamics of controlled mechanical systems* (Irkutsk, ILI, 1983, 46–50) [in Russian].

5. Agafonov Y. V., Bazykin Y. V., “Investigation of the effect of the eccentricity of the automatic ball balancer's treadmill to balance quality”, *Vestnik mashinostroeniya* (8), 23–25 (1986) [in Russian].

6. Bykov V. G. “Balancing of statically and dynamically unbalanced rotor with one-plane autobalancing mechanism”, *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1* Issue 4, 90–101 (2009) [in Russian].

7. Bykov V. G., Kovachev A. S., “Dynamics of a Rotor with an Eccentric BallAutoBalancing Device”, *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **47**(4), 173–180 (2014).

8. Bykov V. G., Kovachev A. S., “On stability of unbalanced steady-state motions of a rotor with eccentric ball autobalancing device”, *International Conference on Mechanics «Seventh Polyakhov's Reading»* (2015) DOI:10.1109/POLYAKHOV.2015.7106720

9. Pasyunkova I. A., *The dynamics of the precession motion of an unbalanced rotor* (Publishing house of St. Petersburg. Univ., 2014) [in Russian].