

ДЕФОРМАЦИЯ ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

В. М. Мальков, Ю. В. Малькова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Получено точное аналитическое решение плоской задачи теории упругости (плоская деформация или плоское напряженное состояние) для бесконечной упругой пластины, содержащей упругое эллиптическое включение из другого материала. На бесконечности пластины заданы постоянные нормальные и касательные усилия. На границе включения и пластины выполняются условия непрерывности напряжений и перемещений. Для решения плоских задач применяются методы теории функций комплексной переменной и конформных отображений. Основное предположение, которое используется для построения решения в данной работе, состоит в том, что напряженное состояние в области включения является однородным при постоянных внешних усилиях на бесконечности пластины. Принятие этой гипотезы позволило свести решение сложной задачи сопряжения пластины с упругим включением к решению двух простых краевых задач (первой и второй) для пластины с эллиптическим отверстием, точные решения которых известны. Справедливость указанной гипотезы в нашей работе доказана тем, что полученное решение точно удовлетворяет всем граничным условиям задачи. При этом уравнения равновесия и совместности выполняются тождественно введением комплексных потенциалов Колосова—Мухелишвили. Выполнены расчеты напряжений в пакете Matlab и построены графики для различных видов нагружения пластины и разных материалов включения. Библиогр. 26 назв. Ил. 4.

Ключевые слова: плоские задачи, эллиптическое включение, метод комплексных функций, конформное преобразование.

Введение. Исследованию проблем упругих включений в плоскость уделено значительное внимание в литературе. Это связано с широким применением в технике композитных материалов. Чаще других рассматривались круговые или эллиптические включения. Установление свойства однородности напряженного состояния в эллиптическом (для плоскости) или эллипсоидальном (для пространства) включении обычно связывают с работами Эшелби [1, 2]. Эти работы получили известность и развитие; задачи об упругих включениях часто называют проблемой Эшелби. Однако в более ранних работах, например [3], уже использовалось это свойство при решении задачи об эллиптическом включении в плоскость. Получено, что при действии постоянных усилий на бесконечности во включении реализуется однородное напряженное состояние, отмечается аналогия с известным фактом электростатики. В работе [4] дано решение для упругого криволинейного включения в плоскость. Показано, что эллипс и его геометрические границы являются единственной формой включения, для которой постоянные напряжения на бесконечности вызывают однородное напряженное состояние внутри включения. Применение общего решения иллюстрируется некоторым числом примеров. Упругие включения различной формы, в том числе эллиптической, в конечную или бесконечную среду рассматривались в работе [5]. Задача сведена к сингулярному интегральному уравнению типа Коши вдоль границы включения и внешней границы среды, если она существует. Решение этого уравнения сводится к системе алгебраических уравнений. Численные результаты для эллиптического включения в бесконечную среду согласуются с известными результатами для этого случая. Жесткие эллиптические включения с отслоением на границе изучались в работах [6–9]. Определялись перемещения поверхностей тре-

щины, а также во всей матрице и включении. Обсуждалась проблема наложения берегов трещины в окрестности концов. В работе [9] исследовалась плоская задача для жесткого криволинейного включения частично соединенного с упругой бесконечной матрицей. Включение может иметь любую форму, отображаемую на единичный круг рациональной функцией. Матрица подвергнута двухосной нагрузке на бесконечности. Методом аналитического продолжения комплексных потенциалов задача для криволинейной границы сведена к неоднородной проблеме Гильберта, решение которой дает поля напряжений и перемещений в замкнутой форме. Развита общая методика для определения неизвестных коэффициентов решения, который может быть легко компьютеризирован для любого типа включения. Решение для эллиптического включения получено как частный случай.

В работах [10, 11] проблема упругого включения произвольной формы в плоскость исследовалась с помощью полиномов Фабера. Неизвестные коэффициенты определялись из условий на межфазной границе. В [11] рассмотрены эллиптические, квадратные и треугольные включения. Показано, что при увеличении жесткости включения окружные напряжения на границе уменьшаются, а радиальные и сдвиговые увеличиваются.

Метод получения аналитического решения проблемы Эшелби о включении произвольной формы в плоскость или полуплоскость с помощью техники аналитического продолжения и конформного отображения представлен в [12]. Конформное отображение области включения на круг используется, чтобы построить вспомогательную функцию, с помощью которой техника аналитического продолжения применяется к включению произвольной формы. Решение этим методом является точным, если отображение содержит конечное число членов, в противном случае решение будет приближенным. В частности, этот метод приводит к простым элементарным выражениям для напряжений включения. Чтобы показать эффективность метода, обсуждаются несколько практических примеров. По сравнению с другими существующими подходами к проблеме Эшелби, представленный метод отличается элементарным характером и применим к включениям произвольной формы в плоскость или полуплоскость. Аналогичный метод, использующий вспомогательную функцию, применялся в работе [13] для решения проблемы Эшелби о включении произвольной формы в одну из двух полуплоскостей двухкомпонентной плоскости. На нескольких примерах показано, как конструируется вспомогательная функция из конформного отображения области включения на единичный круг. Решения для включения в однородную плоскость или полуплоскость могут быть получены как частные случаи из общего решения для двухкомпонентной плоскости. В действительности же сформулированная проблема в точной математической постановке в работе не решена. Деформированное состояние включения считается однородным и заданным, при этом напряжения отсутствуют. Не ясно, как эти деформации физически реализовать. Сами авторы считают, что они создаются температурным полем, но деформация включения стеснена окружающей средой, поэтому неизбежно возникнут напряжения.

В статье [14] предложено полуаналитическое решение проблемы плоской деформации, связанной с эллиптическим включением в бесконечную матрицу. Соединение предполагается однородно несовершенным. Межфазная линия моделируется как межфазный слой с исчезающей толщиной. Предполагается, что на этом слое усилия непрерывны, а перемещения терпят разрыв. Методом комплексных переменных получены бесконечные ряды для напряжений, которые оцениваются численно.

Точные решения ряда задач для кусочно однородной пластины, содержащей бесконечный ряд эллиптических включений разного размера, расположения и упругих свойств получены в работе [15]. Метод состоит в комбинировании комплексных потенциалов Н. И. Мусхелишвили с принципом суперпозиции. Авторы пишут, что должным образом выбранная форма потенциалов обеспечивает очень простой вид решения и эффективный вычислительный алгоритм. Расчеты показали высокую точность и эффективность предлагаемого метода.

В работах [16, 17] рассматривались трехфазные композиты, где упругое включение произвольной формы в матрицу осуществлялось через промежуточный межфазный слой. На бесконечности матрицы заданы постоянные напряжения. Основная цель и итог этих работ заключались в том, чтобы показать, что за счет выбора механических и геометрических параметров промежуточного слоя напряженное состояние внутри включения можно сделать однородным. Методом комплексных переменных проблема изучалась в работе [16]. Показано, что напряженное состояние внутри включения можно сделать однородным за счет выбора механических и геометрических параметров промежуточного слоя. Общее решение проблемы трехфазного эллиптического включения при постоянной нагрузке на бесконечности представлено в работе [17]. Методом конформных отображений и аналитического продолжения в сочетании с методом последовательных приближений получены выражения для напряжений и перемещений в каждом слое в виде рядов.

Нелинейные задачи об эллиптическом включении изучались в работах [18, 19]. В работе [18] рассмотрена нелинейная задача об упругом включении в пластину из частного вида гармонического материала (материала Джона) при постоянных усилиях на бесконечности. С помощью техники комплексных переменных показано, что условные напряжения Пиолы внутри включения будут однородными только в случае эллиптического включения. Аналогичная нелинейная задача для трехфазного эллиптического включения рассмотрена в работе [19] также для частного класса гармонических материалов. Получены условия на нагрузку и параметры системы, при которых реализуются гидростатические напряжения включения.

Решение задачи для плоскости с отверстием, подкрепленным эллиптическим кольцом, получено в монографии [20]. Искомые комплексные функции представлены рядами Лорана, коэффициенты которых определяются из системы сложных уравнений.

Метод интегральных уравнений применялся в работе [21] для решения задачи об упругом включении, в частности, эллиптическом.

В недавней работе [22] исследована задача об эллиптическом включении в плоскость при постоянных и линейно зависящих от координаты усилиях на бесконечности. При решении задачи использовались разложения комплексных потенциалов в бесконечные ряды Лорана. Автор считал свое решение точным, что отражено в названии статьи, однако в действительности оно таковым не является, это показало сравнение с нашим точным решением.

В наших работах [23, 24] метод комплексных функций был использован для решения задачи об упругом включении круговой формы при наличии отслоения на границе раздела и задачи для трещины в виде дуги окружности, расположенной вблизи линии раздела двухкомпонентной плоскости.

1. Постановка задачи. Рассматривается бесконечная пластина с упругим эллиптическим включением из другого материала. Обозначим L — границу эллипса,

D_1 — область включения и D_2 — остальную часть комплексной плоскости $z = x + iy$. На бесконечности заданы постоянные нормальные и касательные усилия и угол поворота:

$$\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{ij}^\infty, \quad \omega \rightarrow \omega^\infty, \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

На контуре эллипса имеем условия упругого сопряжения — непрерывность напряжений и перемещений:

$$(\sigma_{nn} + i\sigma_{nt})_1 = (\sigma_{nn} + i\sigma_{nt})_2, \quad (u_1 + iu_2)_1 = (u_1 + iu_2)_2, \quad (1.2)$$

нижние индексы 1 и 2 соответствуют области включения и внешней области. Вместо условия в напряжениях (1.2) удобно взять условие в силах в виде

$$(f_1 + if_2)_1 = (f_1 + if_2)_2, \quad (1.3)$$

$$f_1 + if_2 = i \int_0^s (\sigma_{n1} + i\sigma_{n2}) ds + \text{const},$$

где f_1 и f_2 являются проекциями на оси декартовых координат вектора сил, вычисленного по напряжениям на некоторой кривой. Эти силы определяются только начальной и конечной точками области и не зависят от выбора кривой, соединяющей эти точки.

2. Конформное отображение плоскости с эллиптическим включением.

Выполним конформное отображение комплексной плоскости $z = x + iy$ с эллиптическим включением на комплексную плоскость ζ посредством функции

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^{-1}); \quad R > 0, \quad 0 \leq m < 1. \quad (2.1)$$

Полагая $\zeta = re^{i\theta}$, из (2.1) получим

$$x = R \left(r + \frac{m}{r} \right) \cos \theta, \quad y = R \left(r - \frac{m}{r} \right) \sin \theta.$$

Величины (r, θ) являются полярными координатами плоскости ζ и криволинейными координатами плоскости z , причем окружностям $r = \text{const}$ соответствуют софокусные эллипсы с полуосями

$$a = R \left(r + \frac{m}{r} \right), \quad b = R \left(r - \frac{m}{r} \right), \quad r \geq \sqrt{m},$$

а лучам $\theta = \text{const}$ — софокусные гиперболы. Контур эллипса включения получим при $r = 1$, его полуоси: $a = R(1 + m)$, $b = R(1 - m)$.

Из условия конформности отображения $\omega'(\zeta) = R(1 - m\zeta^{-2}) \neq 0$ следует $|\zeta| > \sqrt{m}$. Выражение (2.1) отображает эллиптическое включение D_1 с разрезом между фокусами на отрезке $[-c, c]$ оси x , $c = 2R\sqrt{m}$, на кольцо S_1 $\sqrt{m} \leq r \leq 1$ плоскости ζ , а область D_2 — на внешность круга единичного радиуса S_2 с центром $\zeta = 0$ (рис. 1). Значение параметра $m = 0$ соответствует круговому включению, а $m = 1$ — разрезу на плоскости z .

Векторный базис криволинейных координат обозначим $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$. Угол γ между осью x и вектором \mathbf{e}_r находим по формуле

$$e^{i\gamma} = \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} e^{i\theta} = \frac{\zeta}{r} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} = \frac{\zeta \omega'(\zeta)}{|\zeta \omega'(\zeta)|}.$$

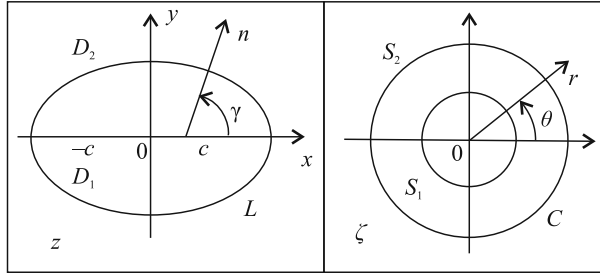


Рис. 1. Отображение эллиптического включения с разрезом в плоскости z на кольцо в плоскости ζ .

3. Уравнения плоской задачи теории упругости. В декартовых координатах компоненты тензора напряжений и вектора перемещений выражаются через комплексные потенциалы Колосова—Мусхелишвили следующим образом [25]:

$$\begin{aligned}\sigma_{22} - i\sigma_{21} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \\ \sigma_{11} + i\sigma_{12} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}, \\ 2\mu(u_1 + iu_2) &= \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Здесь μ — модуль сдвига, при плоской деформации $\kappa = 3 - 4\nu$, при плоском напряженном состоянии $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, ν — коэффициент Пуассона.

В векторном базисе $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ напряжения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - G(z), \\ \sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{\theta r} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + G(z),\end{aligned}\quad (3.2)$$

где

$$G(z) = \left[z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \right] e^{-2i\gamma}.$$

Перемещения в базисе координат (r, θ) таковы:

$$u_r + iu_\theta = (u_1 + iu_2) e^{-i\gamma}.$$

Выразим напряжения (3.2) через напряжения (3.1):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} &= 0,5 \left[\sigma_{11} + \sigma_{22} - (\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12})e^{-2i\gamma} \right], \\ \sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{\theta r} &= 0,5 \left[\sigma_{11} + \sigma_{22} + (\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12})e^{-2i\gamma} \right].\end{aligned}\quad (3.3)$$

Введем следующие обозначения для потенциалов как функций переменной ζ :

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \varphi(z) = \varphi(\omega(\zeta)), & \psi(\zeta) &= \psi(z) = \psi(\omega(\zeta)), \\ \Phi(\zeta) &= \Phi(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, & \Psi(\zeta) &= \Psi(z) = \frac{d\psi(z)}{dz} = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)},\end{aligned}$$

и перейдем в напряжениях (3.2) к переменной ζ :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} &= \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} - G(\zeta), \\ \sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{\theta r} &= \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + G(\zeta),\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$G(\zeta) = \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} \right] e^{-2i\gamma}, \quad e^{-2i\gamma} = \frac{\overline{\zeta} \overline{\omega'(\zeta)}}{\zeta \omega'(\zeta)}.$$

Компоненты вектора сил и перемещения запишем через комплексные потенциалы $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ [25]:

$$f_1 + if_2 = \varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)}, \quad (3.5)$$

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \varkappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}.$$

Граничные условия на контуре эллипса (1.2), (1.3) при подстановке в них выражений (3.5) примут вид

$$\varphi_1(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = \varphi_2(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)}, \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{2\mu_1} \left[\varkappa_1 \varphi_1(t) - \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)} \right] = \frac{1}{2\mu_2} \left[\varkappa_2 \varphi_2(t) - \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\varphi_2'(t)} - \overline{\psi_2(t)} \right],$$

где $t = e^{i\theta}$ — значение переменной ζ на контуре эллипса. Индексами 1 и 2 отмечены функции и параметры, относящиеся к включению и внешней области соответственно.

4. Решение краевой задачи. Комплексные потенциалы в области включения D_1 возьмем в таком виде, чтобы обеспечить однородность напряжений:

$$\varphi_1(z) = A_1 z, \quad \psi_1(z) = B_1 z, \quad (4.1)$$

комплексные постоянные A_1 и B_1 подлежат определению.

Комплексные потенциалы в бесконечной области D_2 представим так:

$$\varphi_2(\zeta) = AR\zeta + \varphi_0(\zeta), \quad \psi_2(\zeta) = BR\zeta + \psi_0(\zeta), \quad (4.2)$$

$$\omega'(\zeta)\Phi_2(\zeta) = AR + \varphi_0'(\zeta), \quad \omega'(\zeta)\Psi_2(\zeta) = BR + \psi_0'(\zeta), \quad (4.3)$$

где $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ — голоморфные функции в бесконечной области,

$$A = \frac{1}{4} \left(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty + \frac{8i\mu}{1 + \varkappa} \omega^\infty \right), \quad B = \frac{1}{2} (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty),$$

σ_{ij}^∞ , ω^∞ — напряжения и угол поворота на бесконечности (1.1); главный вектор внешних усилий на контуре включения считаем равным нулю.

Для эллиптического включения, используя формулы (4.1), получим выражения

$$\varphi_1(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi_1'(\zeta)} + \overline{\psi_1(\zeta)} = (A_1 + \overline{A_1}) \omega(\zeta) + \overline{B_1 \omega(\zeta)}, \quad (4.4)$$

$$\varkappa_1 \varphi_1(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi_1'(\zeta)} - \overline{\psi_1(\zeta)} = (\varkappa_1 A_1 - \overline{A_1}) \omega(\zeta) - \overline{B_1 \omega(\zeta)}.$$

Подставим (4.4) в условия сопряжения (3.6):

$$\varphi_2(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)} = (A_1 + \overline{A}_1)R \frac{t^2 + m}{t} + \overline{B}_1 R \frac{1 + mt^2}{t}, \quad (4.5)$$

$$\varkappa_2 \varphi_2(t) - \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\varphi_2'(t)} - \overline{\psi_2(t)} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \left[(\varkappa_1 A_1 - \overline{A}_1)R \frac{t^2 + m}{t} - \overline{B}_1 R \frac{1 + mt^2}{t} \right].$$

Уравнения (4.5) представляют первую и вторую основные задачи теории упругости для плоскости с эллиптическим отверстием соответственно. В первой задаче граничные условия на контуре эллипса сформулированы в силах (что равносильно условиям в напряжениях), во второй задаче — в перемещениях. В нашем случае обе задачи должны решаться совместно. Методы решения таких задач разработаны в монографии Н. И. Мухелишвили [25], будем их использовать. Каждое из уравнений (4.5) в отдельности позволяет определить обе функции $\varphi_2(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$; необходимо, чтобы они совпали при подходящем выборе постоянных A_1 и B_1 .

Подставив в (4.5) потенциалы (4.2), получим граничные задачи для голоморфных функций $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ в виде

$$\varphi_0(t) + \frac{t^2 + m}{t(1 - mt^2)} \overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = f_0(t), \quad (4.6)$$

$$\varkappa_2 \varphi_0(t) - \frac{t^2 + m}{t(1 - mt^2)} \overline{\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)} = g_0(t), \quad (4.7)$$

где

$$f_0(t) = -ARt - \overline{B}R \frac{1}{t} - \frac{t^2 + m}{t(1 - mt^2)} \overline{A}R + (A_1 + \overline{A}_1)R \frac{t^2 + m}{t} + \overline{B}_1 R \frac{1 + mt^2}{t},$$

$$g_0(t) = -\varkappa_2 ARt + \overline{B}R \frac{1}{t} + \frac{t^2 + m}{t(1 - mt^2)} \overline{A}R + \frac{\mu_2}{\mu_1} \left[(\varkappa_1 A_1 - \overline{A}_1)R \frac{t^2 + m}{t} - \overline{B}_1 R \frac{1 + mt^2}{t} \right].$$

Решение граничной задачи (4.6) имеет вид

$$\varphi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f_0(t) dt}{t - \zeta}, \quad (4.8)$$

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\overline{f_0(t)} dt}{t - \zeta} - \zeta \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \varphi_0'(\zeta).$$

Вычислив интегралы типа Коши (4.8) от функций $f_0(t)$ и $\overline{f_0(t)}$, получим

$$\varphi_0(\zeta) = - [m\overline{A} + \overline{B} - m(A_1 + \overline{A}_1) - \overline{B}_1] R \frac{1}{\zeta} = -DR \frac{1}{\zeta}, \quad (4.9)$$

$$\psi_0(\zeta) = - (\overline{A} - A_1 - \overline{A}_1 - mB_1) R \frac{1}{\zeta} - \frac{(1 + m^2)\zeta}{\zeta^2 - m} AR - \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta(\zeta^2 - m)} DR.$$

Аналогичным методом решается граничная задача (4.7):

$$\begin{aligned}\varphi_0(\zeta) &= \left(m\bar{A} + \bar{B} + \frac{\mu_2}{\mu_1} [m(\varkappa_1 A_1 - \bar{A}_1) - \bar{B}_1] \right) \frac{R}{\varkappa_2 \zeta} = HR \frac{1}{\zeta}, \\ \psi_0(\zeta) &= \left(\varkappa_2 \bar{A} - \frac{\mu_2}{\mu_1} [\varkappa_1 \bar{A}_1 - A_1 - mB_1] \right) R \frac{1}{\zeta} - \frac{(1+m^2)\zeta}{\zeta^2 - m} AR + \frac{1+m\zeta^2}{\zeta(\zeta^2 - m)} HR.\end{aligned}\quad (4.10)$$

В формулах (4.8)–(4.10) предполагается, что $\varphi_0(\infty) = 0$, это всегда допустимо [25]. Постоянная $\psi_0(\infty)$ в первой и второй задачах вычисляется по формулам [25]

$$\psi_0(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint \overline{f(t)} \frac{dt}{t}, \quad \psi_0(\infty) = -\frac{\mu_2}{\pi i} \oint \overline{g(t)} \frac{dt}{t},$$

где $f(t)$, $g(t)$ — правые части уравнений (4.5); здесь оба интеграла равны нулю.

Решения двух граничных задач (4.5), т. е. функции $\varphi_2(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$, должны быть одни и те же. Первые слагаемые в формулах (4.2) совпадают, значит функции $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ также должны совпадать.

Сравним выражения (4.9) и (4.10) для функций $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях в правых частях, получим два алгебраических уравнения для постоянных A_1 и B_1 :

$$\begin{aligned}-m\bar{A} - \bar{B} + m(A_1 + \bar{A}_1) + \bar{B}_1 &= \left(m\bar{A} + \bar{B} + \frac{\mu_2}{\mu_1} [m(\varkappa_1 A_1 - \bar{A}_1) - \bar{B}_1] \right) \frac{1}{\varkappa_2}, \\ -\bar{A} + A_1 + \bar{A}_1 + mB_1 &= \varkappa_2 \bar{A} - \frac{\mu_2}{\mu_1} (\varkappa_1 \bar{A}_1 - A_1 - mB_1).\end{aligned}\quad (4.11)$$

Из уравнений (4.11) неизвестные комплексные постоянные A_1 и B_1 однозначно определяются через известные постоянные A и B .

Из первого уравнения (4.11) выразим постоянную B_1 :

$$B_1 = \frac{\mu_1(1 + \varkappa_2)}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} (mA + B) - mA_1 - m \frac{\mu_1 \varkappa_2 - \mu_2 \varkappa_1}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} \bar{A}_1, \quad (4.12)$$

и подставим во второе уравнение; после запишем его в виде

$$FA_1 + G\bar{A}_1 = C, \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned}F &= (1 - m^2) \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1}, \\ G &= \frac{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1}{\mu_1} - m^2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} \frac{\mu_1 \varkappa_2 - \mu_2 \varkappa_1}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2}, \\ C &= (1 + \varkappa_2) \bar{A} - m(1 + \varkappa_2) \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} (mA + B).\end{aligned}\quad (4.14)$$

Из (4.13) находим

$$A_1 = \frac{FC - G\bar{C}}{F^2 - G^2}.$$

Постоянная B_1 определяется по формуле (4.12).

Рассмотрим два предельных случая для эллиптического включения: 1) включения нет и 2) включение является абсолютно жестким. В первом случае полагаем в системе уравнений (4.11) $\mu_1 = 0$, тогда $A_1 = B_1 = 0$. Приходим к задаче для пластины со свободным эллиптическим отверстием. Если параметр $m = 1$, тогда эллипс переходит в разрез.

Во втором случае считаем $\mu_1 = \infty$, согласно формулам (4.14) имеем $F = G = 1 - m^2$, тогда в (4.13) $\text{Im } C = 0$. Из последнего равенства и (4.14) следует зависимость угла поворота на бесконечности от усилия сдвига в виде

$$\omega^\infty = -\frac{m(1 + \varkappa_2)}{2\mu_2(\varkappa_2 + m^2)}\sigma_{12}^\infty. \quad (4.15)$$

Можно взять $\omega^\infty = 0$, но тогда нужно учесть угол поворота жесткого эллиптического ядра ε , вычисляемого по формуле (4.15) при $\omega^\infty = -\varepsilon$. Такая же формула для угла поворота ε жесткого ядра получена в работе Н. И. Мухелишвили [25] другим методом.

5. Формулы для напряжений и перемещений. Для потенциалов (4.1) напряжения в области включения, отнесенные к декартовым координатам, постоянны. По формулам (3.1), (3.3) получим

$$(\sigma_{22} - i\sigma_{21})_1 = A_1 + \bar{A}_1 + \bar{B}_1, \quad (\sigma_{11} + i\sigma_{12})_1 = A_1 + \bar{A}_1 - \bar{B}_1, \quad (5.1)$$

$$2\mu_1(u_1 + iu_2)_1 = (\varkappa_1 A_1 - \bar{A}_1)z - \bar{B}_1\bar{z}. \quad (5.2)$$

Из формулы (5.2) следует важный вывод, что контур включения остается эллиптическим после деформации при всех рассматриваемых видах внешней нагрузки. Найдем радиальное и окружное напряжения:

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})_1 = A_1 + \bar{A}_1 - \bar{B}_1 e^{-2i\gamma}, \quad (\sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta})_1 = A_1 + \bar{A}_1 + \bar{B}_1 e^{-2i\gamma}, \quad (5.3)$$

$$(\sigma_{rr})_1 = A_1 + \bar{A}_1 - \frac{1}{2}(B_1 e^{2i\gamma} + \bar{B}_1 e^{-2i\gamma}), \quad (\sigma_{\theta\theta})_1 = A_1 + \bar{A}_1 + \frac{1}{2}(B_1 e^{2i\gamma} + \bar{B}_1 e^{-2i\gamma}).$$

Сумма радиального и окружного напряжений постоянна в области включения, т. е.

$$(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})_1 = 2(A_1 + \bar{A}_1).$$

Напряжения в пластине находятся по формулам (3.4):

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})_2 = \Phi_2(\zeta) + \overline{\Phi_2(\zeta)} - G(\zeta),$$

$$(\sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta})_2 = \Phi_2(\zeta) + \overline{\Phi_2(\zeta)} + G(\zeta),$$

где

$$\Phi_2(\zeta) + \overline{\Phi_2(\zeta)} = \frac{1}{\zeta^2 - m}(A\zeta^2 + D) + \frac{1}{\bar{\zeta}^2 - m}(\bar{A}\bar{\zeta}^2 + \bar{D}),$$

$$G(\zeta) = \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\Phi_2(\zeta)} + \overline{\Psi_2(\zeta)} \right] e^{-2i\gamma},$$

$$e^{-2i\gamma} = \frac{(r^4 + m^2)\cos 2\theta - 2mr^2}{r^4 + m^2 - 2mr^2\cos 2\theta} - i\frac{(r^4 - m^2)\sin 2\theta}{r^4 + m^2 - 2mr^2\cos 2\theta}.$$

С помощью равенств (4.3) получим потенциалы $\Phi_2(\zeta)$, $\Psi_2(\zeta)$, $\Phi_2'(\zeta)$, причем для потенциалов $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ можно использовать формулы (4.9) или (4.10):

$$\begin{aligned}\omega'(\zeta)\Phi_2(\zeta) &= \varphi_2'(\zeta) = AR + \varphi_0'(\zeta) = AR + DR\frac{1}{\zeta^2}, \\ \omega'(\zeta)\Psi_2(\zeta) &= \psi_2'(\zeta) = BR + \psi_0'(\zeta) = BR + (\bar{A} - A_1 - \bar{A}_1 - mB_1)R\frac{1}{\zeta^2} + \\ &+ (1+m^2)\frac{\zeta^2+m}{(\zeta^2-m)^2}AR + \left(\frac{1+m\zeta^2}{(\zeta^2-m)\zeta^2} + \frac{2(1+m^2)}{(\zeta^2-m)^2}\right)DR, \\ \Phi_2'(\zeta) &= -\frac{2\zeta}{(\zeta^2-m)^2}(mA+D).\end{aligned}$$

Наибольший практический интерес представляют значения напряжений и перемещений на контуре эллиптического включения, т. е. при $r = 1$. В силу граничных условий и формул (5.2), (5.3) имеем

$$\begin{aligned}(u_1 + iu_2)_2 &= (u_1 + iu_2)_1 = \frac{1}{2\mu_1} \left[(\varkappa_1 A_1 - \bar{A}_1)\omega(t) - \bar{B}_1\overline{\omega(t)} \right], \quad t = e^{i\theta}, \\ (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})_2 &= (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})_1 = A_1 + \bar{A}_1 - \bar{B}_1 e^{-2i\gamma}.\end{aligned}$$

Угол γ на контуре эллипса определяется формулой

$$e^{-2i\gamma} = \frac{(1+m^2)\cos 2\theta - 2m}{1+m^2-2m\cos 2\theta} - i\frac{(1-m^2)\sin 2\theta}{1+m^2-2m\cos 2\theta}.$$

Сумма радиального и окружного напряжений на контуре эллипса равна

$$(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})_2 = 2\frac{A - mD + \bar{A} - m\bar{D} - (mA - \bar{D})e^{2i\theta} - (m\bar{A} - D)e^{-2i\theta}}{1 + m^2 - 2m\cos 2\theta}.$$

Отсюда и из (5.3) получим значение окружного напряжения в виде

$$\begin{aligned}(\sigma_{\theta\theta})_2 &= 2\frac{A - mD + \bar{A} - m\bar{D} - (mA - \bar{D})e^{2i\theta} - (m\bar{A} - D)e^{-2i\theta}}{1 + m^2 - 2m\cos 2\theta} - \\ &- A_1 - \bar{A}_1 + \frac{1}{2}(B_1 e^{2i\gamma} + \bar{B}_1 e^{-2i\gamma}). \quad (5.4)\end{aligned}$$

6. Результаты расчетов напряжений. Рассмотрим основные виды нагружения пластины и найдем значения постоянных в формулах для напряжений и перемещений.

Одноосное растяжение вдоль оси x : $\sigma_{11}^\infty = p$, $\sigma_{22}^\infty = \sigma_{12}^\infty = 0$.

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{4}p, \quad B = -\frac{1}{2}p, \quad C = (1 + \varkappa_2) \left[1 - m(m-2)\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} \right] \frac{1}{4}p, \\ A_1 &= \frac{C}{F + G}, \quad B_1 = \frac{\mu_1(1 + \varkappa_2)}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2}(m-2)\frac{1}{4}p - m\frac{\mu_2(1 - \varkappa_1) + 2\mu_1 \varkappa_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2}A_1.\end{aligned}$$

Одноосное растяжение вдоль оси y : $\sigma_{22}^{\infty} = p$, $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{12}^{\infty} = 0$.

$$A = \frac{1}{4}p, \quad B = \frac{1}{2}p, \quad C = (1 + \varkappa_2) \left[1 - m(m+2) \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} \right] \frac{1}{4}p,$$

$$A_1 = \frac{C}{F+G}, \quad B_1 = \frac{\mu_1(1 + \varkappa_2)}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} (m+2) \frac{1}{4}p - m \frac{\mu_2(1 - \varkappa_1) + 2\mu_1 \varkappa_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} A_1.$$

Всестороннее растяжение пластины: $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty} = p$, $\sigma_{12}^{\infty} = 0$.

$$A = \frac{1}{2}p, \quad B = 0, \quad C = (1 + \varkappa_2) \left[1 - m^2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} \right] \frac{1}{2}p,$$

$$A_1 = \frac{C}{F+G}, \quad B_1 = m \frac{\mu_1(1 + \varkappa_2)}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} \frac{1}{2}p - m \frac{\mu_2(1 - \varkappa_1) + 2\mu_1 \varkappa_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} A_1.$$

Из этих формул видно, что во всех трех случаях растяжения пластины усилиями на бесконечности постоянные A , B , C , D , A_1 , B_1 получились вещественными.

Формулы (5.3), (5.4) для окружных напряжений на контуре эллипса примут вид

$$(\sigma_{\theta\theta})_1 = \frac{2C}{F+G} + B_1 \frac{(1+m^2) \cos 2\theta - 2m}{1+m^2 - 2m \cos 2\theta}, \quad (6.1)$$

$$(\sigma_{\theta\theta})_2 = 4 \frac{A - mD - (mA - D) \cos 2\theta}{1+m^2 - 2m \cos 2\theta} - \frac{2C}{F+G} + B_1 \frac{(1+m^2) \cos 2\theta - 2m}{1+m^2 - 2m \cos 2\theta},$$

где постоянные зависят от вида нагружения, их значения приведены выше.

В случае свободного отверстия окружные напряжения при растяжении пластины усилиями p под углом α к оси x определяются выражением

$$(\sigma_{\theta\theta})_2 = \frac{1 - m^2 + 2m \cos 2\alpha - 2 \cos 2(\theta + \alpha)}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta} p,$$

которое совпадает с приведенным в работе [26]. В частности, при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ получим, соответственно,

$$(\sigma_{\theta\theta})_2 = \frac{1 - m^2 + 2m - 2 \cos 2\theta}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta} p, \quad (\sigma_{\theta\theta})_2 = \frac{1 - m^2 - 2m + 2 \cos 2\theta}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta} p.$$

Для жесткого включения при тех же условиях нагружения пластины имеем

$$\begin{aligned} (\sigma_{\theta\theta})_2 = \nu_2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})_2 = \nu_2 & \frac{(1 - m \cos 2\theta)\varkappa_2 - (m - \cos 2\theta)(m - 2 \cos 2\alpha)}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta} \frac{p}{\varkappa_2} + \\ & + \nu_2 \frac{\varkappa_2 - m^2}{\varkappa_2 + m^2} \frac{\sin 2\alpha \sin 2\theta}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta} p. \end{aligned}$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ получим

$$(\sigma_{\theta\theta})_2 = \nu_2 \frac{(1 - m \cos 2\theta)\varkappa_2 - (m - \cos 2\theta)(m - 2)}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta} \frac{p}{\varkappa_2},$$

$$(\sigma_{\theta\theta})_2 = \nu_2 \frac{(1 - m \cos 2\theta)\varkappa_2 - (m - \cos 2\theta)(m + 2)}{1 + m^2 - 2m \cos 2\theta} \frac{p}{\varkappa_2}.$$

Сдвиг пластины касательными усилиями σ_{12}^∞ . Значения постоянных таковы:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2i\mu_2}{1 + \varkappa_2} \omega^\infty, \quad B = i\sigma_{12}^\infty, \quad A_1 = \frac{C}{F - G}, \\ B_1 &= i \frac{\mu_1(1 + \varkappa_2)}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} \left[m \frac{2\mu_2}{1 + \varkappa_2} \omega^\infty + \sigma_{12}^\infty \right] - m \frac{\mu_2(1 + \varkappa_1)}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} A_1, \\ C &= -i \left[2\mu_2 \omega^\infty + m \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} (2\mu_2 m \omega^\infty + (1 + \varkappa_2) \sigma_{12}^\infty) \right], \\ F - G &= -\frac{\mu_2(1 + \varkappa_1)}{\mu_1} \left[1 + m^2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} \right]. \end{aligned}$$

Здесь все постоянные A, B, C, D, A_1, B_1 являются чисто мнимыми. Согласно формулам (5.1) напряжения включения $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = \text{Im } B_1$. Перемещения (5.2) не равны нулю, первое слагаемое в (5.2) соответствует перемещениям от поворота включения как жесткого целого. Угол поворота ω^∞ находится по формуле (4.15). С учетом этого выражения постоянные будут такими:

$$\begin{aligned} A &= -i \frac{m}{\varkappa_2 + m^2} \sigma_{12}^\infty, \quad B_1 = i \frac{\mu_1(1 + \varkappa_2)}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} \frac{\varkappa_2}{\varkappa_2 + m^2} \sigma_{12}^\infty - m \frac{\mu_2(1 + \varkappa_1)}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} A_1, \\ C &= -i(1 + \varkappa_2) \left[1 - \left(1 + m^2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2} \right) \frac{m}{\varkappa_2 + m^2} \right] \sigma_{12}^\infty. \end{aligned}$$

Остановимся более подробно на работах Хардимана [3] и Берсия [22], наиболее близких нам по постановке и методам решения задач. В обоих работах предполагается, что напряженное состояние включения является однородным. Хардиман комплексные функции в области включения и в пластине задает формулами

$$\varphi_1(z) = A_1 z, \quad \psi_1(z) = B_1 z, \tag{6.2}$$

$$\varphi_2(z) = Az + C_2 \frac{1}{\zeta}, \quad \psi_2(z) = Bz + \frac{1}{\zeta^2 - m} \left(D_1 R \zeta - D_2 R \frac{1}{\zeta} \right).$$

В таком же виде можно записать и функции, полученные нами. Принципиальная разница формул заключена в их коэффициентах. Наши комплексные функции являются решениями граничных задач и полностью определены (не содержат неизвестных постоянных). В формулах Хардимана семь неизвестных постоянных. Две постоянные A и B сразу определяются из условий на бесконечности и совпадают с нашими, оставшиеся пять постоянных нужно искать из условий на контуре включения, например из (3.6). Хардиман подставляет выражения (6.2) в условия (3.6), раскладывает в ряды и приравнивает коэффициенты при одинаковых степенях ζ так, чтобы число уравнений соответствовало числу неизвестных постоянных. Возьмем, для примера, одноосное растяжение пластины вдоль оси x усилиями p ; в работе [3] получено $A_1 = -B_1 = p$. Наши значения постоянных зависят от параметров эллипса, как и должно быть. Ошибочность формул Хардимана очевидна.

Берсия [22] функции в области включения берет в виде (6.2), а функции в бесконечной области разлагает в ряды Лорана:

$$\varphi_2(z) = Az + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(2R)^k} \zeta^{-k}, \quad \psi_2(z) = Bz + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(2R)^k} \zeta^{-k}. \tag{6.3}$$

Постоянные a_k, b_k определяются из условий (3.6) путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях ζ . В частности, получено $a_k = 0, k = 3, 4, \dots$, т.е. в разложении функции $\varphi_2(\zeta)$ формулы (6.3) присутствует степень ζ^{-2} , что противоречит точному выражению (6.2). Вторую функцию $\psi_2(\zeta)$ Берсия также удалось записать в конечном виде, но она существенно отличается от (6.2) и потому неверна.

Были выполнены расчеты окружных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ на контуре эллипса для включения и пластины по формулам (6.1). Предполагалось, что пластина изготовлена из меди с параметрами $E = 1,25 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 0,348$, для включения брались два материала: сталь с параметрами $E = 2,1 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 0,3$ и алюминий с параметрами $E = 0,74 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 0,342$.

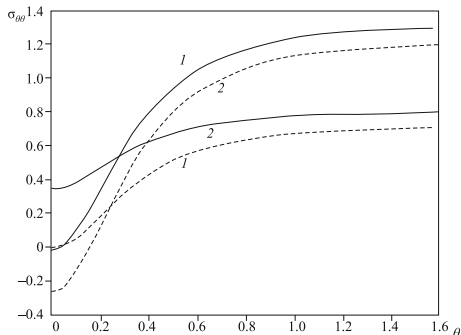


Рис. 2. Напряжения при растяжении вдоль оси x .

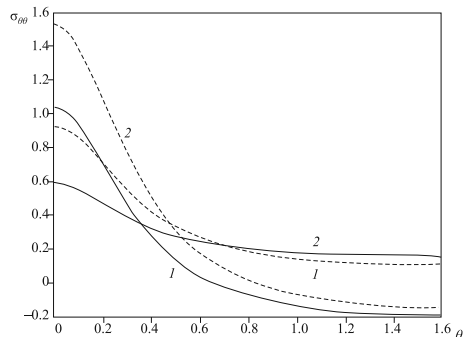


Рис. 3. Напряжения при растяжении вдоль оси y .

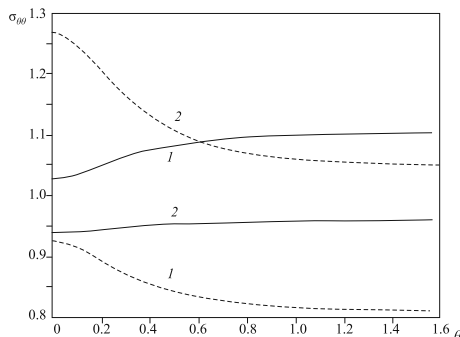


Рис. 4. Напряжения при всестороннем растяжении.

Геометрические параметры эллиптического включения: $a = 3, b = 1, R = 2, m = 0,5$. В качестве внешней нагрузки взяты растяжение вдоль оси x , растяжение вдоль оси y , всестороннее растяжение. Напряжения считались функциями угла θ , ввиду симметрии задачи принято $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Результаты расчетов представлены графиками на рис. 2–4. На каждом рисунке четыре кривые, цифрами 1 и 2 отмечены напряжения для включения D_1 и внешней области D_2 соответственно. Сплошной линией показаны напряжения для включения из стали, штриховой — из алюминия. По оси ординат отложены напряжения $\sigma_{\theta\theta}$, отнесенные к усилию p , по оси абсцисс — угол θ в радианах.

Из рисунков видно, что окружные напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ терпят разрыв при переходе через границу включения к пластине. Величина напряжений включения зависит от

жесткости материала, так в стальном включении напряжения больше, чем в алюминиевом; в пластине ситуация противоположная — напряжения для алюминиевого включения больше, чем для стального.

Заключение. В работе получено точное аналитическое решение краевой задачи об упругом эллиптическом включении в пластину. Оно удовлетворяет всем граничным условиям задачи: условиям на бесконечности и на контуре эллипса. Уравнения равновесия и неразрывности тождественно выполняются введением комплексных потенциалов Колосова—Мусхелишвили, через которые выражаются напряжения и перемещения. Наличие точного решения доказывает, что принятая гипотеза об однородности напряженного состояния в области эллиптического включения при постоянных внешних усилиях на бесконечности пластины является вполне обоснованной. Принципиально важно, что в нашей работе не используются разложения искомых потенциалов в ряды по степеням переменной ζ , для них получены конечные аналитические выражения. Были выполнены расчеты окружных напряжений на контуре включения для разных параметров материалов и построены графики. Эти напряжения представляют наибольший интерес, так как терпят разрыв на контуре включения, величина которого зависит от механических свойств материалов включения и пластины.

Литература

1. *Eshelby J. D.* The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. of Royal Society of London. Ser. A. Math. and Phys. Sci. 1957. Vol. 241, N 1226. P. 376–396.
2. *Eshelby J. D.* Elastic field outside an ellipsoidal inclusion // Proc. of Royal Society of London. Ser. A. Math. and Phys. Sci. 1959. Vol. 252, N 1271. P. 561–569.
3. *Hardiman N. J.* Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate // Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics. 1954. Vol. 7, N 2. P. 226–230.
4. *Sendeckyj G. P.* Elastic inclusion problems in plane elastostatics // Intern. J. of Solids and Structures. 1970. Vol. 6, N 12. P. 1535–1543.
5. *Theocaris P. S., Ioakimidis N. I.* The inclusion problem in plane elasticity // Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics. 1977. Vol. 30, N 4. P. 437–448.
6. *Toya M. A.* Debonding along the interface of an elliptic rigid inclusion // Intern. J. of Fracture. 1975. Vol. 11, N 6. P. 989–1002.
7. *Viola E., Piva A.* Fracture behaviour by two cracks around an elliptic rigid inclusion // Engineering Fracture Mechanics. 1981. Vol. 15, N 3–4. P. 303–325.
8. *Herrmann J. M.* The displacement field due to an interface crack along an elastic inclusion in a differing elastic matrix // Acta Mechanica. 1994. Vol. 105, N 1–4. P. 207–226.
9. *Gdoutos E. E., Kattis M. A.* A rigid curvilinear inclusion partially bonded in an elastic matrix // Intern. J. of Engineering Science. 1989. Vol. 27, N 11. P. 1287–1298.
10. *Mazurak L. P., Berezhyts'kyi L. T., Kachur, P. S.* A method for the determination of the elastic equilibrium of isotropic bodies with curvilinear inclusions. Part 1. Mathematical foundations // Materials Science. 1998. Vol. 34, N 6. P. 760–772.
11. *Luo J. C., Gao C. F.* Faber series method for plane problems of an arbitrarily shaped inclusion // Acta Mechanica. 2009. Vol. 208, N 3–4. P. 133–145.
12. *Ru G. Q.* Analytic solution for Eshelby's problem of an inclusion of arbitrary shape in a plane or half-plane // J. of Applied Mechanics, Transactions ASME. 1999. Vol. 66, N 2. P. 315–321.
13. *Ru C. Q., Schiavone P., Mioduchowski A.* Elastic fields in two jointed half-planes with an inclusion of arbitrary shape // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 2001. Bd 52, N 1. P. 18–32.
14. *Shen H., Schiavone P., Ru C. Q., Mioduchowski A.* Stress analysis of an elliptic inclusion with imperfect interface in plane elasticity // J. of Elasticity. 2001. Vol. 62, N 1. P. 25–46.
15. *Kushch V. I., Shmegeva S. V., Buryachenko V. A.* Interacting elliptic inclusions by the method of complex potentials // Intern. J. of Solids and Structures. 2005. Vol. 42, N 20. P. 5491–5512.
16. *Wang X., Gao X.-L.* On the uniform stress state inside an inclusion of arbitrary shape in a three-phase composite // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 2011. Bd 62, N 6. P. 1101–1116.

17. *Chao C. K., Chen C. K., Chen F. M.* Explicit solutions of stresses for a three-phase elliptic inclusion problem subject to a remote uniform load // CMES—Computer Modeling in Engineering and Sciences. 2010. Vol. 69, N 2. P. 119–141.
18. *Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A.* Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. 2005. Vol. 40, N 2–3. P. 281–287.
19. *Wang X.* Three-phase elliptical inclusions with internal uniform hydrostatic stresses in finite plane elastostatics // Acta Mechanica. 2011. Vol. 219, N 1–2. P. 77–90.
20. *Шереметьев М. П.* Пластинки с подкрепленным краем. Львов: Изд-во Львовского ун-та, 1960. 258 с.
21. *Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И.* Интегральные уравнения задачи об упругом включении. Полное аналитическое решение задачи об эллиптическом включении // Изв. РАН. МТТ. 2004, № 16. С. 50–76.
22. *Bercia R.* Exact solution for an elliptical inclusion in plane elasticity // UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied mathematics and physics. 2011. Vol. 73, N 1. P. 13–18.
23. *Мальков В. М., Малькова Ю. В., Иванов В. А.* Бесконечная плоскость с круговым включением, имеющим отслоение на части границы // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 4. С. 152–166.
24. *Мальков В. М., Малькова Ю. В.* Трещина в форме дуги окружности, расположенная вблизи поверхности раздела материалов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2010. Вып. 1. С. 93–104.
25. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
26. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Мальков Вениамин Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; vmmalkov@apmath.spbu.ru

Малькова Юлия Вениаминовна — кандидат физико-математических наук, доцент; jmalkova@list.ru

DEFORMATION OF A PLATE WITH ELLIPTIC ELASTIC INCLUSION

Veniamin M. Mal'kov, Yulia V. Mal'kova

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; vmmalkov@apmath.spbu.ru, jmalkova@list.ru

The exact analytical solution of a plane problem of elasticity (plane strain or plane stress) for an infinite elastic plate containing elliptic elastic inclusion of different material is received. The constant normal and shear stresses are given at infinity of a plate. The stresses and displacements are continuous on the interface of inclusion and plate. The methods of the theory functions of a complex variable and of conformal transformation are applied to the solution of this plane problem. The basic assumption which is used for construction of the solution consists that the stress state in the elliptic inclusion is homogeneous at constant external stresses at infinity of a plate. The acceptance of this hypothesis has allowed to reduce the solution of the complicated interface problem for a plate with elastic inclusion to the solution of two simple boundary value problems (the first and the second) for a plate with an elliptic hole, their exact solutions are known. The validity of the signed hypothesis in our work is proved to that the received solution precisely satisfies to all boundary conditions of a boundary value problem. Thus the equations of equilibrium and compatibility conditions are carried out identically by introduction of Kolosov–Muskhelishvili complex potentials. The calculations of stresses in package Matlab have been executed and graphics are constructed for various kinds loadings of plates at infinity and different materials of inclusion and plate. Refs 26. Figs 4.

Keywords: plane problems, elliptic inclusion, complex functions method, conformal transformation.

References

1. Eshelby J. D., "The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems", *Proc. of Royal Society of London. Ser. A. Math. and Phys. Sci.* **241**(1226), 376–396 (1957).
2. Eshelby J. D., "Elastic field outside an ellipsoidal inclusion", *Proc. of Royal Society of London. Ser. A. Math. and Phys. Sci.* **252**(1271), 561–569 (1959).
3. Hardiman N. J., "Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate", *Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics* **7**(2), 226–230 (1954).
4. Sendecyk G. P., "Elastic inclusion problems in plane elastostatics", *Intern. J. of Solids and Structures* **6**(12), 1535–1543 (1970).
5. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I., "The inclusion problem in plane elasticity", *Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics* **30**(4), 437–448 (1977).
6. Toya M. A., "Debonding along the interface of an elliptic rigid inclusion", *Intern. J. of Fracture* **11**(6), 989–1002 (1975).
7. Viola E., Piva A., "Fracture behaviour by two cracks around an elliptic rigid inclusion", *Engineering Fracture Mechanics* **15**(3–4), 303–325 (1981).
8. Herrmann J. M., "The displacement field due to an interface crack along an elastic inclusion in a differing elastic matrix", *Acta Mechanica* **105**(1–4), 207–226 (1994).
9. Gdoutos E. E., Kattis M. A., "A rigid curvilinear inclusion partially bonded in an elastic matrix", *Intern. J. of Engineering Science* **27**(11), 1287–1298 (1989).
10. Mazurak L. P., Berezhnyts'kyi L. T., Kachur P. S., "A method for the determination of the elastic equilibrium of isotropic bodies with curvilinear inclusions. Part 1. Mathematical foundations", *Materials Science* **34**(6), 760–772 (1998).
11. Luo J. C., Gao C. F., "Faber series method for plane problems of an arbitrarily shaped inclusion", *Acta Mechanica* **208**(3–4), 133–145 (2009).
12. Ru G. Q., "Analytic solution for Eshelby's problem of an inclusion of arbitrary shape in a plane or half-plane", *J. of Applied Mechanics, Transactions ASME* **66**(2), 315–321 (1999).
13. Ru C. Q., Schiavone P., Mioduchowski A., "Elastic fields in two jointed half-planes with an inclusion of arbitrary shape", *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik* **52**(1), 18–32 (2001).
14. Shen H., Schiavone P., Ru C. Q., Mioduchowski A., "Stress analysis of an elliptic inclusion with imperfect interface in plane elasticity", *J. of Elasticity* **62**(1), 25–46 (2001).
15. Kushch V. I., Shmegeera S. V., Buryachenko V. A., "Interacting elliptic inclusions by the method of complex potentials", *Intern. J. of Solids and Structures* **42**(20), 5491–5512 (2005).
16. Wang X., Gao X.-L., "On the uniform stress state inside an inclusion of arbitrary shape in a three-phase composite", *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik* **62**(6), 1101–1116 (2011).
17. Chao C. K., Chen C. K., Chen F. M., "Explicit solutions of stresses for a three-phase elliptic inclusion problem subject to a remote uniform load", *CMES – Computer Modeling in Engineering and Sciences* **69**(2), 119–141 (2010).
18. Ru C. Q., Schiavone P., Sudak L. J., Mioduchowski A., "Uniformity of stresses inside an elliptic inclusion in finite plane elastostatics", *Intern. J. of Non-Linear Mechanics* **40**(2–3), 281–287 (2005).
19. Wang X., "Three-phase elliptical inclusions with internal uniform hydrostatic stresses in finite plane elastostatics", *Acta Mechanica* **219**(1–2), 77–90 (2011).
20. Sheremetyev M. P., *The plates with reinforced edge* (Izdatelstvo L'vovskogo un-ta, L'vov, 1960, 258 p.) [in Russian].
21. Goldstein R. V., Shifrin E. L., "Integral equations of the problem of an elastic inclusion. Complete analytical solution of the problem of an elliptical inclusion", *Mechanics of Solids* **39**(1), 36–55 (2004) [in Russian].
22. Bercia R., "Exact solution for an elliptical inclusion in plane elasticity", *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied mathematics and physics* **73**(1), 13–18 (2011).
23. Malkov V. M., Malkova Yu. V., Ivanov V. A., "Infinite plate with circular inclusion debonded on a part of border", *Vestnik St.Petersburg University. Ser. 10* Issue 4, 152–166 (2009) [in Russian].
24. Malkov V. M., Malkova Yu. V., "A crack in form an arc of circle dispose near interface of the materials", *Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1* Issue 1, 93–104 (2010) [in Russian].
25. Muskhelishvili N. I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity* (Noordhof Ltd., Groningen, 1953).
26. Novozhilov V. V., *Theory of Elasticity* (Elsevier, 1961, 460 p.).