

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПЛАСТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОЙ БАЛКИ\*

*Г. В. Павилайнен*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассмотрена математическая модель изгиба пластически анизотропной балки, свободно опертой, находящейся под действием постоянного момента. Построено дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами для кривизны балки. Пределы текучести при растяжении или сжатии материала балки считаются известными. Рассматриваются результаты упруго-пластического изгиба балки с SD-эффектом. Основываясь на классической теории изгиба балок и теории идеальной пластичности, строим математическую модель и решаем задачу аналитически. Проведено сравнение решений для классической балки и балки с SD эффектом и анализ влияния SD-эффекта. Задача решена полностью и ее результаты могут быть использованы для изучения изгиба при других нагрузках. Библиогр. 12 назв. Ил. 2. Табл. 1.

*Ключевые слова:* упругопластический изгиб, балка, эффект SD.

**Введение.** Задачи проектирования и строительства требуют создания все более сложных математических моделей конструкций, учитывающих пластические свойства материалов. Основы математической теории пластичности определены в работах [1, 2].

Современные модели можно разделить на три группы. Первую группу составляют модели, в основу которых положена зависимость механических характеристик материала от знаков возникающих напряжений или развивающихся деформаций, их называют разносопротивляющимися или разномодульными [3]. Вторая группа моделей определяет напряженно-деформированное состояние материалов за пределами упругого деформирования в зависимости от вида напряженного состояния [4]. Если при этом пределы текучести при растяжении или сжатии различаются, то такие материалы принято называть материалами с эффектом SD (strength-different) [5], в буквальном переводе — разнокрепкими.

Отечественные и зарубежные экспериментальные исследования [6, 7] показывают, что абсолютная разница в пределах текучести у материалов с эффектом SD при растяжении и сжатии в разных направлениях может достигать 25–30%.

Введем новый параметр  $d$  как отношение предела текучести при сжатии одномерного образца  $\sigma_s$  к пределу текучести при растяжении  $\sigma_e$ .

Построение предполагаемой математической модели изгиба SD-балок заключается в принятии ряда положений, в том числе гипотезы плоских сечений, одноосности нагружения, схемы идеальной пластичности. Для задач изгиба в упругой стадии и при изотропном упруго-пластическом изгибе эти допущения позволяют построить точные решения, удовлетворяющие уравнениям равновесия и совместности деформаций [8]. В случае, когда точных решений построить не удастся, математические задачи теории пластичности и нелинейной упругости можно рассматривать численно [9] или асимптотическими методами [10].

**Постановка задачи и основные соотношения.** Рассматриваем задачу об изгибе свободно опертой балки постоянного прямоугольного сечения в случае чистого

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00523).

изгиба моментом. В такой постановке задача для изотропной, равнопрочной балки рассмотрена Л. М. Качановым [11]. В нашем случае считаем, что материал балки обладает эффектом SD, а именно: при упругом деформировании растяжение или сжатие происходит с одинаковым модулем упругости, переход в пластическое состояние происходит при различных уровнях напряжений растяжения или сжатия, при пластическом деформировании материал считаем пластически анизотропным.

Рассмотрим призматический брус прямоугольного сечения толщиной  $2h$ , шириной  $b$  и длиной  $L$ , нагруженный на торцах общим моментом  $2M$ , который вызывает изгиб бруса в плоскости  $xoz$ .

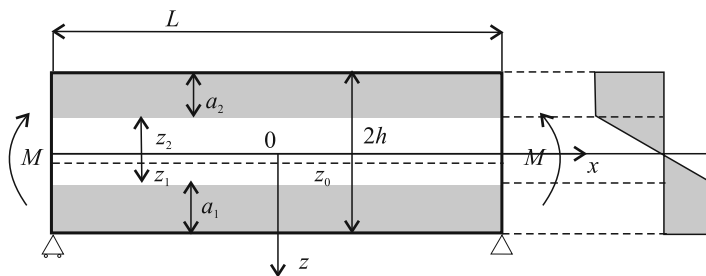


Рис. 1. Схема изгиба бруса постоянным моментом.

На рис. 1 области балки, которые находятся в пластическом состоянии, заштрихованы. Предположение об эффекте SD балки приводит к нарушению симметрии при развитии пластических деформаций, следовательно имеет место смещение нейтральной оси по сравнению со средней геометрической. Поэтому введем смещение  $z_0$  и величины  $z_1$ ,  $z_2$ , которые будут характеризовать расстояния от нейтральной оси до границы раздела упругой и пластической частей балки в областях растяжения и сжатия. Продольное напряжение при чистом изгибе не зависит от  $x$ , поэтому линии раздела пластических и упругого состояний являются прямыми. В дальнейшем будем считать, что предел текучести при растяжении меньше предела текучести при сжатии, т. е.  $d \geq 1$ .

Условие чистого изгиба дает нам возможность выписать компоненту продольного напряжения  $\sigma_x$  в упругой стадии согласно закону Гука, остальными компонентами напряжений мы можем пренебречь [11]:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (1)$$

В пластической стадии деформирования следуем теории идеальной пластичности без упрочнения ( $\sigma_e = \text{const}$ ,  $\sigma_s = \text{const}$ ) и используем условие пластической несжимаемости  $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$ .

Введем обозначения:  $M_t$  — значение изгибающего момента  $M$  при появлении пластических деформаций на нижней плоскости балки в области растяжения;  $M_*$  — значение изгибающего момента при появлении пластичности на верхней плоскости балки в области сжатия;  $M_k$  — критическое значение изгибающего момента, при котором балка целиком переходит в пластическое состояние и перестает сопротивляться изгибу. Введем еще  $M_0$  как критический момент при  $d = 1$ .

Процесс появления и развития пластичности при чистом изгибе происходит следующим образом: при росте изгибающего момента до значения  $M_t$  балка деформируется упруго и распределение напряжения  $\sigma_x$  по толщине происходит по линейному

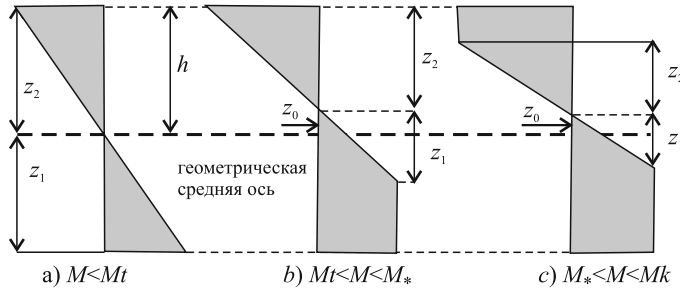


Рис. 2. Изменение эпюры напряжений в сечении балки при увеличении изгибающего момента.

закону (см. рис. 2, *a*), затем появляется пластический слой на верхней поверхности и при  $M_t \leq M \leq M_*$  этот слой увеличивается по толщине (см. рис. 2, *b*), затем появляется слой пластичности на нижней поверхности и он развивается по толщине при  $M_* \leq M \leq M_k$  (см. рис. 2, *c*). Процесс заканчивается при  $M = M_k$ ,  $z_1 + z_2 = 0$ .

Рассмотрим эпюру напряжения  $\sigma_x$  в произвольном сечении  $x$  бруса  $M \geq M_*$  (см. рис. 2, *c*). Равновесие элемента поперечного сечения означает равенство заштрихованных площадей сверху и снизу нейтральной оси. Запишем это равенство:

$$(2h - a_2 - z_1 - z_2)\sigma_e + 0.5z_1\sigma_e = a_2\sigma_s + 0.5z_2\sigma_s. \quad (2)$$

Здесь через  $a_2$  обозначена толщина пластического слоя в области сжатия. Введем еще аналогичную величину  $a_1$  для описания толщины пластического слоя в области растяжения. Имеет место соотношение

$$z_1 + a_1 + z_2 + a_2 = 2h. \quad (3)$$

Далее используем соотношение, которое следует из подобия треугольников,  $d = z_2/z_1$ . Выразим  $a_2$  из (2):

$$a_2 = \frac{2h}{1+d} - \frac{z_1(1+d)}{2}. \quad (4)$$

Теперь можно найти толщину пластического слоя в области растяжения из (3), а именно,

$$a_1 = \frac{2hd}{1+d} - \frac{z_1(1+d)}{2}. \quad (5)$$

Толщина пластических областей установлена в зависимости от величины  $z_1$ . Теперь найдем смещение  $z_0$  из очевидного равенства

$$h - (a_2 + z_2) = z_0,$$

откуда

$$z_0 = \frac{h(d-1)}{d+1} - \frac{z_1(d-1)}{2}. \quad (6)$$

Видим, что смещение  $z_0$  зависит линейно от толщины упругого слоя в области растяжения  $z_1$ . Воспользуемся условием непрерывности напряжения  $\sigma_x$  на границе упругой и пластических областей при растяжении и сжатии:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = Ez_1\alpha = \sigma_e, \quad \sigma_x = E\varepsilon_x = Ez_2\alpha = \sigma_s, \quad (7)$$

где  $\varkappa$  — кривизна нейтральной оси балки, и выразим  $z_1$  и  $z_2$ :

$$z_1 = \frac{\sigma_e}{E\varkappa}, \quad z_2 = \frac{\sigma_s}{E\varkappa}. \quad (8)$$

Запишем момент в любом сечении  $x$ :

$$M = b \left( \int_{-h+z_0}^{-z_2} (-\sigma_s)z dz + \int_{-z_2}^{z_1} E\varepsilon_x z dz + \int_{z_1}^{h+z_0} (\sigma_e)z dz \right). \quad (9)$$

Подставим в (9) соотношения (7) и (8). После преобразований имеем

$$M = b \left( \sigma_e \left( \frac{(h+z_0)^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) + \sigma_s \left( \frac{(h-z_0)^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} \right) + E\varkappa \left( \frac{z_1^3}{3} + \frac{z_2^3}{3} \right) \right). \quad (10)$$

Из этого соотношения можно найти момент начала образования пластической области в зоне растяжения. При  $z_1 = z_2 = h$ ,  $Eh\varkappa = \sigma_e$  имеем

$$M_t = \frac{2}{3}bh^2\sigma_e. \quad (11)$$

Аналогично можно определить критический момент, когда вся пластина становится пластической. Это происходит при  $z_1 = z_2 = 0$ . Тогда из (6) имеем  $z_0 = h(d-1)/(d+1)$  и критический момент

$$M_k = \frac{2bh^2d\sigma_e}{d+1}. \quad (12)$$

Найдем промежуточный момент  $M_*$ , при котором возникает пластичность в зоне сжатия, а в зоне растяжения она уже есть. Это происходит при

$$z_2 = h - z_0, \quad z_0 = \frac{h(1-d)^2}{(1+d)^2}, \quad z_1 = \frac{4h}{(1+d)^2}. \quad (13)$$

Момент

$$M_* = \frac{3d-1}{d+1}M_t. \quad (14)$$

В диапазоне  $M_t \leq M \leq M_*$  зависимость  $z_0$  от  $z_1$  перестает быть линейной и имеет вид

$$z_0 = (\sqrt{h} - \sqrt{z_1})^2. \quad (15)$$

Напомним, что при  $M \leq M_t$  выполняется  $z_0 \equiv 0$ .

Переходим к построению дифференциального уравнения для нахождения функции прогиба балки. Зависимость кривизны от изгибающего момента запишем для всех случаев, изображенных на рис. 2. Введем в рассмотрение кривизну  $\varkappa_0 = \sigma_e/(Eh)$ :

$$\frac{\varkappa}{\varkappa_0} = \begin{cases} \frac{3M}{2M_0}, & \text{если } 0 \leq M \leq M_t, \\ \left( \frac{3}{2} - \frac{3M}{4M_0} \right)^2, & \text{если } M_t \leq M \leq M_*, \\ (1+d)^{3/2} \left( \frac{48d}{d+1} - \frac{24M}{M_0} \right)^{-1/2}, & \text{если } M_* \leq M \leq M_k. \end{cases} \quad (16)$$

Далее, используя известное в линейной теории соотношение между кривизной и прогибом с учетом правила знаков и дважды интегрируя с использованием граничных

условий свободного опирания и симметрии задачи, получаем зависимость прогиба от продольной координаты:

$$w(x) = \sqrt{\frac{K}{M_k - M}} \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{L^2}{8} \right). \quad (17)$$

Здесь

$$K = \frac{b\sigma_e^3(1+d)^3}{24E^2}.$$

Для классической изотропной (равнопрочной) балки при  $d = 1$  решение упрощается и совпадает с [11].

Проиллюстрируем решение задачи численным расчетом. В таблице приведена зависимость моментов от значения параметра  $d$ . Моменты соотнесены к критическому моменту равнопрочной балки  $M_0$ .

$d$	1,0	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3
$M_t/M_0$	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67
$M_*/M_0$	0,67	0,70	0,73	0,76	0,79	0,81	0,84
$M_k/M_0$	1,0	1,025	1,047	1,070	1,091	1,11	1,13

Результаты расчета показывают существенное увеличение прочности балки при увеличении параметра  $d$ . Например, при увеличении на 30% предела текучести при сжатии по сравнению с пределом текучести на растяжение критический момент перехода всей балки в пластическое состояние возрастает на 13%. При этом зависимость критического момента от параметра  $d$  носит близкий к линейному характер.

**Заключение.** Построенная математическая модель позволяет изучить напряженно-деформированное состояние балки прямоугольной формы из сложного по физическим свойствам материала и рассмотреть широкий класс задач с различными условиями нагружения и опирания. Метод нахождения кривизны для разных состояний балки можно использовать при изгибе консолей из SD-материалов [12] и можно применить для решения тех задач, когда решение дифференциального уравнения изгиба в виде конечных формул является практически недостижимой задачей.

## Литература

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с.
3. Трещёв А. А. Анизотропные пластины и оболочки из разноспротивляющихся материалов. Москва; Тула: РААСН. ТулГУ, 2007. 160 с.
4. Ломакин Е. В., Мельников А. М. Пластическое плоское напряженное состояние тел, свойства которых зависят от вида напряженного состояния // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, № 2. С. 48–64.
5. Рыбакина О. Г. Критерий текучести анизотропного материала, обладающего эффектом SD. Исследования по упругости и пластичности // Вестн. Ленингр. ун-та. 1982, № 14. С. 132–142.
6. Унксов Е. П., Обвинников А. Г. Теория пластических деформаций металлов. М.: Машиностроение, 1983. 598 с.
7. Kulawinski D., Nagel K., Henkel S., Hubner P., Kuna M., Biermann H. Characterization of stress-strain behavior of a cast TRIP steel under different biaxial planar load ratios // Engineering Fracture Mechanics. Vol. 78, 2011. P. 1684–1695.
8. Павилайнен Г. В. К вопросу упруго-пластического деформирования конструкций // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1992. Вып. 1. С. 70–75.
9. Юшин Р. Ю. О возможности учета пластической анизотропии при изгибе круглых пластин // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 1. С. 134–140.

10. Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E. Asymptotic methods in mechanics with applications to thin shells and plates // *Asymptotic Methods in Mechanics. CRM Proc. & Lecture Notes*. 1993. Vol. 3. P. 3–141.

11. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 324 с.

12. Павилайнен Г. В., Бембеева А. И., Канин М. С. Упруго-пластический изгиб разнопрочных балок // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1*. 2014. Т. 1(59). Вып. 2. С. 284–291.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторе

Павилайнен Галина Вольдемаровна — кандидат физико-математических наук, доцент;  
g\_v\_pavilaynen@mail.ru

## THE MATHEMATICAL MODEL OF PLASTICITY ANISOTROPIC BEAMS BENDING

Galina V. Pavilaynen

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation;  
g\_v\_pavilaynen@mail.ru

A plasticity anisotropic beam simply bearing by the ends and uniformly moment was considered. The resolving differential equation of curvature with non-linear coefficients was built. Taking up one beam with a known different yield limits under the stress and tension. The results for the elastic-plastic bending of beams with the SD-effect under a moment are discussed. To solve this problem, the standard Bernoulli-Euler hypotheses for beams and the model of perfect plasticity are used. The problem is solved analytically and the numerical example was considered. The solutions for beam made of isotropic material and material with the SD-effect are compared. So, mathematical model of the plasticity anisotropic beams bending are fully completed. The results may be used for another different loads. Refs 12. Figs 2. Tables 1.

*Keywords:* elastoplastic bending, beam, Strength-Different effect.

## References

1. Hill R., *The mathematical theory of plasticity* (Clarendon Press, Oxford, 1953).
2. Donnell L. H., *Beams, plates and shells* (McGraw-Hill, New York, 1976).
3. Treshev A. A., *Anisotropy plates and shells of different-strengths materials* (Tula State Univ., Moscow, 2007) [in Russian].
4. Lomakin E. V., Melnikov A. M., “Plane stress state of media with plastic properties sensitive to the type of stress”, *Vycisl. meh. splos. sred* **2**(2), 48–64 (2009) [in Russian].
5. Rybakina O. G., “Anisotropic with SD effect materials yield criterium. Elastic and Plastic Challenge”, *Vestnik Leningrad. Univ.* (14), 132–142 (1982) [in Russian].
6. Unksow E. P., Ouchinikov A. G., *Theory of plasticity metals deformation* (Mechanical Engineering, Moscow, 1983) [in Russian].
7. Kulawinski D., Nagel K., Henkel S., Hubner P., Kuna M., Biermann H., “Characterization of stress-strain behavior of a cast TRIP steel under different biaxial planar load rations”, *Engineering Fracture Mechanics* **78**, 1684–1695 (2011).
8. Pavilaynen G. V., “The question of Elasto-Plastic Deformations”, *Vestn. Leningr. Univ. Ser. 1*. Issue 1, 70–75 (1992) [in Russian].
9. Yushin R. Yu., “About possibility of accountability of plastic anisotropy bending round plates”, *Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1*. (1), 134–140 (2011) [in Russian].
10. Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., “Asymptotic methods in mechanics with applications to thin shells and plates”, *Asymptotic Methods in Mechanics. CRM Proc.& Lecture Notes*. (3), 3–141 (1993).
11. Kachanov L. M., *Fundamentals of the Theory of Plasticity* (Courier Corporation, 2013).
12. Pavilaynen G. V., Bembeeva A. I., Kanin M. S. “Elastic-plastic bending of the SD-beams”, *Vestnik St.Petersburg University. Ser. 1*. 1(59), 284–291 (2014) [in Russian].