УДК 532.527 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 2 (60). 2015. Вып. 4

ВЛИЯНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА, ВЫДЕЛЕНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ ЭНЕРГИИ НА ВИХРЕВЫЕ СВОЙСТВА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ*

М. А. Рыдалевская, Ю. Н. Ворошилова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматриваются вихревые свойства течений идеальной жидкости. Показано, что в классических теоремах о сохранении вихревых свойств жидкости предположение о ее баротропности можно заменить предположением об адиабатичности исследуемого течения. При этом удалось проследить связь зарождения и развития аномальных атмосферных явлений со значительными нарушениями адиабатичности перемещения воздушных масс. Библиогр. 9 назв.

Ключевые слова: идеальная жидкость, вихревые свойства, адиабатичность течения.

Введение. Гидромеханика идеальной жидкости составляет большой раздел любого курса теоретической гидроаэромеханики. Это объясняется тем, что модель идеальной жидкости, в которой присутствуют только нормальные напряжения, обладает достаточной простотой и при этом позволяет решать важные практические задачи.

Уравнения в частных производных, описывающие течения идеальной жидкости, обычно записываются в виде (см., например, [1–3])

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho}\boldsymbol{\nabla} p, \tag{2}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{p}{\varrho}\mathrm{div}\mathbf{v}, \tag{3}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + v_x \partial/\partial x + v_y \partial/\partial y + v_z \partial/\partial z$; ϱ, $\mathbf{v}$ и E — массовая плотность, скорость и удельная энергия жидкости; p — давление; $\mathbf{F}$ — сила, действующая на единицу массы.

Для замыкания системы к уравнениям (1)–(3) добавляются термическое и калорическое уравнения состояния:

$$f\left(p, \varrho, T\right) = 0, \tag{4}$$

$$E = E\left(p, \varrho, T\right), \tag{5}$$

в которые входит абсолютная термодинамическая температура T.

Следует отметить, что уравнение для удельной энергии записано для нетеплопроводной жидкости при отсутствии объемных источников и стоков энергии. В этих условиях жидкость не приобретает энергию извне и не отдает ее. Такие течения называются адиабатическими.

Вид уравнения (4) существенно влияет на постановку задачи. Например, в случае, когда уравнение (4) не содержит температуры, его можно записать в виде

$$\varrho = \Phi(p). \tag{6}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (тема НИР 6.37.163.2014).

Такая жидкость называется баротропной. При этом постановка задач упрощается. Уравнения неразрывности (1), движения (2) и состояния (6) составляют замкнутую систему относительно плотности ϱ, скорости $\mathbf{v}$ и давления p. Их можно решать, не обращая внимания на происходящие в жидкости энергетические процессы.

Одним из важных этапов исследования любых течений жидкости и газа является определение их вихревых свойств.

В идеальной жидкости особое внимание всегда уделялось безвихревым течениям, когда

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\nabla} \times \mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{v} = 0 \tag{7}$$

во всей области, занятой жидкостью. Прежде всего это связано с тем, что соотношение (7) является необходимым и достаточным условием для существования потенциала скорости φ, который связан с вектором скорости равенством

$$\mathbf{v} = \mathbf{\nabla}\varphi. \tag{8}$$

При исследовании вихревых свойств идеальной жидкости всегда возникали вопросы.

1. При каких условиях течение, которое является безвихревым в какой-то момент времени, сохраняет это свойство в дальнейшем?

2. Как вихревые образования изменяются со временем, если течение не является безвихревым?

Исследованию вихревых свойств идеальной жидкости уделяли внимание такие ученые как Томсон (1824–1907, с 1892 г. лорд Кельвин) и Гельмгольц (1821–1894). Ими был доказан ряд теорем, которые позволили ответить на сформулированные выше вопросы, имеющие важное значение для развития гидроаэромеханики. При этом не рассматривалось уравнение энергии.

Процессам переноса энергии и их влиянию на вихревые свойства жидкости в то время не уделялось серьезного внимания. Настоящая работа посвящена исследованию этого влияния.

1. Вид уравнения энергии и изменение со временем циркуляции скорости по замкнутому контуру. При изучении поля скоростей было введено понятие циркуляции вдоль заданной кривой. Если кривая является замкнутым контуром l, циркуляция имеет вид

$$\Gamma(t) = \oint\limits_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \tag{9}$$

Контур l, состоящий из одних и тех же частиц жидкости, может перемещаться вместе с жидкостью и деформироваться.

Переход в интеграле (9) к переменным Лагранжа позволяет доказать соотношение

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint\limits_l \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r}.$$

Согласно уравнению Эйлера (2), можем записать

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint\limits_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint\limits_l \frac{1}{\varrho}\mathbf{\nabla}p \cdot d\mathbf{r}. \tag{10}$$

Так как интегралы в формуле (10) вычисляются в фиксированный момент времени, $\boldsymbol{\nabla} p \cdot d\mathbf{r} = dp$. Поэтому в консервативном поле массовых сил, когда $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$ и $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dU$, будем иметь (см. [4])

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint\limits_{l} dU - \oint\limits_{l} \frac{dp}{\varrho} = -\oint\limits_{l} \frac{dp}{\varrho}. \tag{11}$$

Если жидкость является баротропной и справедливо равенство (6), то можно ввести в рассмотрение функцию

$$P(p) = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dx}{\Phi(x)},$$

дифференциал которой dP равен dp/ϱ. В этих условиях

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \tag{12}$$

Равенство (12) составляет содержание теоремы Томсона, которую можно формулировать следующим образом: *При движении идеальной баротропной жидкости в консервативном поле массовых сил циркуляция скорости по любому замкнутому жидкому контуру не зависит от времени* [5].

При изучении вихревых свойств идеальной жидкости наиболее важные результаты были получены именно на основе теоремы Томсона.

Можно показать, что переход от соотношения (11) к равенству (12) возможен и в случае, когда при адиабатическом течении идеальной жидкости она изначально не является баротропной.

Действительно, уравнение энергии (3) с учетом уравнения неразрывности (1) может быть переписано в виде

$$\frac{dE}{dt} - \frac{p}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{dt} = 0. \tag{13}$$

Вводя в рассмотрение удельное теплосодержание

$$H = E + \frac{p}{\varrho} \tag{14}$$

и добавляя в обе части равенства (13) слагаемое $(1/\varrho)\, dp/dt$, получим уравнение

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dt}, \tag{15}$$

эквивалентное соотношению

$$dH = \frac{1}{\varrho} dp. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (11), приходим к равенству (12).

В этих условиях можно сформулировать следующую теорему: *При адиабатическом течении идеальной жидкости в консервативном поле массовых сил циркуляция скорости по любому замкнутому жидкому контуру не зависит от времени.*

2. Вихревые свойства адиабатических течений идеальной жидкости. Для решения многих задач необходимо найти поток вихря скорости через какие-то поверхности. Для его определения можно использовать формулу Стокса [4]

$$\iint\limits_S \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n} dS = \oint\limits_l \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma.$$

Применение формулы Стокса позволило получить целый ряд следствий теоремы Томсона. Одно из них является столь важным, что его можно сформулировать как самостоятельную теорему, обычно называемую теоремой Лагранжа (1736–1813): *Если в некоторый момент времени t_0 в рассматриваемой массе идеальной баротропной жидкости, находящейся в консервативном поле массовых сил, нет вихрей, то их не было там в предыдущие и не будет в последующие моменты времени.*

Согласно теореме, приведенной в конце предыдущего раздела, теорему Лагранжа можно формулировать иначе: *Если в какой-то момент времени t_0 в идеальной жидкости, которая движется адиабатически в консервативном поле сил, нет вихрей, то их не было там в предыдущие и не будет в последующие моменты времени.*

Эта теорема, как и теорема Лагранжа, дает ответ на первый вопрос, который возникает при исследовании безвихревых течений жидкости.

В связи с этим, можно остановиться на выводе интеграла Лагранжа.

При безвихревом движении идельаной жидкости в консервативном поле массовых сил уравнение Эйлера (2) может быть записано в виде (см., например, [1])

$$\boldsymbol{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \frac{v^2}{2} = -\boldsymbol{\nabla} U - \frac{1}{\varrho} \boldsymbol{\nabla} p. \tag{17}$$

Умножая обе части уравнения (17) на произвольное элементарное приращение $d\mathbf{r}$, будем иметь

$$\boldsymbol{\nabla} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U \right) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{\varrho} \boldsymbol{\nabla} p \cdot d\mathbf{r}.$$

Учитывая, что в любой фиксированный момент времени $\boldsymbol{\nabla} \phi \cdot d\mathbf{r} = d\phi$, и используя соотношение (16), справедливое при адиабатических течениях идеальной жидкости, получим

$$d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + H \right) = 0. \tag{18}$$

Равенство (18) означает, что выражение в круглых скобках имеет постоянное значение в любой конкретный момент времени, а значит, интеграл Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + H = f(t). \tag{19}$$

Следует отметить, что при выводе интеграла Лагранжа в форме (19) не требуется баротропность жидкости.

Если течение идеальной жидкости не является безвихревым и вектор $\mathbf{\Omega}$ в какой-то области отличен от нуля, то этот вектор должен удовлетворять уравнению в частных производных, которое было получено Фридманом. В случае движения баротропной жидкости в консервативном поле массовых сил уравнение Фридмана упрощается и переходит в уравнение Гельмгольца (см., например, [1]).

Для этого случая Гельмгольцем были доказаны две теоремы [6]: *о сохранении вихревых линий и постоянстве интенсивностей вихревых трубок. В этих теоремах, как и в теоремах Томсона и Лагранжа, условие баротропности жидкости можно заменить условием адиабатичности исследуемого течения.*

3. Нарушение адиабатичности и аномальные атмосферные явления. Теоремы Томсона, Лагранжа и Гельмгольца были доказаны при определенных предположениях. Подробное исследование того, к чему приводит отказ от каждого из этих предположений, изложено в [1].

В настоящей работе мы постараемся проследить связь нарушения адиабатичности энергетических процессов с вихревой неустойчивостью потоков идеальной жидкости и даже с зарождением ураганов.

Нарушение адиабатичности течений происходит в ситуации, когда жидкость является теплопроводной и/или в ней присутствуют объемные источники энергии. При этом уравнение (3) для удельной энергии имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{p}{\varrho}\mathrm{div}\mathbf{v} + \frac{1}{\varrho}\mathrm{div}\mathbf{q} + \frac{\varepsilon}{\varrho}, \tag{20}$$

где $\mathbf{q}$ — вектор переноса энергии, величина ε соответствует плотности выделения или поглощения энергии жидкостью в единицу времени. В этом случае для удельной энтальпии H получим уравнение

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dt} + \frac{1}{\varrho}\mathrm{div}\mathbf{q} + \frac{\varepsilon}{\varrho}. \tag{21}$$

Когда вместо уравнения (15) имеем (21), соотношение (16) не справедливо. Соответственно, интеграл в правой части равенства (11) будет отличен от нуля. Следовательно, циркуляция скорости Γ может изменяться со временем. Не выполнено основное соотношение, на основе которого были доказаны теорема Лагранжа о безвихревых течениях и теоремы Гельмгольца о сохранении вихрей.

В настоящей работе рассматривается идеальная жидкость, хотя в реальных жидкостях и газах всегда присутствуют касательные напряжения. Ими можно пренебречь и считать жидкость идеальной, если касательные напряжения оказываются много меньше нормальных. То же самое можно сказать и о процессах переноса энергии.

Пренебрежение касательными напряжениями часто позволяет с той же степенью пренебречь процессами теплопроводности. Однако в природе наблюдаются ситуации, когда в некоторой области, имеющей малую пространственную протяженность, возникают высокие градиенты температуры. При этом вектор потока энергии, который согласно закону Фурье пропорционален градиенту температуры, может возрасти до такой степени, что в уравнении (20) уже нельзя пренебречь слагаемым $(1/\varrho)\,\mathrm{div}\mathbf{q}$.

Объемные источники энергии могут появиться за счет некоторых физико-химических и электрических процессов, при которых происходит превращение одних видов энергии в другие.

Данные о зарождении и развитии таких опасных атмосферных явлений, как смерчи, торнадо и тропические циклоны (см., например, [7–9]), свидетельствуют о том, что их появление в большинстве случаев связано с формированием больших градиентов температур в горизонтальном и, особенно, в вертикальном направлениях, когда воздух нагревается снизу и охлаждается сверху. Дальнейшее развитие урагана, как правило, связано с постоянным притоком энергии. Такие источники появляются за счет конденсации паров воды и процессов ионизации при образовании облачных валов.

Таким образом, одной из основных причин возникновения вихрей и создания вихревой неустойчивости является нарушение адиабатичности течений идеальной жидкости. Процессы переноса энергии при высоких градиентах температуры и источники энергии, которые появляются за счет физико-химических и межфазовых процессов, сопровождающих перемещение воздушных масс, могут привести к появлению целого ряда аномальных атмосферных явлений, имеющих драматические последствия.

Заключение. Исследование вихревых свойств идеальной жидкости, проведенное с учетом не только уравнений неразрывности и движения, но и уравнения энергии, позволяет сделать вывод о том, что теоремы Томсона, Лагранжа и Гельмгольца справедливы при любых адиабатических течениях идеальной жидкости в консервативном поле массовых сил. Этот вывод позволяет расширить область действия соответствующих теорем и упростить вывод интеграла Лагранжа. Кроме того, он позволяет объяснить, почему образование и развитие таких явлений, как смерчи, торнадо и тропические циклоны, связано с возникновением больших градиентов температуры и объемных источников энергии.

Литература

1. *Валландер С. В.* Лекции по гидроаэромеханике. 2-е изд. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. 304 с.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. Я., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: ГИФМЛ, Ч. I. 1963. 584 с.
3. *Эглит М. Э.* Лекции по основам механики сплошных сред. 4-е изд. М.: Изд-во МГУ, 2012. 208 с.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. СПб.: Изд-во «Лань», 2009. 656 с.
5. *Thomson W.* On Vortex Motion // Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. 25. Issue 1. 1868. P. 217–260.
6. *Helmholtz H.* Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. Reine Angew. Math. 1858. Vol. 55. P. 25–55. Reprinted in: Wissenschaftliche Abhandlungen von Hermann Helmholtz, Leipzig: Barth, 1882, I. P. 101–134.
7. *Скорер Р.* Аэрогидродинамика окружающей среды. М.: Мир, 1980. 550 с.
8. *Наливкин Д. В.* Смерчи. М.: Наука, 1984. 111 с.
9. *Петров Д. А., Цибаров В. А.* Предельная модель влажного торнадо // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 2. 2010. С. 45–54.

Статья поступила в редакцию 26 марта 2015 г.

Сведения об авторах

Рыдалевская Мария Александровна — доктор физико-математических наук, профессор; Rydalevska@rambler.ru

Ворошилова Юлия Николаевна — кандидат физико-математических наук, доцент; yulyavoroshilova@yandex.ru

INFLUENCE OF TRANSPORT PROCESSES, GENERATION AND ABSORPTION OF ENERGY ON VORTEX PROPERTIES IN IDEAL FLUIDS

Maria A. Rydalevskaya, Yulia N. Voroshilova

St.Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St.Petersburg, 199034, Russian Federation; Rydalevska@rambler.ru, yulyavoroshilova@yandex.ru

The vortex properties of ideal fluid flows are considered. It is shown that the proposition about its barotropy can be replaced by the proposition about adiabaticity of flow being investigated in classical theorems. It has been possible to follow the connection between formation and evolution of abnormal atmospheric phenomena and significant breaking down of adiabaticity during movement of air mass. Refs 9.

Keywords: ideal fluid, vortex properties, adiabaticity of flow.

References

1. Vallander S. V., *Lectures on hydroaeromechanics*, 2nd ed. (St. Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2005, 304 p.) [in Russian].

2. Kochin N. E., Kibel' I. Ya., Rose N. V., *Theoretical hydromechanics* (GIFML, Moscow, Part I, 1963, 584 p.) [in Russian].

3. Eglit M. E., *Lectures on basis of continuum mechanics*, 4th ed. (Moscow Univ. Press, Moscow, 2012, 208 p.) [in Russian].

4. Fihtengolts G. M., *Course of differential and integral calculus*, **3** (Lan', St. Petersburg, 2009, 656 p.) [in Russian].

5. Thomson W., "On Vortex Motion", *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* **25**(1), 217–260 (1868).

6. Helmholtz H., "Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen", *J. Reine Angew. Math.* **55**, 25–55 (1858). Reprinted in: *Wissenschaftliche Abhandlungen von Hermann Helmholtz* (Leipzig, Barth, 1882, I, 101–134).

7. Skorer R., *Medium aerodynamics* (Mir, Moscow, 1980, 550 p.) [in Russian].

8. Nalivkin D. V., *Atmospheric vortex* (Nauka, Moscow, 1984, 111 p.) [in Russian].

9. Petrov D. A., Tsibarov V. A., "The limit model of humid tornado", *Vestn. S.-Peterb. Univ. Ser. 1* Issue 2, 45–54 (2010) [in Russian].