

## О несимметричной форме потери устойчивости неоднородных круглых пластин\*

*С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. О несимметричной форме потери устойчивости неоднородных круглых пластин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 2. С. 204–211. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.201>

В работе обсуждается устойчивость осесимметричных форм равновесия неоднородных круглых пластин, нагруженных нормальным давлением, с упруго закрепленным краем. Полагая, что несимметричная составляющая решения носит периодический характер, численным методом определяется наименьшее значение нагрузки, при которой происходит бифуркация в несимметричное состояние. Исследовано влияние степени неоднородности материала и условий закрепления края на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости. Показано, что с увеличением жесткости заделки, ограничивающей перемещение края пластины в радиальном направлении, появление несимметричных форм равновесия может происходить при существенно больших нагрузках и с образованием большего числа волн в окружном направлении. Увеличение модуля упругости пластины к краю приводит к увеличению критической нагрузки, при этом число волн в форме потери устойчивости не изменяется по сравнению с однородной пластиной. При уменьшении модуля упругости к краю пластины критическая нагрузка снижается при слабых ограничениях на радиальные перемещения пластины.

*Ключевые слова:* круглая пластина, потеря устойчивости, неоднородность.

**1. Введение.** Устойчивость симметричных форм равновесия круглых пластин, пологих сферических, эллипсоидальных или тороидальных оболочек, нагруженных нормально распределенным давлением, обсуждалась многими авторами [1–4]. Д. Ю. Панов и В. И. Феодосьев первыми вычислили значение нагрузки, при которой по краю круглой пластины, нагруженной нормальным давлением, могут образоваться складки [3]. Они аппроксимировали неосесимметричный прогиб пластины выражением  $w(r, \theta) = (1 - (r/R)^2)^2 (A + B(r/R)^4 \cos n\theta)$ , где  $r, \theta$  — координаты срединной поверхности пластины,  $A, B$  — неизвестные константы,  $n \geq 2$ , и с помощью метода Галеркина нашли минимальное значение нагрузки и волновое число  $n$ . Позже В. И. Феодосьев показал, что использования двух параметров для описания докритического состояния пластины или оболочки недостаточно [5]. Отмечается, что точность описания докритического состояния может повлиять на вычисление значений критической нагрузки и формы потери устойчивости [2, 4]. Строгое доказательство существования и единственности решения, соответствующего несим-

\*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00208 и с использованием оборудования ресурсного центра Научного парка СПбГУ «Обсерватория экологической безопасности».

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

метричным формам равновесия у симметрично нагруженной пластины, принадлежит Н. Ф. Морозову [6] и В. Пехоцки (W. Piechocki) [7]. Авторы работы [4], сравнивая свои решения с результатами Д. Ю. Панова и В. И. Феодосьева, подчеркивают, что аппроксимация неосесимметричного решения, принятая в [3], недостаточно точно описывает устойчивое закритическое состояние равновесия. Сравнение значений критической нагрузки, при которой пластина переходит в неосесимметричное состояние равновесия, найденных численным и асимптотическим методами, проведено в работе [8]. Задача о потере устойчивости симметричных форм равновесия неоднородных круглых пластин и пологих сферических оболочек рассматривалась в работах [9, 10]. Роль граничных условий в появлении несимметричных форм равновесия у пологой оболочки изучалась в [11].

В настоящей работе обсуждается появление несимметричных форм равновесия у круглой пластины, модуль упругости которой увеличивается к краю. Проводится оценка влияния условий закрепления на форму потери устойчивости пластины.

**2. Постановка и метод решения задачи.** Рассмотрим круглую изотропную пластину радиуса  $R$ , нагруженную равномерно распределенным внешним нормальным давлением. Полагая, что модуль упругости оболочки  $E$  меняется при удалении от центра пластины к ее краю, выпишем разрешающую систему уравнений в виде [9]

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w + D'L_1^+(w) + D''L_2^+(w) &= p + L(w, F), \\ \Delta\Delta F/E + (1/E)'L_1^-(F) + (1/E)''L_2^-(F) &= -hL(w, w)/2, \\ ( )' &= \partial( )/\partial r, \quad ( \dot{ } ) = \partial( )/\partial \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $r, \theta$  — полярные координаты,  $w(r, \theta), F(r, \theta)$  — искомые функции нормального прогиба и усилий,  $p$  — нормальное внешнее давление,  $D(r) = E(r)h^3/12(1 - \nu^2)$  — цилиндрическая жесткость пластины,  $\Delta$  — оператор Лапласа, записанный в цилиндрических координатах,  $L, L_i^\pm (i = 1, 2)$  — дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} L(x, y) &= x''(y'/r + \ddot{y}/r^2) + y''(x'/r + \ddot{x}/r^2) - 2(\dot{x}/r)'(\dot{y}/r)', \\ L_1^\pm(y) &= 2y''' + (2 \pm \nu)y''/r + 2(\ddot{y})'/r^2 - y'/r^2 - 3\ddot{y}/r^3, \\ L_2^\pm(y) &= y'' \pm \nu(y'/r + \ddot{y}/r^2). \end{aligned}$$

Жестко заделанному краю соответствуют условия  $u = v = w = w' = 0$ , а если точки края могут свободно смещаться в радиальном и окружном направлениях, то граничные условия принимают вид  $w = w' = T_r = S = 0$ . Здесь  $u, v$  — проекции вектора перемещения на оси  $r, \theta$ ;  $T_r, S$  — тангенциальные усилия. Мы полагаем, что край пластины  $r = R$  закреплен от смещения в направлении нормали к срединной поверхности и от поворотов, т. е.  $w = w' = 0$ , точки края могут свободно смещаться в окружном направлении ( $S = 0$ ), и на краю пластины имеется упругая связь, препятствующая ее свободному смещению в радиальном направлении. Считая, что перемещение и усилие на внешнем крае взаимосвязаны, т. е.  $k_u u + T_r = 0$ , где  $k_u$  — коэффициент упругости заделки, выпишем граничные условия на краю  $r = R$ :

$$w = w' = k_u u + T_r = S = 0. \quad (2)$$

Компоненту вектора перемещения  $u$  можно выразить через усилия  $T_r, T_\theta, S$ , используя представление компонент деформации  $\varepsilon_e, \varepsilon_\theta, \omega$  через компоненты вектора

перемещения и усилия. Принимая во внимание, что на краю пластины  $w = w' = 0$ , получаем

$$\frac{u}{r^2} + \frac{\ddot{u}}{r^2} = \frac{T_r - \nu T_\theta}{E(r)hr} - \left( \frac{T_\theta - \nu T_r}{E(r)h} \right)' + \frac{2(1 + \nu)}{E(r)h} T_r'. \quad (3)$$

Подставляя в (3) соотношения, связывающие усилия  $T_r$ ,  $T_\theta$ ,  $S$  и функцию  $F(r, \theta)$ , получим запись граничного условия (2) через искомые функции  $w$ ,  $F$ .

После введения безразмерных переменных

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad w^* = \beta \frac{w}{h}, \quad u^* = \beta^2 \frac{R}{h^2} u, \quad p^* = \beta^3 \frac{PR^4}{E_{av} h^4}, \\ F^* = \beta^2 \frac{F}{E_{av} h^3}, \quad k_u^* = \frac{R}{h E_{av}} k_u, \quad \beta^2 = 12(1 - \nu^2),$$

где  $E_{av}$  — среднее значение модуля упругости пластины:

$$E_{av} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R E(r) r dr d\theta, \quad E(r) = E_0 f(r),$$

и  $f(r)$  — достаточно гладкая функция, система уравнений (1) примет вид (здесь обозначение \* опускается):

$$g_1(r) \Delta \Delta w + g_1'(r) L_1^+(w) + g_1''(r) L_2^+(w) = P + L(w, F), \\ g_2(r) \Delta \Delta F + g_2'(r) L_1^-(F) + g_2''(r) L_2^-(F) = -L(w, w)/2, \quad (4) \\ g_1(r) = E_0 f(r)/E_{av}, \quad g_2(r) = 1/g_1(r).$$

При малых значениях нагрузки система (4), дополненная необходимыми граничными условиями, имеет только симметричное решение. Для определения несимметричной формы потери устойчивости представим решение в виде  $w(r, \theta) = w_0(r) + w_n(r) \cos(n\theta)$ ,  $F(r, \theta) = F_0(r) + F_n(r) \cos(n\theta)$ , где  $w_0(r)$ ,  $F_0(r)$  определяют докритическое симметричное решение, а функции  $w_{ns}(r, \theta) = w_n(r) \cos(n\theta)$ ,  $F_{ns}(r, \theta) = F_n(r) \cos(n\theta)$  описывают поведение пластины сразу после ее перехода в неосесимметричное состояние,  $n$  — число волн в окружном направлении, образовавшихся в результате бифуркации.

Докритическое состояние пластины описывается системой

$$g_1 \left( \Theta_0'' + \frac{\Theta_0'}{r} - \frac{\Theta_0}{r^2} \right) + g_1' \left( \Theta_0' + \nu \frac{\Theta_0}{r} \right) = \frac{Pr}{2} + \frac{\Theta_0 \Phi_0}{r}, \quad (5) \\ g_2 \left( \Phi_0'' + \frac{\Phi_0'}{r} - \frac{\Phi_0}{r^2} \right) + g_2' \left( \Phi_0' - \nu \frac{\Phi_0}{r} \right) = -\frac{\Theta_0^2}{2r},$$

где  $\Theta_0 = \Theta_0(r) = w_0'(r)$  и  $\Phi_0 = \Phi_0(r) = F_0'(r)$ .

Граничные условия (2) на внешнем крае пластины необходимо дополнить условиями ограниченности решений в центре:  $w' = F' = 0$ . Тогда имеем

$$\Theta_0 = k_u g_2 (\Phi_0' - \nu \Phi_0) + \Phi_0 = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad (6) \\ \Theta_0 = \Phi_0 = 0 \quad \text{при } r = 0.$$

Разрешающую систему для несимметричных составляющих функций прогиба  $w_n$  и усилий  $F_n$  можно получить после подстановки выражений для  $w(r, \theta)$ ,  $F(r, \theta)$  в систему (4) и ее линеаризации относительно малых функций  $w_n(r)$ ,  $F_n(r)$ :

$$g_1 \Delta_n \Delta_n w_n + g_1' L_{1n}^+(w_n) + g_1'' L_{2n}^+(w_n) = \Theta_0' \left( \frac{F_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} F_n \right) - \Phi_0' \left( \frac{w_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) + \frac{w_n''}{r} \Phi_0 + \frac{F_n''}{r} \Theta_0, \quad (7)$$

$$g_2 \Delta_n \Delta_n F_n + g_2' L_{2n}^-(F_n) + g_2'' L_{2n}^-(F_n) = -\frac{w_n''}{r} \Theta_0 - \Theta_0' \left( \frac{w_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right),$$

где  $\Delta_n = d^2/dr^2 + r^{-1}d/dr - n^2/r^2$ ,

$$L_1^\pm(y) = 2y''' + \frac{2 \pm \nu}{r} y'' - \frac{2n^2 + 1}{r^2} \dot{y} + \frac{3n^2}{r^3} \ddot{y}, \quad L_2^\pm(y) = y'' \pm \nu \left( \frac{y'}{r} - \frac{n^2}{r^2} \dot{y} \right).$$

Граничные условия (2) примут вид

$$\begin{aligned} w_n'(0) = F_n'(0) = w_n(1) = w_n'(1) = 0, \\ k_u u_n(1) + F_n'(1) - n^2 F_n(1) = F_n'(1) - F_n(1) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где несимметричная составляющая перемещения  $u_n(r)$  связана на границе  $r = 1$  соотношением

$$u_n = \frac{1}{n^2 - 1} (g_2(F_n'''' - ((2 + \nu)n^2 + 1 - \nu)F_n' + 3n^2 F_n) + g_2'(F_n'' - \nu(F_n' - n^2 F_n))).$$

Метод решения задачи изложен в работах [4, 10]. Сначала решается симметричная задача, а далее проверяется существование решения несимметричной задачи. Обозначим за  $p_n$  нагрузку, при которой для заданного числа волн в окружном направлении существуют отличные от нуля функции  $w_n$ ,  $F_n$ . Тогда критическая нагрузка  $p_{cr}$  равна  $\min_n p_n$ , т.е. наименьшему значению нагрузки  $p_n$ , при которой появляются волны в окружном направлении.

**3. Результаты и их обсуждение.** Бифуркация симметрично нагруженной пластины в неосесимметричное состояние возможна при появлении сжимающих напряжений в окрестности края пластины [6]. Изменение интенсивности безразмерных окружных усилий  $T_r(r)$  при изменении коэффициента жесткости упругой связи  $k_u$  показано на рис. 1. Увеличение жесткости пружины  $k_u$ , препятствующей смещению точек края пластины в радиальном направлении, влечет за собой снижение интенсивности сжимающих напряжений и уменьшение зоны, в которой эти напряжения принимают отрицательные значения. Для пластины с жестко защемленным краем ( $k_u = \infty$ ) окружные усилия принимают только положительные значения, и переход в неосесимметричное состояние невозможен [4, 8].

Для однородной круглой пластины со свободно смещающимся в радиальном направлении краем ( $k_u = 0$ ) критическая нагрузка и соответствующее ей волновое число ( $p_{cr}^0 = 64453$ ,  $n = 14$ ) найдены, например, в [9]. На рис. 2 приведены зависимости нагрузки  $p_n/p_{cr}^0$  от условий закрепления и от коэффициента неоднородности пластины. Для неоднородных пластин предполагалось, что модуль упругости изменяется по закону  $E(r) = E_0(1 + qr^3)$ . Параметры закона изменения модуля Юнга  $E_0$ ,  $q$

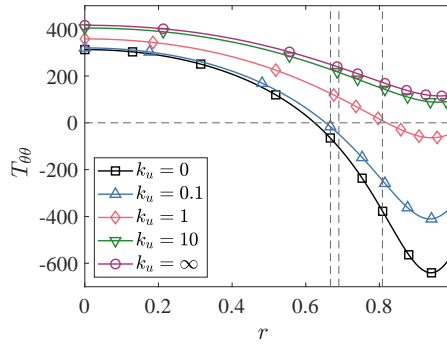


Рис. 1. Безразмерное окружное усилие  $T_\theta(r)$  при различных значениях коэффициента упругой связи  $k_u$ . Здесь  $p = 30000$ ,  $E(r) = E_0(1 - 0.5r^3)$ ,  $\nu = 0.4$ .

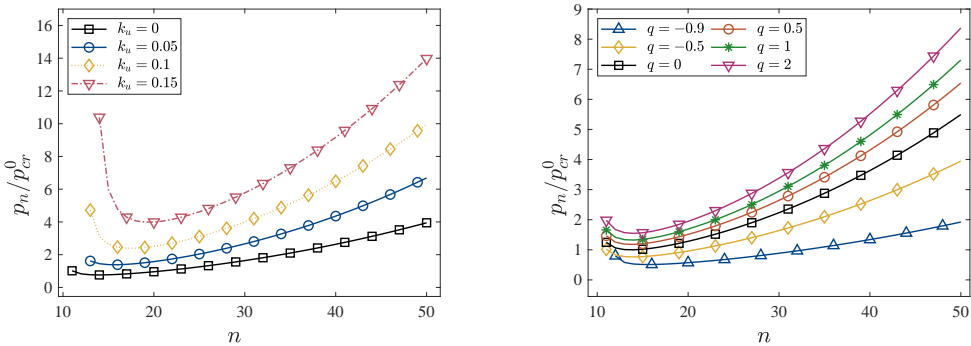


Рис. 2. Зависимость нагрузки  $p_n$  от условий закрепления (слева) и коэффициента неоднородности (справа). Слева — модуль упругости пластины принят  $E(r) = E_0(1 - 0.5r^3)$ . Справа — параметр упругой связи  $k_u = 0$ .  $p_{cr}^0$  — критическая нагрузка для однородной круглой пластины при  $k_u = 0$ .

подбирались так, чтобы среднее значение модуля упругости  $E_{av}$  осталось постоянным. При увеличении жесткости заделки  $k_u$  пластина переходит в несимметричное состояние при более высоких значениях нагрузки и с образованием большего числа волн по краю пластины. Так, при жесткости пружины  $k_u = 0.05$  критическая нагрузка возрастает в 1.63 для однородной пластины, при  $k_u = 0.1$  нагрузка возрастает более чем в 2.5 раза, а число волн увеличивается с 14 до 15 при  $k_u = 0.05$  и 17 при  $k_u = 0.1$ . Аналогично изменяется критическая нагрузка для неоднородных пластин (см. таблицу).

Расчеты значений критической нагрузки для неоднородных пластин представлены на рис. 3 и в таблице. Увеличение модуля упругости пластины к краю приводит к повышению значений нагрузки, при которой происходит переход в несимметричное состояние, по сравнению с однородной пластиной. При этом число волн в форме потери устойчивости не меняется при росте параметра неоднородности. Уменьшение модуля упругости пластины к краю снижает нагрузку, при которой происходит бифуркация в неосесимметричное состояние, только если сопротивление перемещению точек края в радиальном направлении отсутствует ( $k_u = 0$ ) или достаточно

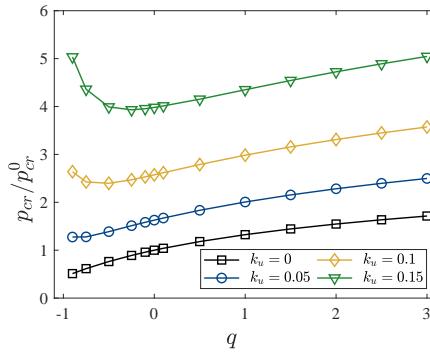


Рис. 3. Зависимость критической нагрузки от коэффициента неоднородности  $q$ . Здесь  $E(r) = 1 + qr^3$ .

слабое ( $k_u = 0.05$ ). Если закрепление края близко к жесткому закреплению и материал пластины ослаблен к краю, появление складок по краю пластины происходит при нагрузках выше, чем для однородной пластины. При этом уменьшение модуля упругости пластины к краю приводит к увеличению числа волн, образующихся при потере осесимметричной формы равновесия. Аналогичные результаты получены в [10] для случая, если модуль упругости убывает к краю по экспоненциальному закону.

**Критическая нагрузка  $p_{cr}/p_{cr}^0$  и волновое число  $n$  для неоднородной пластины**

	$q = -0.9$	$q = -0.5$	$q = 0$	$q = 0.5$	$q = 1$	$q = 2$
$k_u = 0$						
$p_{cr}/p_{cr}^0$	0.51	0.76	1	1.18	1.32	1.55
Число волн, $n$	16	14	14	14	14	14
$k_u = 0.05$						
$p_{cr}/p_{cr}^0$	1.27	1.39	1.63	1.83	2.01	2.28
Число волн, $n$	17	16	15	15	15	15
$k_u = 0.1$						
$p_{cr}/p_{cr}^0$	2.64	2.4	2.57	2.79	2.98	3.31
Число волн, $n$	19	17	17	17	17	17
$k_u = 0.15$						
$p_{cr}/p_{cr}^0$	5.04	3.99	3.98	4.15	4.35	4.72
Число волн, $n$	21	19	19	18	18	18

**4. Заключение.** В работе представлены результаты численного исследования бифуркации осесимметричных форм равновесия неоднородных изотропных круглых пластин при различных условиях закрепления внешнего края. Показано, что с увеличением жесткости заделки, ограничивающей перемещение края пластины в радиальном направлении, появление несимметричных форм равновесия может происходить при существенно больших нагрузках и с образованием большего числа волн в окружном направлении. Увеличение модуля упругости пластины к краю приводит к увеличению критической нагрузки, при этом число волн в форме потери устойчивости не изменяется по сравнению с однородной пластиной. При уменьшении модуля упругости к краю пластины критическая нагрузка снижается при слабых ограничениях на радиальные перемещения пластины.

## Литература

1. Adachi J. *Stresses and buckling in thin domes under internal pressure*. Tech. Rep. MS68-01, U.S. Army Materials and Mechanics Research Center, Watertown (1968).
2. Bushnell D. Buckling of shells-pitfall for designers. *AIAA Journal* **19**, 1183–1226 (2015). <https://doi.org/10.2514/3.60058>
3. Панов Д. Ю., Феодосьев В. И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах. *Прикладная математика и механика* **12**, 389–406 (1948).
4. Cheo L. S., Reiss E. L. Unsymmetric wrinkling of circular plates. *Quarterly of Applied Mathematics* **31** (1), 75–91 (1973). <https://doi.org/10.1090/qam/99710>
5. Feodos'ev V. I. On a method of solution of the nonlinear problems of stability of deformable systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **27** (2), 392–404 (1963). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90008-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90008-X)
6. Морозов Н. Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, нагруженной симметричной нагрузкой. *Известия высших учебных заведений. Математика* **2**, 126–129 (1961).
7. Piechocki W. On the nonlinear theory of thin elastic spherical shells: Nonlinear partial differential equations solutions in theory of thin elastic spherical shells subjected to temperature fields and external loading. *Archiwum mechaniki stosowanej* **21** (1), 81–102 (1969).
8. Coman C. D., Bassom A. P. Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **81**, 8–18 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.12.004>
9. Bauer S. M., Voronkova E. B. Unsymmetrical wrinkling of nonuniform annular plates and spherical caps under internal pressure. In: Altenbach H., Chrosielewski J., Eremeyev V., Wisniewski K. (eds) *Recent Developments in the Theory of Shells*. Advanced Structured Materials, vol. 110, 79–89. Springer, Cham (2019). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_6)
10. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. Влияние условий закрепления на появление несимметричных форм равновесия у круглых пластин под действием нормального давления. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика* **1**, 38–46 (2020). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-38-46>
11. Bauer S. M., Voronkova E. B. On Buckling Behavior of Inhomogeneous Shallow Spherical Caps with Elastically Restrained Edge. In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Muller W. (eds) *Analysis of Shells, Plates, and Beams*. Advanced Structured Materials, vol. 134, 65–74. Springer, Cham (2020). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_4)

Статья поступила в редакцию 15 ноября 2020 г.;  
после доработки 16 декабря 2020 г.;  
рекомендована в печать 17 декабря 2020 г.

### Контактная информация:

Бауэр Светлана Михайловна — д-р физ.-мат. наук, проф.; [s.bauer@spbu.ru](mailto:s.bauer@spbu.ru)  
Воронкова Ева Боруховна — канд. физ.-мат. наук, доц.; [e.voronkova@spbu.ru](mailto:e.voronkova@spbu.ru)

## On non-axisymmetric buckling modes of inhomogeneous circular plates\*

*S. M. Bauer, E. B. Voronkova*

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Bauer S. M., Voronkova E. B. On non-axisymmetric buckling modes of inhomogeneous circular plates. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 2, pp. 204–211. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.201> (In Russian)

---

\*The work was carried out with the support of the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 19-01-00208) and using the equipment of the resource center of the St. Petersburg State University Scientific Park “Observatory of Environmental Safety”.

Unsymmetrical buckling of nonuniform circular plates with elastically restrained edge and subjected to normal pressure is studied in this paper. The asymmetric part of the solution is sought in terms of multiples of the harmonics of the angular coordinate. A numerical method is employed to obtain the lowest load value at which waves in the circumferential direction can appear. The effect of material heterogeneity and boundary on the buckling load is examined. For a plate with elastically restrained edge, the buckling pressure and mode number increase with a rise of spring stiffness. Increasing of the elasticity modulus to the plate edge leads to increasing of the buckling pressure, but the mode number does not change. If the translational flexibility coefficient is small, decreasing of the elasticity modulus to the shell (plate) edge leads to sufficient lowering of the buckling pressure.

*Keywords:* circular plate, buckling, heterogeneity.

## References

1. Adachi J. *Stresses and buckling in thin domes under internal pressure*. Tech. Rep. MS68-01, U.S. Army Materials and Mechanics Research Center, Watertown (1968).
2. Bushnell D. Buckling of shells-pitfall for designers. *AIAA Journal* **19**, 1183–1226 (2015). <https://doi.org/10.2514/3.60058>
3. Panov D. Y., Feodosiev V. I. On the equilibrium and loss of stability of shallow shells in the case of large displacement. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **12**, 389–406 (1948). (In Russian)
4. Cheo L. S., Reiss E. L. Unsymmetric wrinkling of circular plates. *Quarterly of Applied Mathematics* **31** (1), 75–91 (1973). <https://doi.org/10.1090/qam/99710>
5. Feodos'ev V. I. On a method of solution of the nonlinear problems of stability of deformable systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **27** (2), 392–404 (1963). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90008-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90008-X)
6. Morozov N. F. On the existence of a non-symmetric solution in the problem of large deflections of a circular plate with a symmetric load. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika* **2**, 126–129 (1961). (In Russian)
7. Piechocki W. On the nonlinear theory of thin elastic spherical shells: Nonlinear partial differential equations solutions in theory of thin elastic spherical shells subjected to temperature fields and external loading. *Archiwum mechaniki stosowanej* **21** (1), 81–102 (1969).
8. Coman C. D., Bassom A. P. Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **81**, 8–18 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.12.004>
9. Bauer S. M., Voronkova E. B. Unsymmetrical wrinkling of nonuniform annular plates and spherical caps under internal pressure. In: Altenbach H., Chrosielewski J., Eremeyev V., Wisniewski K. (eds) *Recent Developments in the Theory of Shells*. Advanced Structured Materials, vol. 110, 79–89. Springer, Cham (2019). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_6)
10. Bauer S. M., Voronkova E. B. Influence of boundary constraints on the appearance of asymmetrical equilibrium states in circular plates under normal pressure. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics* **1**, 38–46 (2020). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-38-46> (In Russian)
11. Bauer S. M., Voronkova E. B. On Buckling Behavior of Inhomogeneous Shallow Spherical Caps with Elastically Restrained Edge. In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Muller W. (eds) *Analysis of Shells, Plates, and Beams*. Advanced Structured Materials, vol. 134, 65–74. Springer, Cham (2020). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_4)

Received: November 15, 2020

Revised: December 16, 2020

Accepted: December 17, 2020

## Authors' information:

Svetlana M. Bauer — [s.bauer@spbu.ru](mailto:s.bauer@spbu.ru)

Eva B. Voronkova — [e.voronkova@spbu.ru](mailto:e.voronkova@spbu.ru)