

## Частоты собственных колебаний неоднородной квадратной тонкой пластины\*

*Г. П. Васильев, А. Л. Смирнов*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Васильев Г. П., Смирнов А. Л.* Частоты собственных колебаний неоднородной квадратной тонкой пластины // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 2. С. 212–219. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.202>

Целью исследования является анализ влияния неоднородности на собственные поперечные колебания квадратных тонких пластин при помощи асимптотических методов, когда толщину или/и жесткость пластины можно считать почти постоянными. Результаты расчетов по асимптотическим формулам, определенных с помощью метода возмущений, сравниваются с численными результатами, полученными по методу конечных элементов в пакете COMSOL.

*Ключевые слова:* собственные колебания пластин, неоднородная квадратная пластина, метод возмущений.

**1. Введение.** Строение спектра собственных поперечных колебаний изотропных и однородных прямоугольных пластин при различных краевых условиях является хорошо изученной задачей. Список работ по этой теме обширен, систематизированный обзор результатов исследований приведен в [1].

Колебаниям неоднородных прямоугольных пластин также посвящено большое число работ. Так, в статье [2] влияние неоднородности на колебания прямоугольных тонких пластин с линейно изменяющейся толщиной вдоль одного направления исследовано при различных граничных условиях с помощью метода Рэлея — Ритца с использованием двумерных граничных характеристических ортогональных многочленов. При этом у рассматриваемых пластин неоднородность была также связана с линейными изменениями модуля Юнга и плотности материала. В работе [3] для решения задач о собственных колебаниях прямоугольных пластин переменной толщины при сложных граничных условиях использовался численно-аналитический метод сплайн-коллокации в сочетании с методом дискретной ортогонализации. В статье [4] простой алгоритм, основанный на методе Ритца и выражении основной функции смещения через полиномиальную функцию координат, которая приблизительно удовлетворяет существенным (геометрическим) граничным условиям, позволил получить фундаментальную собственную частоту для прямоугольной пластины с билинейным изменением толщины.

По-видимому, одной из первых работ, в которой для исследования колебаний прямоугольных пластин с переменной толщиной использовался метод конечных элементов, была статья [5], в которой найдены собственные частоты и формы колебаний

---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 18-01-00832-а и № 19-01-00208-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

прямоугольных консольных пластин с линейно переменной толщиной. В статье [6] для различных комбинаций граничных условий проведено сравнение собственных частот поперечных колебаний прямоугольных тонких пластин с переменной толщиной, полученных разными методами: методом Рэлея — Ритца с использованием разных функций формы, оптимизированного метода Канторовича и метода конечных элементов. В исследовании [7] поперечные колебания прямоугольной пластины при различных граничных условиях были исследованы в предположении, что толщина представляет собой произведение двух линейных функций  $h(x, y) = h_1(x)h_2(y)$ . Последовательные приближения были найдены при помощи метода Рэлея — Ритца с использованием базисных функций, удовлетворяющих существенным (геометрическим) граничным условиям.

При анализе изгибных колебаний прямоугольных пластин со средней, медленно меняющейся толщиной метод возмущений использовался в работе [8], где были получены в явном виде приближенные формулы для частот свободных колебаний при произвольных функциях толщины. В статье [9] предложен метод смешанной граничной сетки (FBGM) для анализа свободных колебаний консольных пластин переменной толщины. Авторами получены основные дифференциальные уравнения для изгиба пластины, преобразующиеся в интегральные уравнения, численное решение которых выбирается в качестве функции Грина для получения характеристического уравнения собственных частот.

Особый интерес представляют кратные частоты квадратных пластин с одинаковыми условиями закрепления на всех краях. Здесь любое изменение толщины или жесткости вызывает определенную потерю симметрии, и мы можем ожидать расщепления кратных частот. В статье [10] с помощью метода конечных элементов исследованы колебания квадратной пластины с параболически изменяющейся толщиной и заземленными краями. Особое внимание обращается на формы колебаний пластины, которые демонстрируют сочетание радиальной и квадратной симметрии и являются результатом осесимметричного распределения толщины и квадратной симметрии границы.

Целью нашего исследования было получение асимптотических формул, описывающих влияние неоднородности параметров тонкой пластины — толщины или жесткости — на ее собственные частоты. Алгоритм получения таких формул описан, например, в [11]. Настоящая работа продолжает исследования колебаний неоднородных пластин разной формы асимптотическими методами, начатые авторами в [12]. В исследовании полагалось, что параметры пластины, геометрические и физические, являются гладкими функциями координат, постоянны в одном направлении и близки к постоянным в другом.

**2. Уравнения колебаний тонкой квадратной пластины с переменными параметрами.** Уравнения собственных поперечных колебаний прямоугольной тонкой пластины с переменными параметрами (рис. 1) описываются уравнениями

$$\Delta(D\Delta w) - (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \gamma H \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $w = w(x, y, t)$  — прогиб пластины,  $D = D(x, y) = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $H = H(x, y)$  — толщина пластины,  $E = E(x, y)$ ,  $\nu = \nu(x, y)$ ,  $\gamma = \gamma(x, y)$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность ма-

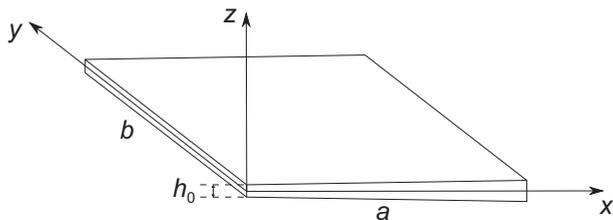


Рис. 1. Прямоугольная пластина с линейно переменной толщиной.

териала пластины,  $x, y, t$  — пространственные координаты и время. В статье рассматриваются пластины, у которых  $\gamma = \text{const}$ ,  $\nu = \text{const}$ . Далее во всех примерах  $\nu = 0.3$ .

Тогда после разделения переменных в виде

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cos(\omega t) \quad (2)$$

и перехода к безразмерным переменным уравнение (1) преобразуется следующим образом:

$$\Delta_k^2 W - (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 d}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 d}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 d}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right) + \lambda^4 h W = 0, \quad (3)$$

где

$$\Delta_k^2 = k^2 (dW''_{\xi\xi})''_{\xi\xi} + (dW''_{\eta\eta})''_{\eta\eta} / k^2 + (dW''_{\xi\xi})''_{\eta\eta} + (dW''_{\eta\eta})''_{\xi\xi},$$

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad k = b/a, \quad d = d(\xi, \eta) = D(\xi, \eta)/D_0,$$

$$h = h(\xi, \eta) = H(\xi, \eta)/h_0, \quad \lambda^4 = \omega^2 \gamma h_0 a^2 b^2 / D_0, \quad D_0 = \frac{E_0 h_0^3}{12(1-\nu^2)},$$

а  $h_0$  и  $E_0$  — характеристические значения толщины и модуля Юнга.

Далее рассматриваются квадратные пластины, для которых  $k = 1$  и  $\Delta_k = \Delta$ . Переменные могут быть разделены только в случае, когда параметры меняются вдоль только одной координаты  $h(\xi, \eta) = h(\xi)$ ,  $E(\xi, \eta) = E(\xi)$ , а по другой координате противоположные стороны пластины шарнирно оперты. При этом решение можно представить в виде  $W(\xi, \eta) = \sin(m\pi\eta)w(\xi)$ , и функция  $w(\xi)$  определяется уравнением

$$\pi^4 m^4 d(\xi) w(\xi) - 2\pi^2 m^2 d(\xi) w''(\xi) + d(\xi) w''''(\xi) - h(\xi) \lambda^4 w(\xi) + d'(\xi) (2w'''(\xi) - 2\pi^2 m^2 w'(\xi)) - d''(\xi) (\pi^2 \nu m^2 w(\xi) + w''(\xi)) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (3) вместе с граничными условиями образует граничную задачу на собственные значения для  $\lambda$ . Далее будут рассмотрены только однородные граничные условия на краях пластины ( $\xi^* = 0$  или  $\xi^* = 1$ ) типа свободного опирания (S) или жесткой заделки (C) в виде

$$(S) : w(\xi^*) = w''(\xi^*) = 0, \quad (C) : w(\xi^*) = w'(\xi^*) = 0. \quad (5)$$

Для сравнения разных приближений для форм колебаний полезно их нормировать, при этом нормированное решение  $W(\xi)$  имеет вид

$$W(\xi) = w(\xi) / \|w(\xi)\|, \quad \|W(\xi)\| = 1, \quad (6)$$

и в линейном приближении по  $\varepsilon$  —

$$W(\xi) = w_0(\xi)/\|w_0(\xi)\| + \frac{w_1(\xi)\|w_0(\xi)\| - 2w_0(\xi)(w_0(\xi) \cdot w_1(\xi))}{\|w_0(\xi)\|^2} \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (7)$$

**3. Собственные частоты колебаний квадратной пластины переменной толщины.** Для исследования частот колебаний квадратной пластины с параметрами жесткости и толщины, близкими к постоянным, применим метод возмущений. Полагаем

$$\begin{aligned} h(\xi) &= 1 + \varepsilon h_1(\xi) + \dots, & E(\xi) &= 1 + \varepsilon E_1(\xi) + \dots, \\ \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots, & w(\xi) &= w_0(r) + \varepsilon w_1(\xi) + \dots, \quad \varepsilon \ll 1. \end{aligned} \quad (8)$$

После подстановки (8) в уравнение (4) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$  получаем серию краевых задач, условием существования решения которой является ортогональность правых частей уравнения решениям  $w_0(\xi)$  [11].

Рассмотрим шарнирно опертую по всем сторонам квадратную пластину переменной толщины, полагая модуль Юнга постоянным,  $E(\xi) = 1$ . Краевая задача в нулевом приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \pi^4 m^4 w_0(\xi) - 2\pi^2 m^2 w_0''(\xi) + w_0''''(\xi) - \lambda_0^4 w_0(\xi) &= 0, \\ w_0(\xi^*) = w_0''(\xi^*) &= 0 \quad \text{при} \quad \xi^* = 0, 1, \end{aligned} \quad (9)$$

и ее решением являются нижеследующие частоты и формы:

$$\lambda_0 = \sqrt{m^2 + n^2} \pi, \quad w_0(\xi) = \sin(n\pi\xi). \quad (10)$$

После подстановки выражений (10) в уравнение первого приближения

$$\pi^4 m^4 w_1(\xi) - \lambda_0^4 w_1(\xi) - 2\pi^2 m^2 w_1''(\xi) + w_1''''(\xi) = F_1(w_0(\xi), \lambda_0) + F_2(w_0(\xi), \lambda_0) \lambda_1, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= 3\pi^2 \nu m^2 w_0(\xi) h_1''(\xi) - 3h_1''(\xi) w_0''(\xi) + 6\pi^2 m^2 h_1'(\xi) w_0'(\xi) - 6w_0'''(\xi) h_1'(\xi) - \\ &\quad - 3\pi^4 m^4 h_1(\xi) w_0(\xi) + 6\pi^2 m^2 h_1(\xi) w_0''(\xi) - 3h_1(\xi) w_0''''(\xi) + \lambda_0^4 h_1(\xi) w_0(\xi), \\ F_2 &= 4\lambda_0^3 w_0(\xi), \end{aligned}$$

потребуем ортогональности его правой части форме  $w_0(x)$ . Вычисляя интегралы, приходим к формуле для первой поправки к частоте,

$$\lambda_1 = - \int_0^1 F_1 w_0(\xi) d\xi / \int_0^1 F_2 w_0(\xi) d\xi. \quad (12)$$

В качестве примеров рассмотрим разные возмущающие функции (см. табл. 1).

В первом случае (линейное увеличение толщины при  $\varepsilon > 0$  или уменьшение при  $\varepsilon < 0$ ) определяющим является увеличение жесткости пластины. Все частоты растут с увеличением  $\varepsilon$  и в первом приближении расщепления кратных частот, т. е. частот  $\lambda_0^{m,n}$  и  $\lambda_0^{n,m}$ , не происходит.

Линейное изменение толщины при сохранении массы пластины (второй случай) не оказывает влияния на частоты в первом приближении. Аналогично в первом

Таблица 1. Возмущающие функции и соответствующие им первые поправки к частотам для пластин с непостоянной толщиной

	$h_1(\xi)$	$\lambda_1$
1	$\xi$	$1/4\sqrt{m^2 + n^2}\pi$
2	$\xi - 1/2$	0
3	$\xi^2$	$\frac{(2\pi^2 m^4 n^2 - 3m^4 + 4\pi^2 m^2 n^4 - 18m^2 \nu n^2 + 12m^2 n^2 + 2\pi^2 n^6 - 3n^4)}{12\pi n^2 (m^2 + n^2)^{3/2}}$

приближении не оказывает влияния на частоты любое возмущение, имеющее вид нечетной функции относительно середины пластины ( $\xi = 1/2$ ).

В случае параболического изменения толщины (третий случай) в первом приближении происходит и сдвиг, и расщепление кратных частот, причем величина расщепления частот такова:

$$\delta = |\lambda_0^{m,n} - \lambda_0^{n,m}| = \left| \frac{(m^2 - n^2)(m^4 + 2(3\nu - 2)m^2 n^2 + n^4)}{4\pi m^2 n^2 (m^2 + n^2)^{3/2}} \right|. \quad (13)$$

Если величины  $n \approx m$  при  $m \rightarrow \infty$ , то  $\delta = O(1/m)$  при  $m \rightarrow \infty$ . Если  $n = m + O(1)$ , то  $\delta = O(1/m^2)$  при  $m \rightarrow \infty$ . Иными словами, чем больше различаются волновые числа  $m$  и  $n$ , тем более заметен эффект расщепления частот.

Для построения решения первого приближения следует подставить значение  $\lambda_1$  в уравнение (11) и решить его с использованием трех из четырех граничных условий вида (S). Четвертое условие будет выполнено автоматически. Аналитические выражения для первых приближений для форм колебаний ( $w_1(\xi)$ ) и вторых поправок для частот ( $\lambda_2$ ) были найдены в пакете Mathematica 11.3.

Поскольку формулы получаются громоздкими, приведем выражения только для форм колебаний с фундаментальной частотой ( $m = n = 1$ ) пластины с параболическим изменением толщины:

$$w_1(\xi) = \frac{2}{\pi} \left( -\pi(\xi + 1) \sin(\pi\xi) + (-\pi^2(\xi - 1)\xi - 1) \cos(\pi\xi) + \cosh\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\right) \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\pi(1 - 2\xi)\right) \right). \quad (14)$$

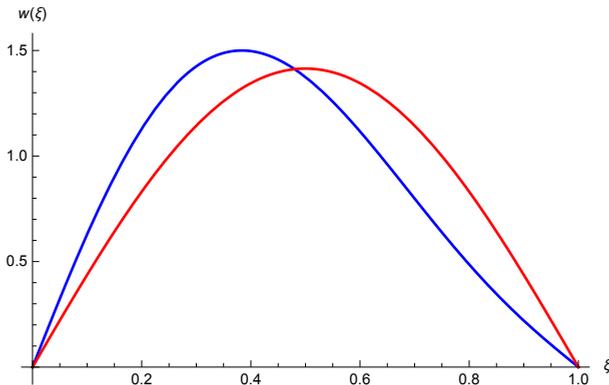


Рис. 2. Первая форма колебаний пластины с постоянной толщиной (красная линия) и с параболическим изменением толщины (синяя линия) при  $\varepsilon = 0.6$ .

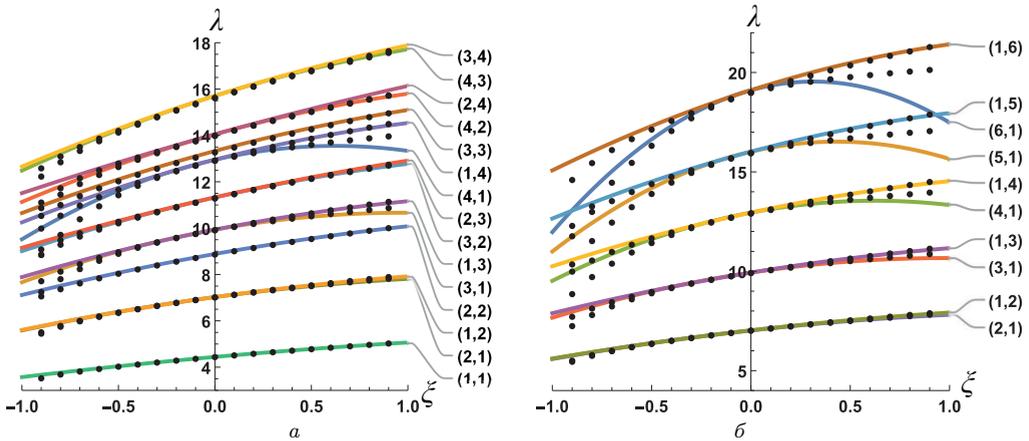


Рис. 3. Зависимость от малого параметра  $\varepsilon$  низших частот (а) и кратных частот вида  $\lambda^{m,1}, \lambda^{1,m}$  (б) для пластины с параболическим изменением толщины.

Для такой пластины указанные формы, нормированные по формулам (7), представлены на рис. 2.

Зависимость низших частот пластины с параболическим изменением толщины от малого параметра  $\varepsilon$  приведена на рис. 3, а, на котором  $(m, n)$  — волновые числа, соответствующие частотам. В указанном диапазоне изменения  $\varepsilon$  все частоты монотонно возрастают с ростом  $\varepsilon$  за исключением частот вида  $\lambda^{m,1}$  при больших значениях  $m$ . Эти частоты имеют максимум при  $\varepsilon = O(1/m^2)$ , при этом с ростом  $m$  точка максимума быстро стремится к 0 (рис. 3, б). На рис. 3 сплошные линии соответствуют значениям частот, вычисленным по асимптотическим формулам, точки — значениям, полученным в конечно-элементном пакете COMSOL Multiphysics 5.4. При малых значениях  $\varepsilon$  асимптотические результаты хорошо согласуются с численными. Однако с ростом значений волновых чисел область применимости асимптотических формул сужается.

**4. Собственные частоты колебаний квадратной пластины переменной жесткости.** Аналогичным образом исследуется влияние переменной жесткости на собственные частоты колебаний пластины. Положим  $h(\xi) = 1$ , а модуль Юнга  $E(\xi)$  будем считать переменным. Значения первых поправок к частотам для тех же типов возмущений, что и рассмотренные ранее, приведены в табл. 2.

Таблица 2. Возмущающие функции и соответствующие им первые поправки к частотам для пластин с непостоянной жесткостью

	$E_1(\xi)$	$\lambda_1$
1	$\xi$	$\frac{1}{8}\pi\sqrt{m^2 + n^2}\pi$
2	$\xi - 1/2$	0
3	$\xi^2$	$\frac{m^4(2\pi^2 n^2 - 3) + 2m^2 n^2(-6\nu + 2\pi^2 n^2 + 3) + n^4(2\pi^2 n^2 - 3)}{24\pi n^2(m^2 + n^2)^{3/2}}$

Влияние, связанное с изменением жесткости, оказывается качественно близким к влиянию изменения толщины, но менее значительным. В качестве примера рас-

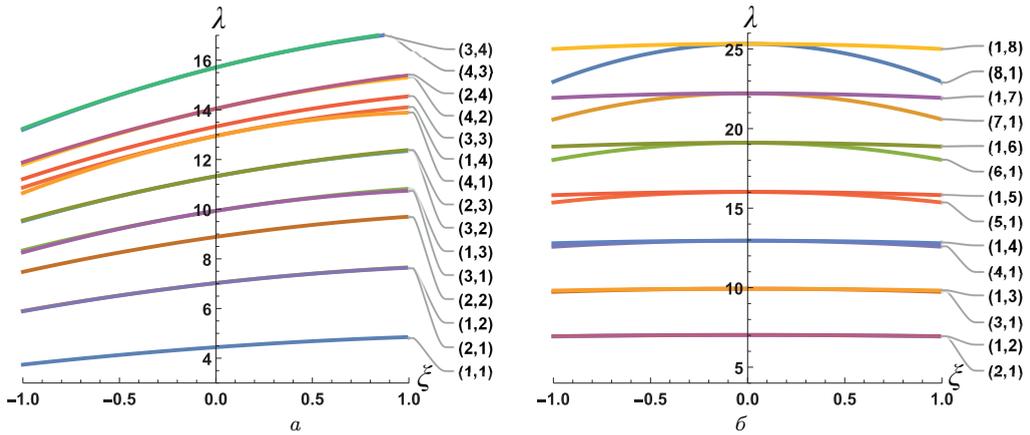


Рис. 4. Зависимость от малого параметра  $\varepsilon$  низших частот для пластины с жесткостью  $E(\xi) = \xi$  (а) и кратных частот вида  $\lambda^{m,1}, \lambda^{1,m}$  для пластины с жесткостью  $E(\xi) = \xi - 1/2$  (б).

смотрим влияние на частоты колебаний пластины линейного изменения жесткости (см. рис. 4).

При  $E(\xi) = \xi$  нижние частоты растут с  $\varepsilon$  и расщепляются слабо. При  $E(\xi) = \xi - 1/2$ , когда средняя жесткость пластины постоянна, все частоты имеют максимум при  $\xi = 0$ . Наиболее сильно расщепление проявляется у частот вида  $\lambda^{m,1}, \lambda^{1,m}$  при  $m > 1$ .

**5. Заключение.** Обнаружено, что если изменения жесткости/толщины линейны по  $\varepsilon$  и координате, то собственные частоты колебаний пластины расщепляются только во втором приближении. Но если параметр изменяется нелинейно по координате, например параболически, то расщепление кратных собственных частот происходит уже в первом приближении. Асимптотические формулы также позволяют определить, какая из двух кратных частот, соответствующих волновым числам  $n$  и  $m$ , изменяется быстрее при изменении малого параметра.

## Литература/References

1. Leissa A. W. *Vibration of plates*. Washington, US Government Printing Office (1969).
2. Roshan L., Yajuvindra K. Transverse Vibrations of Nonhomogeneous Rectangular Plates with Variable Thickness. *Mechanics of Advanced Materials and Structures* **20** (4), 264–275 (2013).
3. Grigorenko A. Ya., Tregubenko T. V. Numerical and experimental analysis of natural vibrations of rectangular plates with variable thickness. *International Applied Mechanics* **36** (2), 268–270 (2000).
4. Gutiérrez R. H., Laura P. A. A., Grossi R. O. Vibrations of rectangular plates of bilinearly varying thickness and with general boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration* **75** (3), 323–328 (1981).
5. Dawe D. J. Vibration of Rectangular Plates of Variable Thickness. *Journal of Mechanical Engineering Science* **8** (1), 42–51 (1966).
6. Bhat R. B., Laura P. A. A., Gutierrez R. G., Cortinez V. H., Sanzi H. C. Numerical experiments on the determination of natural frequencies of transverse vibrations of rectangular plates of non-uniform thickness. *Journal of Sound and Vibration* **138** (2), 205–219 (1990).
7. Singha B., Saxena V. Transverse vibration of a rectangular plate with bidirectional thickness variation. *Journal of Sound and Vibration* **198** (1), 51–65 (1996).
8. Long-Yuan L. Vibration analysis of moderate-thick plates with slowly varying thickness. *Applied Mathematics and Mechanics* **7**, 707–714 (1986).

9. Huang M., Xu Yu, Free B.C. Vibration Analysis of Cantilever Rectangular Plates with Variable Thickness. *Applied Mechanics and Materials* **130–134**, 2774–2777 (2011). <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.130-134.2774>
10. Olson M.D., Hazell C.R. Vibrations of a square plate with parabolically varying thickness. *Journal of Sound and Vibration* **62** (3), 399–410 (1979).
11. Bauer S.M., Filippov S.B., Smirnov A.L., Tovstik P.E., Vaillancourt R. *Asymptotic methods in mechanics of solids*. Basel, Birkhäuser (2015).
12. Vasiliev G.P., Smirnov A.L. Free Vibration Frequencies of a Circular Thin Plate with Variable Parameters. *Vestnik St. Petersburg Univ., Math.* **53** (3), 351–357 (2020).

Статья поступила в редакцию 27 ноября 2020 г.;  
после доработки 16 декабря 2020 г.;  
рекомендована в печать 17 декабря 2020 г.

Контактная информация:

Васильев Григорий Павлович — аспирант; vasiliev.gregory@gmail.com  
Смирнов Андрей Леонидович — доц.; a.l.smirnov@spbu.ru

## Natural frequencies of an inhomogeneous square thin plate\*

G. P. Vasiliev, A. L. Smirnov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Vasiliev G.P., Smirnov A.L. Natural frequencies of an inhomogeneous square thin plate. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 2, pp. 212–219. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.202> (In Russian)

Plates, which geometric and physical parameters slightly differ from constant and depend only on the radial coordinate, are analyzed. For free vibration frequencies of a plate, which thickness and/or Young's modulus depend on the radial coordinate asymptotic formulas are obtained by means of the perturbation method. As examples, free vibrations of a square plate with parameters linearly or parabolically depend on the radial coordinate, are examined. The double frequencies of square plates with similar edge support of all edges are of special interest, since any variation of the thickness or stiffness causes some loss of symmetry one may expect the split of double frequencies. The asymptotic formulas permit to determine, which of two equal unperturbed frequencies corresponding to wave numbers  $n$  and  $m$  increases faster with the small parameter. For a wide range of small parameter values, the asymptotic results for the lower vibration frequencies well agree with the results of finite element analysis with COMSOL Multiphysics 5.4.

*Keywords:* free vibrations of plates, inhomogeneous circular plate, perturbation method.

Received: November 27, 2020

Revised: December 16, 2020

Accepted: December 17, 2020

Authors' information:

Grigoriy P. Vasiliev — vasiliev.gregory@gmail.com  
Andrey L. Smirnov — a.l.smirnov@spbu.ru

---

\*This work is supported in part by Russian Foundation for Basic Research (grants no. 18-01-00832-a, 19-01-00208-a).