

Исследование свободных высокочастотных колебаний неоднородного наностержня на основе нелокальной теории упругости

Г. И. Михасев

Белорусский государственный университет,
Беларусь, 220030, Минск, пр. Независимости, 4

Для цитирования: *Михасев Г. И.* Исследование свободных высокочастотных колебаний неоднородного наностержня на основе нелокальной теории упругости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 2. С. 220–232. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.203>

В статье исследуются свободные высокочастотные продольные колебания неоднородного наноразмерного стержня с позиций нелокальной теории упругости. Изучается верхняя часть спектра с длиной волны, соизмеримой с внутренним характерным размером наностержня. В качестве закона физического состояния используется уравнение в интегральной форме с ядром Гельмгольца, содержащее локальную и нелокальную фазы. Исходное интегро-дифференциальное уравнение сводится к дифференциальному уравнению четвертого порядка с переменными коэффициентами, получена дополнительная пара граничных условий. Решение краевой задачи строится с использованием ВКБ-метода в виде суперпозиции основного решения и интегралов краевого эффекта. В качестве альтернативной рассмотрена однофазная нелокальная дифференциальная модель, позволившая оценить верхнюю часть спектра собственных частот. Для наностержня с переменной площадью поперечного сечения обнаружена сходимость собственных частот, найденных по двум моделям, когда локальная доля в двухфазной модели становится исчезающе малой.

Ключевые слова: наноразмерный неоднородный стержень, высокочастотные колебания, двухфазная нелокальная теория упругости, асимптотический метод.

1. Введение. Как известно, классическая теория упругости не позволяет исследовать верхнюю часть спектра собственных колебаний упругого микро/наноразмерного тела, так как не учитывает его дискретную структуру. Использование же современных методов молекулярной динамики сопряжено с чрезвычайно большими затратами вычислительных ресурсов при учете размеров даже одномерных (1D) нанообъектов, таких как нанобалки и наностержни [1]. Альтернативными подходами к исследованию динамики упругих наноразмерных 1D-объектов являются теории и модели, в основе которых лежит гипотеза непрерывности среды с одновременным учетом характерных свойств дискретной структуры (см. в обзорной статье [2]). Одной из таких теорий является нелокальная теория упругости, идеи которой были впервые сформулированы Крёнером (Kröner) в 1967 г. и И. А. Куниным в 1968 г., а затем окончательно обобщены в работах Эрингена (например, см. [3]). В соответствии с данной теорией, получившей название нелокальной теории упругости Эрингена, напряжение в точке среды зависит от деформаций во всех ее точках.

В рамках данной теории следует различать две модели: однофазная нелокальная интегральная (ОФНИ) модель (иначе называемая чисто нелокальной теорией упругости) и двухфазная нелокальная интегральная (ДФНИ) модель [3]. ДФНИ модель представляет собой сочетание классической теории упругости и ОФНИ модели посредством введения объемных долей ξ_1 и $\xi_2 = 1 - \xi_1$ локальной (классической) и нелокальной фаз соответственно. Использование любой из данных моделей приводит к интегро-дифференциальным уравнениям. Поэтому при решении прикладных инженерных задач чаще используют так называемые эквивалентные дифференциальные нелокальные (ЭДН) модели, предложенные Эрингеном для определенного типа ядер в законе физического состояния [3]. Корректное использование данных ЭДН моделей позволило обнаружить ряд новых механических эффектов, таких как увеличение прогиба и снижение собственных частот и критических нагрузок нелокально упругих балок, пластин и оболочек по сравнению с результатами, определяемыми в рамках классической теории упругости. Вместе с тем их применение к исследованию поведения консольной наноразмерной балки привело к противоречивым результатам, заключающимся в отсутствии какого-либо нелокального эффекта. Укажем также и на некорректное применение ЭДН моделей в ряде работ (например, см. [4, 5]), в которых граничные условия для свободного или шарнирно опертого края записываются в терминах классических (макроскопических) напряжений, что приводит к существенным ошибкам для весьма коротких наноразмерных стержней и балок. Отметим также работу [6], авторы которой показывают, что ОФНИ модель приводит к некорректным задачам для «эквивалентного» дифференциального уравнения, и на этом основании заключают, что исходная ОФНИ модель также некорректна. В противоположность данному утверждению, в недавно опубликованной статье [7] нами было предложено в качестве решения краевой задачи о собственных низкочастотных колебаниях нанобалки, сформулированной в рамках ОФНИ модели, рассматривать предельное решение аналогичной задачи, найденное с позиций ДФНИ модели, когда объемная доля локальной фазы становится исчезающе малой ($\xi \rightarrow 0$).

Целью данной статьи является исследование высокочастотных собственных продольных колебаний неоднородного наностержня с длиной волны, соизмеримой с внутренним характерным размером. Детальная информация о верхней части спектра может быть использована для изучения коротковолновой динамики стержней с гранулированной микроструктурой [8], а также для исследования реакции стержней на ударную нагрузку [9]. Принимая ДФНИ модель в качестве исходной с ядром Гельмгольца в законе физического состояния, мы сводим интегро-дифференциальное уравнение колебаний наностержня к дифференциальному уравнению четвертого порядка с переменными коэффициентами с дополнительной парой граничных условий. Решение новой краевой задачи в рамках «эквивалентной» двухфазной нелокальной *дифференциальной* (ДФНД) модели строится с использованием ВКБ-метода в виде суперпозиции основного решения и интегралов краевого эффекта. В качестве примера рассматривается защемленный стержень с линейно изменяющейся площадью поперечного сечения. Находятся собственные частоты для любого значения параметра ξ , включая предельный случай, когда $\xi \rightarrow 0$. В качестве альтернативного подхода рассмотрена эта же задача в рамках однофазной нелокальной дифференциальной (ОФНД) модели, которая получается сингулярным вырождением ДФНД модели при $\xi = 0$. Найдена верхняя граница спектра наностержня, рассматриваемого с позиций чисто нелокальной теории упругости.

2. Постановка задачи. Рассмотрим упругий неоднородный наноразмерный стержень длиной L с переменными площадью поперечного сечения $S(x_1)$, модулем Юнга $E(x_1)$ и плотностью материала $\rho(x_1)$, где x_1 — координата на оси стержня. Пусть u — продольное перемещение сечения стержня, а σ — нормальное напряжение на площадке сечения. Тогда уравнение, описывающее свободные колебания неоднородного стержня, будет иметь вид

$$\frac{\partial[S(x_1)\sigma(x_1, t)]}{\partial x_1} - \rho(x_1)S(x_1)\frac{\partial^2 u(x_1, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где t — время.

В соответствии с двухфазной нелокальной теорией упругости [3] имеем

$$\sigma(x_1, t) = \xi_1 \sigma^{(c)}(x_1, t) + \xi_2 \int_0^L K(|x_1 - x'|, \kappa) \sigma^{(c)}(x', t) dx', \quad \sigma^{(c)} = E \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad (2)$$

где $\sigma^{(c)}$ — макроскопическое напряжение, $\kappa = e_0 a$, e_0 — материальная константа, a — внутренний характерный размер (например, размер решетки, расстояние между гранулами или атомами, длина волны), $K(|x_1 - x'|, \kappa)$ — ядро, которое положительно, удовлетворяет условию затухания при $|x_1 - x'| \rightarrow \infty$ и обращается в дельта-функцию $\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ при $\kappa \rightarrow 0$, а ξ_1 и ξ_2 — объемные доли локальной и нелокальной фаз в ДФНИ модели, такие что $0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1$ и $\xi_1 + \xi_2 = 1$. Когда $\xi_1 \rightarrow 0$, уравнение (2) вырождается в уравнение физического состояния, соответствующее ОФНИ модели, а при $\xi_1 = 1$ получаем классический закон Гука.

Далее рассмотрим ядро Гельмгольца, которое наиболее часто используется при исследовании механического поведения наноразмерных балок и стержней:

$$K(|x_1 - x'|, \kappa) = \frac{1}{2\kappa} e^{-\frac{|x_1 - x'|}{\kappa}}. \quad (3)$$

Введем безразмерные величины

$$x = x_1/L, \quad E_d(x) = E(Lx)/E_c, \quad S_d(x) = S(Lx)/S_c, \quad \rho_d(x) = \rho(Lx)/\rho_c, \quad (4)$$

где E_c, S_c, ρ_c — характерные значения переменных модуля Юнга $E(x_1)$, площади поперечного сечения $S(x_1)$ и плотности $\rho(x_1)$ соответственно.

Исследуя свободные колебания, положим $u = y(x) \exp(i\omega t)$, где $i = \sqrt{-1}$, а ω — искомая частота свободных колебаний. Тогда, с учетом (2)–(4), приходим к интегродифференциальному уравнению в безразмерной форме, описывающему свободные колебания наностержня в рамках ДФНИ модели:

$$\xi \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + \frac{1 - \xi}{2\varepsilon} \frac{d}{dx} \left[S_d(x) \int_0^1 e^{-\frac{|x-s|}{\varepsilon}} E_d(s) \frac{dy(s)}{ds} ds \right] + \lambda q(x)y = 0, \quad (5)$$

где

$$p = E_d(x)S_d(x), \quad q = \rho_d(x)S_d(x), \quad \xi = \xi_1, \quad \lambda = \frac{L^2 \rho_c \omega^2}{E_c}, \quad \varepsilon = \frac{\kappa}{L}. \quad (6)$$

Предполагая малость внутреннего характерного размера по сравнению с длиной наностержня, считаем, что ε является малым параметром.

В качестве граничных условий рассмотрим условия жесткого защемления и свободного края. Для защемленных краев имеем

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (7)$$

для свободных краев —

$$\xi E_d(x)y'(x) + \frac{1-\xi}{2\varepsilon} \int_0^1 e^{-\frac{|x-s|}{\varepsilon}} E_d(s)y'(s)ds = 0 \quad \text{при } x = 0, 1. \quad (8)$$

Возможна комбинация защемленного и свободного края.

В дальнейшем индекс d у безразмерных величин $E_d(x)$, $S_d(x)$, $\rho_d(x)$ опускается.

Краевую задачу на собственные значения для интегро-дифференциального уравнения (5) с одним из вариантов граничных условий (7), (8) будем называть $\mathbf{P}_{i\xi}$ -задачей. Если $\xi = 1$, то эта задача переходит в классическую \mathbf{P}_{i1} -задачу для макроразмерного стержня. Наконец, при $\xi = 0$ получаем краевую задачу в рамках ОФНИ модели, называемую здесь \mathbf{P}_{i0} -задачей.

3. Эквивалентные дифференциальное уравнение и граничные условия. Заметим, что

$$I(x) = \int_0^1 e^{-\frac{|x-s|}{\varepsilon}} z(s)ds = e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \int_0^x e^{\frac{s}{\varepsilon}} z(s)ds + e^{\frac{x}{\varepsilon}} \int_x^1 e^{-\frac{s}{\varepsilon}} z(s)ds, \quad (9)$$

$$I'(x) = \frac{1}{\varepsilon} \left[e^{\frac{x}{\varepsilon}} \int_x^1 e^{-\frac{s}{\varepsilon}} z(s)ds - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \int_0^x e^{\frac{s}{\varepsilon}} z(s)ds \right], \quad I''(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} I(x) - \frac{2}{\varepsilon} z(x).$$

Решение краевой задачи будем искать в классе функций $y \in C^4[0, 1]$. Дважды продифференцировав исходное уравнение (5), получим пару интегро-дифференциальных уравнений:

$$\xi (py')'' + \frac{1-\xi}{2\varepsilon} (SI)'' + \lambda(qy)' = 0, \quad \xi (py')''' + \frac{1-\xi}{2\varepsilon} (SI)''' + \lambda(qy)'' = 0. \quad (10)$$

Принимая во внимание (9), где $z(x) = E(x)y'(x)$, и исключая $I(x)$ и $I'(x)$ из уравнений (5), (10), приходим к дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \xi \left\{ (1 + \varepsilon^2 \delta_1)(py')''' - (S^2)'(1 + \varepsilon^2 \delta_3) \left[\frac{(py')'}{S^2} \right]' \right\} + \\ + \varepsilon^2 \lambda \left[(1 + \varepsilon^2 \delta_1)(qy)'' - (S^2)'(1 + \varepsilon^2 \delta_3) \left(\frac{qy}{S^2} \right)' \right] - \\ - (1 - \xi) [S(1 + \varepsilon^2 \delta_1)(Ey')' + (S' - \varepsilon^2 \delta_4)Ey'] - \\ - (1 + \varepsilon^2 \delta_1)(1 + \varepsilon^2 \delta_2) [\xi(py')' + \lambda qy] = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$\delta_1(x) = S \left(\frac{S'}{S^2} \right)', \quad \delta_2(x) = \frac{3S''}{S}, \quad \delta_3(x) = \frac{S^4}{(S^2)', \left(\frac{S''}{S^3} \right)', \quad \delta_4(x) = 3S'S \left[\frac{S''}{S^2} + \left(\frac{S'}{S^2} \right)' \right]. \quad (12)$$

Когда S, E, p, q — константы, уравнение (11) совпадает с уравнением, полученным в [10] для однородного наноразмерного стержня постоянного сечения.

Поскольку уравнение (11) имеет четвертый порядок, необходимо естественные краевые условия дополнить двумя дополнительными. В работе [8] данные условия были получены в интегро-дифференциальной форме, а в недавно опубликованной статье [7] о свободных низкочастотных колебаниях однородной нанобалки — в эквивалентной дифференциальной форме. Рассматривая исходное уравнение (5) при $x = 0$ и $x = 1$, находим

$$\begin{aligned} \frac{1-\xi}{2\varepsilon} \int_0^1 e^{-\frac{s}{\varepsilon}} E(s)y'(s)ds &= -\frac{\varepsilon \{ \xi [p_0 y'''(0) + p'_0 y'(0)] + \lambda q_0 y(0) \}}{S_0 + \varepsilon S'_0}, \\ \frac{1-\xi}{2\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \int_0^1 e^{\frac{s}{\varepsilon}} E(s)y'(s)ds &= \frac{\varepsilon \{ \xi [p_1 y'''(1) + p'_1 y'(1)] + \lambda q_1 y(1) \}}{S_1 - \varepsilon S'_1}, \end{aligned} \quad (13)$$

где индексы 0 и 1 обозначают вычисление функций $S(x), p(x), E(x), q(x)$ и их производных в точках $x = 0$ и $x = 1$ соответственно. Подставляя (13) в первое из уравнений (10) при $x = 0$ и $x = 1$, получаем пару дополнительных краевых условий:

$$\begin{aligned} \xi [2p'_0 y''(0) + p_0 y'''(0) + p''_0 y'(0)] - \frac{S_0 + 2\varepsilon S'_0 + \varepsilon^2 S''_0}{\varepsilon(S_0 + \varepsilon S'_0)} \times \\ \times \{ \xi [p_0 y''(0) + p'_0 y'(0)] + \lambda q_0 y(0) \} - \frac{(1-\xi)p_0}{\varepsilon^2} y'(0) + \lambda [q'_0 y(0) + q_0 y'(0)] = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \xi [2p'_1 y''(1) + p_1 y'''(1) + p''_1 y'(1)] + \frac{S_1 - 2\varepsilon S'_1 + \varepsilon^2 S''_1}{\varepsilon(S_1 - \varepsilon S'_1)} \times \\ \times \{ \xi [p_1 y''(1) + p'_1 y'(1)] + \lambda q_1 y(1) \} - \frac{(1-\xi)p_1}{\varepsilon^2} y'(1) + \lambda [q'_1 y(1) + q_1 y'(1)] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Граничные условия (8) для свободных краев можно также переписать в дифференциальной форме:

$$\xi E_0 y'(0) - \frac{\varepsilon \{ \xi [p_0 y''(0) + p'_0 y'(0)] + \lambda q_0 y(0) \}}{S_0 + \varepsilon S'_0} = 0, \quad (16)$$

$$\xi E_1 y'(1) + \frac{\varepsilon \{ \xi [p_1 y''(1) + p'_1 y'(1)] + \lambda q_1 y(1) \}}{S_1 - \varepsilon S'_1} = 0. \quad (17)$$

Краевую задачу для дифференциального уравнения (11) с дополнительными граничными условиями (14), (15) и парой естественных граничных условий (7) или (16), (17) будем для краткости называть $\mathbf{P}_{d\xi}$ -задачей, рассматриваемой в рамках двухфазной нелокальной дифференциальной (ДФНД) модели.

При $\xi = 0$ и фиксированном малом параметре ε уравнение (11), а также граничные условия (за исключением условий жесткого заземления) сингулярно вырождаются. В частности, уравнение (11) принимает более простой вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \lambda \left[(1 + \varepsilon^2 \delta_1) (qy)'' - (S^2)' (1 + \varepsilon^2 \delta_3) \left(\frac{qy}{S^2} \right)' \right] - \\ - S(1 + \varepsilon^2 \delta_1) (Ey')' - (S' - \varepsilon^2 \delta_4) Ey' - (1 + \varepsilon^2 \delta_1) (1 + \varepsilon^2 \delta_2) qy = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Возникает вопрос о выборе основных граничных условий для вырожденного уравнения (18) второго порядка. Краевую задачу для уравнения (18) с соответствующими краевыми условиями мы обозначим как P_{d0} -задачу в рамках однофазной нелокальной дифференциальной (ОФНД) модели. Как известно, задача о выборе граничных условий для вырожденного дифференциального уравнения может быть решена путем нахождения корней дополнительного характеристического уравнения. В случае принятия граничных условий (7) жесткого защемления данные условия из физических соображений задачи должны быть назначены в качестве главных, а дополнительные условия (14), (15) следует отбросить. Если же один из краев свободен, например край $x = 0$, то граничное условие (16) для свободного края вырождается в условие $y(0) = 0$, которое совпадает с условием жесткого защемления. Данное обстоятельство указывает на то, что краевая P_{d0} -задача является физически некорректной. Заметим при этом, что исходная P_{i0} -задача в интегро-дифференциальной форме не эквивалентна P_{d0} -задаче в дифференциальной форме, решение которой рассматривается на разных множествах функций. Именно поэтому, исходя из вывода о некорректности P_{d0} -задачи, нельзя утверждать о некорректности исходной P_{i0} -задачи и, соответственно, о некорректности ОФНД модели, о чем было заявлено в работе [6]. В недавно опубликованной статье [7] о свободных низкочастотных поперечных колебаниях наностержня было показано, что решение соответствующей P_{i0} -задачи в рамках ОФНД модели может быть получено как предел решения $P_{i\xi}$ -задачи при $\xi \rightarrow 0$.

Ниже мы рассмотрим $P_{i\xi}$ -задачу, ставя целью исследовать верхнюю часть спектра собственных частот, а затем найдем собственные значения (частоты) в предельном случае, когда $\xi \rightarrow 0$. Для сравнения рассмотрим также P_{d0} -задачу в случае жесткого защемления краев. Интересно отметить, что для однородного стержня (S, q, δ_i — константы) уравнение (18) в P_{d0} -задаче совпадает с уравнением, описывающим колебания с учетом эффекта Пуассона [11]. Данное уравнение, как известно, приводит к ограниченному сверху спектру.

4. Исследование колебаний наностержня в рамках ДФНД модели. Будем исследовать высокочастотные колебания с длиной волны, соизмеримой с внутренним характерным размером наностержня. Пусть

$$\lambda = \varepsilon^{-2} \hat{\lambda}, \quad \frac{d^n y}{dx^n} \sim \varepsilon^{-n} y, \quad \hat{\lambda} \sim 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad n = 1, 2, \dots, 4. \quad (19)$$

Решение уравнения (11) будем искать в виде ВКБ-разложения:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x) \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int f(x) dx \right\}, \quad (20)$$

$$\hat{\lambda} = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots, \quad (21)$$

где $\frac{d}{dx} \{y_k, f\} \sim \{y_k, f\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Подставим (20), (21) в уравнение (11). Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим последовательность дифференциальных уравнений:

$$\sum_{m=0}^k \mathbf{L}_m^\xi y_{m-k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0^\xi z &= [\xi p f^4 - (p - \lambda_0 q) f^2 - \lambda_0 q] z = 0, \\ \mathbf{L}_1^\xi z &= 2f(2\xi p f^2 - p + \lambda_0 q) z' + [6\xi p f^2 f' + 3\xi f^3 p' - 2\xi f^3 S' E - \\ &\quad - (fp)'] + \lambda_0 \left(q f' + 2q' f - 2 \frac{S' f q}{S} \right) z = 0, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Из первого уравнения системы (23) находим

$$f_{1,2} = \pm i \varphi_1(x), \quad f_{3,4} = \pm \varphi_2(x), \quad (24)$$

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{[p(x) - \lambda_0 q(x)]^2 + 4\lambda_0 \xi p(x) q(x)} - p(x) + \lambda_0 q(x)}{2\xi p(x)}}, \quad (25)$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{[p(x) - \lambda_0 q(x)]^2 + 4\lambda_0 \xi p(x) q(x)} + p(x) - \lambda_0 q(x)}{2\xi p(x)}}.$$

Рассматривая второе неоднородное уравнение из (23), получаем

$$y_0 = c \exp \left\{ - \int F(x; \xi, \lambda_0) dx \right\}, \quad (26)$$

$$F = \frac{6\xi p f^2 f' + 3\xi f^3 p' - 2\xi f^3 S' E - (fp)' + \lambda_0 (q f' + 2q' f - 2S' q f S^{-1})}{2f(2\xi p f^2 - p + \lambda_0 q)}, \quad (27)$$

где c — произвольная константа.

Далее мы рассмотрим частный случай, когда поперечное сечение является переменным, а остальные параметры постоянны. Здесь $S = S(x)$, $E = \rho = 1$, $p = q = S(x)$. Тогда, с точностью до функций $O(\varepsilon \exp\{\varepsilon^{-1} \int f(x) dx\})$, общее решение уравнения (11) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} y &= [S(x)]^{\alpha_1} \left[c_1 \cos \left(\frac{\varphi_1 x}{\varepsilon} \right) + c_2 \sin \left(\frac{\varphi_1 x}{\varepsilon} \right) \right] + \\ &\quad + [S(x)]^{\alpha_2} \left[c_3 \exp \left(- \frac{\varphi_2 x}{\varepsilon} \right) + c_4 \exp \left(\frac{\varphi_2 (x-1)}{\varepsilon} \right) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\alpha_1(\lambda_0, \xi) = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{(1-\lambda_0)^2 + 4\lambda_0 \xi} + 1 + \lambda_0}{\sqrt{(1-\lambda_0)^2 + 4\lambda_0 \xi}} < 0 \quad \text{для любого } \xi \text{ и } \lambda_0 < 1,$$

$$\alpha_2(\lambda_0, \xi) = -\frac{\sqrt{(1-\lambda_0)^2 + 4\lambda_0 \xi} - (1 + \lambda_0)}{4\sqrt{(1-\lambda_0)^2 + 4\lambda_0 \xi}} > 0 \quad \text{для любого } \xi \text{ и } \lambda_0 < 1,$$

где c_j — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий, а φ_1, φ_2 становятся постоянными, не зависящими от x :

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\lambda_0)^2 + 4\lambda_0 \xi} - (1-\lambda_0)}{2\xi}}, \quad \varphi_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\lambda_0)^2 + 4\lambda_0 \xi} + (1-\lambda_0)}{2\xi}}. \quad (29)$$

Подстановка общего решения (28) в граничные условия, включая дополнительные условия (14), (15), приводит к системе однородных алгебраических уравнений

$$\mathbf{M}\mathbf{X}^T = 0, \quad \mathbf{X} = (c_1, c_2, c_3, c_4), \quad (30)$$

относительно констант c_j , где \mathbf{M} — матрица размерности 4×4 с элементами m_{jk} , зависящими от типа граничных условий. В частности, для стержня с защемленными краями и переменной площадью поперечного сечения $S(x)$ элементы данной матрицы определяются соотношениями

$$\begin{aligned} m_{11} &= S_0^{\alpha_1 - \alpha_2}, & m_{12} &= 0, & m_{13} &= 1, & m_{14} &= 0, \\ m_{21} &= \cos \frac{\varphi_1}{\varepsilon}, & m_{22} &= \sin \frac{\varphi_1}{\varepsilon}, & m_{23} &= 0, & m_{24} &= S_1^{\alpha_2 - \alpha_1}, \\ m_{31} &= S_0^{\alpha_1} \xi \varphi_1^2, & m_{32} &= \lambda_0 S_0^{\alpha_1} \varphi_1 - (1 - \xi) S_0^{\alpha_1} \varphi_1 - S_0^{\alpha_1} \xi \varphi_1^3, \\ m_{33} &= (1 - \xi) S_0^{\alpha_2} \varphi_2 - \lambda_0 S_0^{\alpha_2} \varphi_2 - S_0^{\alpha_2} \xi \varphi_2^2 - S_0^{\alpha_2} \xi \varphi_2^3, & m_{34} &= 0, \\ m_{41} &= S_1^{\alpha_1} \left\{ [\xi \varphi_1^3 + (1 - \xi) \varphi_1 - \lambda_0 \varphi_1] \sin \frac{\varphi_1}{\varepsilon} + (\lambda_0 - \xi \varphi_1^2) \cos \frac{\varphi_1}{\varepsilon} \right\}, \\ m_{42} &= S_1^{\alpha_1} \left\{ (\lambda_0 - \xi \varphi_1^2) \sin \frac{\varphi_1}{\varepsilon} + [\lambda_0 \varphi_1 - \xi \varphi_1^3 - (1 - \xi) \varphi_1] \cos \frac{\varphi_1}{\varepsilon} \right\}, \\ m_{43} &= 0, & m_{44} &= S_1^{\alpha_2} [\xi \varphi_2^3 + \xi \varphi_2^2 + \lambda_0 - (1 - \xi) \varphi_2 + \lambda_0 \varphi_2]. \end{aligned} \quad (31)$$

Условием существования нетривиального решения системы (30) является трансцендентное уравнение

$$\det \mathbf{M} = 0, \quad (32)$$

из которого находим собственные значения λ_0 для фиксированных параметров ξ и ε .

Поправка λ_2 может быть найдена из рассмотрения неоднородного уравнения (22) при $k = 2$.

5. Исследование колебаний наностержня на основе ОФНД модели.

Рассмотрим уравнение (18) при $S = S(x)$, $E = \rho = 1$, $p = q = S(x)$. Как и прежде, будем искать решение, соответствующее высокочастотным колебаниям, для которых $\lambda = \varepsilon^{-2} \hat{\lambda}$. Перепишем уравнение (18), сохранив в нем лишь слагаемые, которые необходимы для построения решения с точностью до функций $O(\varepsilon^2 \exp\{\varepsilon^{-1} \int f(x) dx\})$:

$$\varepsilon^2 (1 - \hat{\lambda}) y'' + \hat{\lambda} y + \varepsilon^2 \frac{S'}{S} y' + \varepsilon^4 (1 - \hat{\lambda}) \frac{S'' S - 2(S')^2}{S^2} y'' + \varepsilon^2 \hat{\lambda} \frac{3SS'' - 4(S')^2}{S^2} y = 0. \quad (33)$$

Заметим, что последние два слагаемых в (28) экспоненциально убывают при $\xi \rightarrow 0$, а также

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi_1 = \theta = \sqrt{\frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0}}. \quad (34)$$

Тогда общее решение уравнения (33) можно искать в виде ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[u_k \cos \left(\frac{\theta x}{\varepsilon} \right) + v_k \sin \left(\frac{\theta x}{\varepsilon} \right) \right]. \quad (35)$$

Подстановка (35) в уравнение (33) приводит к последовательности уравнений относительно u_k, v_k . В нулевом приближении (при $k = 0$) получаем уравнение

$$(\lambda_0 - 1)\theta^2 + \lambda_0 = 0, \quad (36)$$

которое удовлетворяется тождественно в силу (34).

В первом приближении ($k = 1$) получаем два одинаковых уравнения

$$\mathbf{L}_1 u_0 = 2(1 - \lambda_0)\theta u'_0 + \frac{S'}{S}\theta u_0 = 0, \quad \mathbf{L}_1 v_0 = 0. \quad (37)$$

Их решением являются функции

$$u_0 = \frac{d_0}{S^{\frac{1}{2(1-\lambda_0)}}}, \quad v_0 = \frac{c_0}{S^{\frac{1}{2(1-\lambda_0)}}}, \quad (38)$$

где c_0, d_0 — произвольные постоянные.

Рассмотрение второго приближения ($k = 2$) приводит к паре уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 v_1 = & -(1 - \lambda_0)u''_0 - \frac{S'}{S}u'_0 - \lambda_2(1 + \theta^2)u_0 + \\ & + \left[\theta^2(1 - \lambda_0)\frac{S'' - 2(S')^2}{S^2} - \lambda_0\frac{3SS'' - 4(S')^2}{S^2} \right] u_0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 u_1 = & (1 - \lambda_0)v''_0 + \frac{S'}{S}v'_0 + \lambda_2(1 + \theta^2)v_0 + \\ & + \left[-\theta^2(1 - \lambda_0)\frac{S'' - 2(S')^2}{S^2} + \lambda_0\frac{3SS'' - 4(S')^2}{S^2} \right] v_0, \end{aligned}$$

общим решением которых являются функции

$$\begin{aligned} v_1 = & S^{-\frac{1}{2(1-\lambda_0)}} \left\{ c_1 - \frac{d_0}{2\lambda_0^{1/2}(1-\lambda_0)^{3/2}} [G(x) + \lambda_2 x] \right\}, \\ u_1 = & S^{-\frac{1}{2(1-\lambda_0)}} \left\{ d_1 + \frac{c_0}{2\lambda_0^{1/2}(1-\lambda_0)^{3/2}} [G(x) + \lambda_2 x] \right\}, \end{aligned} \quad (40)$$

где c_1, d_1 — еще одна пара произвольных постоянных.

Обрывая на этом шаге процесс, запишем общее решение уравнения (33):

$$\begin{aligned} y = & [S(x)]^{-\frac{1}{1-\lambda_0}} \left\{ \left\{ d_0 + \varepsilon \left[d_1 + \frac{c_0}{2\lambda_0^{1/2}(1-\lambda_0)^{3/2}} (G(x) + \lambda_2 x) \right] \right\} \cos \frac{\theta x}{\varepsilon} + \right. \\ & \left. + \left\{ c_0 + \varepsilon \left[-\frac{d_0}{2\lambda_0^{1/2}(1-\lambda_0)^{3/2}} (G(x) + \lambda_2 x) \right] \right\} \sin \frac{\theta x}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2 e^{\frac{i\theta x}{\varepsilon}}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$G(x) = \int \frac{(8\lambda_0^2 - 10\lambda_0 + 1)(S')^2 - (8\lambda_0^2 - 10\lambda_0 + 2)SS''}{4S^2} dx. \quad (42)$$

Чтобы найти собственное значение λ_0 , поправку λ_2 и константы c_k, d_k , подставим функцию (41) в граничные условия (7) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . В главном приближении получаем

$$d_0 = 0, \quad \lambda_0 = \lambda_0^{(n)} = \frac{(\varepsilon\pi n)^2}{1 + (\varepsilon\pi n)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (43)$$

Собирая коэффициенты при ε , мы приходим к следующим двум уравнениям:

$$d_1 = -\frac{c_0}{2\lambda_0^{1/2}(1-\lambda_0)^{3/2}}G(0), \quad d_1 + \frac{c_0}{2\lambda_0^{1/2}(1-\lambda_0)^{3/2}}[G(1) + \lambda_2] = 0, \quad (44)$$

которые дают поправку

$$\lambda_2 = \lambda_2^{(n)} = G(0) - G(1) = -\int_0^1 \frac{(8\lambda_0^2 - 10\lambda_0 + 1)(S')^2 - (8\lambda_0^2 - 10\lambda_0 + 2)SS''}{4S^2} dx. \quad (45)$$

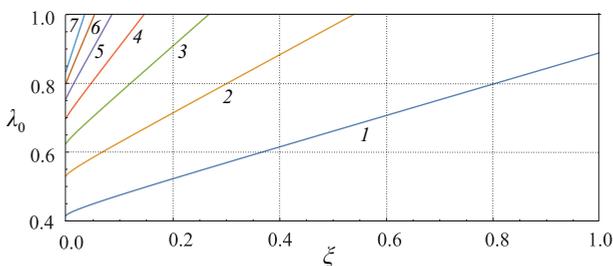
Из принятой выше асимптотической оценки $\hat{\lambda} \sim 1$ вытекает, что соотношения (43), (44) следует использовать для $n \gtrsim (\varepsilon\pi)^{-1}$.

Можно видеть, что $\lambda_0 < 1$ для любого n . Если $S(x) \neq 0$ (что всегда выполняется, если не рассматривать стержень с острым концом) и первые две производные функции $S(x)$ непрерывны на сегменте $[0, 1]$, то поправка λ_2 также ограничена сверху. Таким образом, асимптотическая формула

$$\omega = \frac{1}{\varepsilon L} \sqrt{\frac{E_c \lambda_0}{\rho_c}} \left[1 + \frac{\varepsilon^2 \lambda_2}{2 \lambda_0} + O(\varepsilon^4) \right] \quad (46)$$

дает верхнюю часть спектра собственных частот свободных колебаний неоднородного наностержня с длиной волны, соизмеримой с внутренним характерным размером.

6. Примеры. Пусть площадь поперечного сечения — линейная функция $S(x) = 1 - kx$, где $k < 1$. На рисунке показаны собственные значения $\lambda_0 = \lambda_0^{(n)}$ как функции параметра ξ , найденные в рамках ДФНД модели путем численного решения трансцендентного уравнения (32). Расчеты выполнены для наностержня с защемленными краями при $\varepsilon = 0.075$ и $k = 0.5$. Кривые построены для первых семи номеров, начиная с $n = 4$, для которого выполняется условие $\lambda_0 \sim 1$.



Собственные значения $\lambda_0 = \lambda_0^{(n)}$ как функции параметра ξ для наностержня с защемленными краями, найденные в рамках ДФНД модели: 1 — $n = 4$, 2 — $n = 5$, 3 — $n = 6$, 4 — $n = 7$, 5 — $n = 8$, 6 — $n = 9$, 7 — $n = 10$.

Как и следовало ожидать [10], все частоты возрастают вместе с параметром ξ (долей локальной фазы в ДФНИ и ДФНД моделях), при этом поведение функции $\lambda_0(\xi)$ носит характер, близкий к линейному. Расчеты, выполненные при фиксированном положительном $\xi > 0$, указывают на неограниченный рост частот с ростом номера n , при этом скорость возрастания увеличивается с уменьшением доли локальной фазы. Численный эксперимент при значениях ξ , близких к нулю, и больших

n позволяет сделать предположение об ограниченности спектра сверху при $\xi = 0$, что соответствует вырождению двухфазной модели нелокальной упругости в однофазную. Для подтверждения данного предположения были выполнены расчеты собственных значений λ_0 по формуле (44), а также расчеты уточненного значения $\hat{\lambda} \approx \lambda_0 + \varepsilon\lambda_2$, где поправка λ_2 , определяемая в общем случае по формуле (45) для рассматриваемого линейного закона изменения сечения, принимает вид

$$\lambda_2 = -\frac{k^2(8\lambda_0^2 - 10\lambda_0 + 1)}{4(1-k)}. \quad (47)$$

Собственные значения λ_0 , $\hat{\lambda}$ для заземленного наностержня, найденные на основе ОФНД модели при $n = 4, \dots, 10$

n	4	5	6	7	8	9	10
λ_0	0.470	0.581	0.667	0.731	0.780	0.818	0.847
$\hat{\lambda}$	0.481	0.593	0.678	0.743	0.791	0.828	0.857

В таблице приведены значения параметров λ_0 и $\hat{\lambda}$ для номеров $n = 4, \dots, 10$. Сравнивая λ_0 из таблицы и рисунка при $\xi = 0$, можно сделать вывод о том, что собственные значения, найденные по двум моделям сближаются по мере увеличения номера моды. Данная сходимости немного хуже для параметра $\hat{\lambda}$. Это объясняется тем, что расчеты по ДФНД и ОФНД моделям выполнялись с точностью до $O(\varepsilon^2)$ и $O(\varepsilon^4)$ соответственно. Предельное значение собственного числа $\hat{\lambda}$, определяемого по ОФНД модели, для заземленного наностержня с линейным законом изменения площади поперечного сечения равно

$$\hat{\lambda}_{lim} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\lambda}^{(n)} = 1 + \varepsilon^2 \frac{k^2}{4(1-k)} + O(\varepsilon^4). \quad (48)$$

Аналогичные расчеты, выполненные для двух других вариантов граничных условий по ДФНД модели, показали, что характер поведения кривых $\lambda_0(\xi)$ является таким же, как и на рисунке для заземленного наностержня.

7. Выводы. На основе двухфазной нелокальной теории упругости в статье исследованы высокочастотные колебания неоднородного наностержня с переменным сечением. Принимая ядро Гельмгольца в законе физического состояния, исходное интегро-дифференциальное уравнение движения стержня сведено к дифференциальному уравнению четвертого порядка с переменными коэффициентами, а также выведена пара дополнительных граничных условий. В предположении малости внутреннего характерного размера по сравнению с внешним характерным размером наностержня решение краевой задачи построено с использованием ВКБ-метода в виде суперпозиции основного решения с большой изменчивостью по координате и интегралов краевого эффекта. На примере наностержня с заземленными краями и линейно изменяющейся площадью поперечного сечения исследовано влияние объемной доли локальной фазы в двухфазной нелокальной теории упругости на частоты из верхней части спектра. В качестве альтернативной использована однофазная дифференциальная модель нелокальной теории упругости для заземленного стержня, найдена верхняя граница спектра собственных частот, хорошо аппроксимирующая сверху частоты, найденные в рамках двухфазной модели в предельном случае, когда доля локальной фазы исчезает.

Литература

1. Rudd R. E., Broughton J. Q. Atomistic simulation of MEMS resonators through the coupling of length scale. *Journal of Modeling and Simulation of Microsystems* **1** (29), 29–38 (1999).
2. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Weichert D. Improved continuous models for discrete media. *Mathematical Problems in Engineering* **2010**, 986242 (2009). <https://doi.org/10.1155/2010/986242>
3. Eringen A. C. *Nonlocal continuum field theories*. New York, Springer (2002).
4. Reddy J. N. Nonlocal theories for bending, buckling and vibrations of beams. *International Journal of Engineering Science* **45** (2), 288–307 (2007).
5. Aydogdu M. Axial vibration of the nanorods with the nonlocal continuum rod model. *Physica E* **41**, 861–864 (2009).
6. Romano G., Barretta R., Diaco M., de Sciarra F. M. Constitutive boundary conditions and paradoxes in nonlocal elastic nanobeams. *International Journal of Engineering Science* **121**, 151–156 (2017).
7. Mikhasev G., Nobili A. On the solution of the purely nonlocal theory of beamelasticity as a limiting case of the two-phase theory. *International Journal of Solids and Structures* **190**, 47–57 (2020).
8. NejadSadeghi N., Misra A. Axially moving materials with granular microstructure. *International Journal of Mechanical Sciences* **161–162**, 105042 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105042>
9. Беляев А. К., Ма Ч.-Ч., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Шурпатов А. О. Динамика стержня при продольном ударе телом. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4** (62), вып. 3, 506–515 (2017). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.312>
10. Mikhasev G., Avdeichik E., Prikazchikov D. Free vibrations of nonlocally elastic rods. *Mathematics and Mechanics of Solids* **24** (5), 1279–1293 (2019).
11. Ляв А. *Математическая теория упругости*, пер. с англ. Москва, Ленинград, ОНТИ (1935).

Статья поступила в редакцию 6 ноября 2020 г.;
после доработки 7 декабря 2020 г.;
рекомендована в печать 17 декабря 2020 г.

Контактная информация:

Михасев Геннадий Иванович — д-р физ.-мат. наук, проф.; mikhasev@bsu.by

Studying free high-frequency vibrations of an inhomogeneous nanorod based on the nonlocal theory of elasticity

G. I. Mikhasev

Belarusian State University, 4, pr. Nezavisimosti, Minsk, 220030, Belarus

For citation: Mikhasev G. I. Studying free high-frequency vibrations of an inhomogeneous nanorod based on the nonlocal theory of elasticity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 2, pp. 220–232. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.203> (In Russian)

Free high-frequency longitudinal vibrations of an inhomogeneous nanosized rod are studied on the basis of the nonlocal theory of elasticity. The upper part of spectrum with the wavelength comparable to the internal characteristic dimension of a nanorod is examined. An equations in the integral form with the Helmholtz kernel, incorporating both local and nonlocal phases, is used as the constitutive one. The original integro-differential equation is reduced to the forth-order differential equation with variable coefficients, the pair of additional boundary conditions being deduced. Using WKB-method, a solution of the boundary-value problem is constructed in the form of the superposition of a main solution and edge effect integrals. As an alternative model, we consider the purely nonlocal (one-phase) differential model which allows estimating the upper part of spectrum of eigen-frequencies.

Considering the nanorod with a variable cross-section area, we revealed a fair convergence of eigen-frequencies found in the framework of two models when the local fraction in the two-phase model vanishes.

Keywords: nanosized inhomogeneous rod, high-frequency vibrations, two-phase nonlocal theory of elasticity, asymptotic method.

References

1. Rudd R. E., Broughton J. Q. Atomistic simulation of MEMS resonators through the coupling of length scale. *Journal of Modeling and Simulation of Microsystems* **1** (29), 29–38 (1999).
2. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Weichert D. Improved continuous models for discrete media. *Mathematical Problems in Engineering* **2010**, 986242 (2009). <https://doi.org/10.1155/2010/986242>
3. Eringen A. C. *Nonlocal continuum field theories*. New York, Springer (2002).
4. Reddy J. N. Nonlocal theories for bending, buckling and vibrations of beams. *International Journal of Engineering Science* **45** (2), 288–307 (2007).
5. Aydogdu M. Axial vibration of the nanorods with the nonlocal continuum rod model. *Physica E* **41**, 861–864 (2009).
6. Romano G., Barretta R., Diaco M., de Sciarra F. M. Constitutive boundary conditions and paradoxes in nonlocal elastic nanobeams. *International Journal of Engineering Science* **121**, 151–156 (2017).
7. Mikhasev G., Nobili A. On the solution of the purely nonlocal theory of beamelasticity as a limiting case of the two-phase theory. *International Journal of Solids and Structures* **190**, 47–57 (2020).
8. NejadSadeghi N., Misra A. Axially moving materials with granular microstructure. *International Journal of Mechanical Sciences* **161–162**, 105042 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105042>
9. Belyaev A. K., Ma C.-C., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Shurpatov A. O. Dynamics of rod under axial impact by a body. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (62), iss. 3, 506–515 (2017). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.312> (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersburg Univ., Math.* **50**, 310–317 (2017). <https://doi.org/10.3103/S1063454117030050>].
10. Mikhasev G., Avdeichik E., Prikazchikov D. Free vibrations of nonlocally elastic rods. *Mathematics and Mechanics of Solids* **24** (5), 1279–1293 (2019).
11. Love A. *Mathematical theory of elasticity*. Cambridge, Cambridge University Press (1927). [Russ. ed.: Love A. *Matematicheskaja teoriia uprugosti*. Moscow, Leningrad, OHTI Publ. (1935)].

Received: November 6, 2020

Revised: December 7, 2020

Accepted: December 17, 2020

Author's information:

Gennadi I. Mikhasev — mikhasev@bsu.by