

## Потеря устойчивости жестко заделанной подкрепленной цилиндрической оболочки\*

Г. А. Нестерчук

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Нестерчук Г. А. Потеря устойчивости жестко заделанной подкрепленной цилиндрической оболочки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 2. С. 247–254.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.205>

В работе рассматривается задача о потере устойчивости тонкостенной упругой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами с разной жесткостью. Методом Релея — Ритца получено аналитическое решение задачи для случая жесткой заделки краев оболочки. Найдены параметры оптимального распределения массы конструкции между оболочкой и ребрами жесткости с целью максимального увеличения критического давления. Рассматриваются шпангоуты с нулевым эксцентриситетом. Проведено сравнение полученных аналитических решений с численным решением методом конечных элементов.

*Ключевые слова:* подкрепленная цилиндрическая оболочка, асимптотические методы, устойчивость.

**1. Введение.** Подкрепленные цилиндрические оболочки имеют широкое применение в современном машиностроении. Задача о потере устойчивости является одной из базовых задач, решения которых учитываются в авиа- и судоконструировании, в ракетомоделировании. При построении конструкции зачастую основным требованием является минимизация массы при сохранении прочностных характеристик. Этим обусловлена востребованность расчетов ребристых оболочек.

В статье [1] рассматривается одна из постановок задач об оптимизации параметров цилиндрической оболочки, подкрепленной одинаковыми шпангоутами. В работе [2] исследовано поведение шпангоута с тавровым сечением. В книге [3] описаны способы изучения подкрепленных и сопряженных цилиндрических оболочек.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о потере устойчивости под действием равномерного внешнего давления  $p$  тонкостенной упругой цилиндрической оболочки, на которую для увеличения критического давления установлены  $n_s$  поперечных ребер жесткости с нулевым эксцентриситетом. Будем рассматривать шпангоуты, жесткость которых изменяется вдоль образующей оболочки с целью максимального увеличения критического давления.

Для описания потери устойчивости воспользуемся безразмерными уравнениями технической теории оболочек [4]:

$$\varepsilon^8 \Delta^2 w^{(i)} - \Delta_k \Phi^{(i)} - \lambda m^2 w^{(i)} = 0, \quad \Delta^2 \Phi^{(i)} + \Delta_k w^{(i)} = 0, \quad (1)$$

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00208).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

где

$$\Delta_k = \frac{d^2}{ds^2}, \quad \Delta = \Delta_k - m^2, \quad \sigma = 1 - \nu^2, \quad \lambda = \frac{p}{Eh}, \quad \varepsilon^8 = \frac{h^2}{12\sigma}.$$

Здесь  $\varepsilon$  — малый параметр,  $w^{(i)}$  — проекция перемещения на направление нормали к срединной поверхности для  $s \in [s_{i-1}, s_i], i = 1, 2, \dots, n, n = n_s + 1, s_0 = 0, s_n = l, s$  — координата, направленная вдоль образующей цилиндра,  $\Phi^{(i)}$  — функция усилий,  $m$  — число волн по параллели,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $h$  — безразмерная толщина оболочки,  $l$  — безразмерная длина оболочки, а  $E$  — модуль Юнга. За единицу длины выбран радиус  $R$  основания цилиндра.

Представим решение системы уравнений (1) в виде суммы решений для основного полубезмоментного состояния, простого краевого эффекта вблизи краев оболочки и параллелей. В первом приближении получим

$$\left(w_0^{(i)}\right)^{IV} - \alpha^4 w_0^{(i)} = 0, \quad \alpha^4 = m^6 \lambda_0 - \varepsilon^8 m^8, \quad (2)$$

где  $w_0^{(i)}$  — приближенное решение системы (1),  $\lambda_0$  — приближенное значение  $\lambda$  (см. [5]). В дальнейшем рассматривается только приближенное решение, и вместо  $w_0^{(i)}$  и  $\lambda_0$  используются обозначения  $w^{(i)}$  и  $\lambda$ .

Граничные условия для уравнения (2) в случае жесткой заделки краев оболочки имеют вид

$$w^{(1)}(0) = w^{(1)'}(0) = w^{(n)}(l) = w^{(n)'}(l) = 0. \quad (3)$$

Предположим, что характерный размер поперечного сечения шпангоута  $a \ll \varepsilon$ . Тогда на параллелях, подкрепленных шпангоутами, выполняются условия сопряжения [6]

$$\begin{aligned} w^{(i)} &= w^{(i+1)}, & w^{(i)'} &= w^{(i+1)'}, & w^{(i)''} &= w^{(i+1)''}, \\ w^{(i)''''} - w^{(i+1)''''} &= -c_i w^{(i+1)}, & s &= s_i, & (i &= 1, 2, \dots, n_s), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$c_i = \frac{m^8 \varepsilon^8 l \eta_i}{n}, \quad \eta_i = \frac{12 \sigma n E_c J_i}{h^3 E l}, \quad J_i = \frac{a \cdot b_i^3}{12}.$$

Здесь  $E_c$  — модуль Юнга материала шпангоута,  $\eta_i$  — эффективная жесткость шпангоута, установленного в координате  $s_i$  [7],  $J_i$  — момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно образующей цилиндра. Индекс  $i$  указывает на то, что шпангоуты могут отличаться друг от друга по высоте, а следовательно, и по жесткости. Для удобства записи в дальнейшем введены следующие обозначения:  $c = c(\eta, m) = c_1, \eta = \eta_1$ .

Приближенное значение параметра критического давления  $\lambda = p/(Eh)$  для подкрепленной оболочки с заделанными краями определяется по формуле

$$\lambda(\eta) = \min_m \left[ \frac{\alpha^4(c)}{m^6} + \varepsilon^8 m^2 \right],$$

где  $\alpha(c)$  — собственное значение краевой задачи (2), (4) с граничными условиями (3).

**3. Оптимальное расположение шпангоутов.** Краевая задача (2)–(4) эквивалентна задаче об определении частот колебаний жестко заделанной балки, подкрепленной пружинами жесткости  $c_i$  в точках  $s_i$ . Случай шарнирного опирания концов балки при условии равномерного расположения ( $s_i = il/n$ ) одинаковых ( $c_i = c$ ) пружин исследован в монографии [6].

В работе [8] проанализированы случаи неравномерного расположения пружин. Путем перебора вариантов определены оптимальные расположения пружин, которым соответствует максимум величины первого собственного значения  $\alpha_1(c)$  краевых задач (2)–(4). Установлено, что при  $c \rightarrow \infty$  координаты точек оптимального расположения пружин  $s_i(c)$  стремятся к некоторым предельным значениям  $s_i^*$ . Оптимальное расположение пружин в точках  $s_i^*$ , соответствующее  $c = \infty$ , названы предельным оптимальным расположением.

В работе [9] показано, что в случае жесткой заделки нули формы колебаний неподкрепленной балки совпадают с точками предельного оптимального расположения пружин. Решение уравнения (2) с граничными условиями (3) имеет вид

$$w_n(s) = [U(\beta_n s) - \varkappa_n V(\beta_n s)], \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} S(x) &= \operatorname{ch} x + \cos x, & T(x) &= \operatorname{sh} x + \sin x, \\ U(x) &= \operatorname{ch} x - \cos x, & V(x) &= \operatorname{sh} x - \sin x, \\ S(x) &= T^I(x) = U^{II}(x) = V^{III}(x) = S^{IV}(x) \end{aligned}$$

— система функций Крылова,

$$\beta_n = \frac{z_n}{l}, \quad \varkappa_n = \frac{\operatorname{ch} z_n - \cos z_n}{\operatorname{sh} z_n - \sin z_n},$$

а величины

$$z_n \simeq \pi(2n + 1)/2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

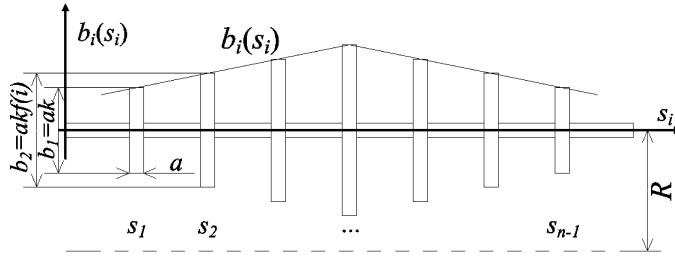
являются корнями уравнения  $\operatorname{ch} z \cdot \cos z = 1$ . При этом точки оптимального расположения шпангоутов совпадают с корнями уравнения  $w_n(s) = 0$ . В дальнейшем для упрощения записи вместо  $\beta_0 = \frac{\pi}{2l}$  используется  $\beta$ , вместо  $\varkappa_1 = U(\frac{3\pi}{2})/V(\frac{3\pi}{2})$  используется  $\varkappa$ , а первая форма колебаний неподкрепленной балки  $w_1(s)$  заменяется на  $w(s)$ .

**4. Вычисление собственных значений для колебаний балки, подкрепленной пружинами.** Рассмотрим краевую задачу о потере устойчивости балки, подкрепленной пружинами. Для ее решения применим метод Релея. Формулу Релея для подкрепленной пружинами балки можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\alpha_1^4 = \frac{I_1 + I_2}{I_0}, \quad (6)$$

$$I_1 = \int_0^l (w'')^2 ds, \quad I_2 = \sum_{i=1}^{n-1} c_i w^2(s_i), \quad I_0 = \int_0^l w^2 ds.$$

На рисунке изображена оболочка со шпангоутами в разрезе вдоль образующей оболочки. Приравняем модуль Юнга шпангоутов модулю Юнга оболочки и в дальнейшем будем считать, что жесткость шпангоута зависит только от его физических



Половина осевого сечения оболочки, подкрепленной шпангоутами.

размеров. Предположим, что все шпангоуты имеют одинаковую ширину, равную  $a$ , а высота первого шпангоута  $b = ka$ . Также введем  $f(i)$  — функцию распределения высот шпангоутов вдоль образующей цилиндра:  $b_i = bf(i) = kaf(i)$ . Подставим в формулу Релея выражения для безразмерной жесткости шпангоута и первой формы колебаний неподкрепленной оболочки

$$I_0 = \int_0^l (U(\beta s) - \kappa \cdot V(\beta s))^2 ds, \quad I_1 = \int_0^l (S(\beta s) - \kappa \cdot T(\beta s))^2 ds.$$

Для случая шпангоута с нулевым эксцентриситетом момент инерции  $i$ -го шпангоута рассчитывается по формуле

$$J_i = \frac{a^4 k^3}{12} f^3(i) = J f^3(i), \quad J = \frac{ab^3}{12}.$$

Следовательно,

$$I_2 = \sum_{i=1}^n c_i w^2(s_i) = \sum_{i=1}^n \frac{m^8 \varepsilon^8 l}{n} \cdot \eta_i w^2(s_i) = \frac{m^8 \varepsilon^8 l \eta}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f^3(i) w^2(s_i).$$

После подстановки в формулу Релея выражений для безразмерной жесткости шпангоута и первой формы колебаний неподкрепленной оболочки получим следующее соотношение для  $\alpha_1^4$ :

$$\alpha_1^4(\eta, m) = \frac{I_1 + cT(n)}{I_0}, \quad \text{где} \quad T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f^3(i) w^2(s_i). \quad (7)$$

Подставим полученное  $\alpha_1$  в формулу для параметра критического давления  $\lambda$  и получим

$$\lambda(\eta, m) = Xm^{-6} + Ym^2,$$

где

$$X = \frac{I_1}{I_0}, \quad Y = \varepsilon^8 \left( 1 + \frac{\eta l}{I_0} \frac{T(n)}{n} \right).$$

Найдем наименьшие значения параметра частоты  $\lambda_1$ , минимизировав полученную функцию  $\lambda(\eta, m)$  по  $m$ :

$$\lambda'_m(\eta, m) = -6Xm^{-7} + 2Ym = 0, \quad \lambda_1(\eta) = \sqrt[4]{\frac{256}{27} XY^3},$$

$$\lambda_1(\eta) = \varepsilon^6 \cdot \sqrt[4]{\frac{256 I_1}{27 I_0} \left(1 + \frac{\eta l T(n)}{I_0 n}\right)^3}.$$

Поскольку для малого параметра  $\varepsilon$  выполнено соотношение  $\varepsilon^8 = h^2/(12\sigma)$ , напишем  $\lambda_1$  в следующем виде:

$$\lambda_1(\eta) = \frac{\sqrt{6} h^{3/2}}{9 \sigma^{3/4}} \sqrt[4]{\frac{I_1}{I_0} \left(1 + \frac{\eta l T(n)}{I_0 n}\right)^3}. \quad (8)$$

**5. Оптимизация параметров оболочки.** Пусть масса подкрепленной оболочки фиксирована. Рассмотрим задачу об определении оптимального распределения массы между шпангоутами и оболочкой (обшивкой), которому соответствует наибольшее значение критического давления.

Критическое давление  $p_0$  для гладкой оболочки длиной  $l$  и толщиной  $h_0$  можно найти по приближенной формуле Саутуэлла — Папковича, взятой из работы [6]:

$$\lambda = \frac{4\pi}{l\sigma^{3/4}} \left(\frac{h_0}{6}\right)^{3/2}, \quad p_0 = \lambda E h_0 = \frac{4\pi E h_0^{5/2}}{6^{3/2} l \sigma^{3/4}}. \quad (9)$$

Предположим, что за счет уменьшения толщины оболочки до величины  $h$  на ней установлен  $n - 1$  шпангоут прямоугольного поперечного сечения шириной  $a$  и высотой  $b(i)$ , причем масса подкрепленной оболочки

$$M_s = M(h) + M_r,$$

где  $M(h) = 2\pi R\rho \cdot Rh \cdot Rl$  — масса обшивки, а масса шпангоутов

$$M_r = \sum_{i=1}^{n-1} 2\pi R\rho \cdot Ra \cdot Rak f(i)$$

совпадает с массой гладкой оболочки  $M_0 = M(h_0)$ .

Для определения критического давления гладкой и подкрепленной оболочек воспользуемся формулами (9) и (8). Введем функцию отношения критического давления подкрепленной оболочки к критическому давлению гладкой оболочки и найдем ее максимальное значение  $f_b^*$ :

$$f_b \simeq \frac{p_1}{p_0} = \begin{cases} d^{5/2} \sqrt[4]{\frac{l^4 I_1}{\pi^4 I_0} \left(1 + \frac{\eta l T(n)}{I_0 n}\right)^3}, & 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ d^{5/2} \left(\frac{2n+1}{3}\right), & \eta_* < \eta, \end{cases}$$

где  $d = \frac{h}{h_0}$ , а параметр  $\eta_*$  называется эффективной жесткостью шпангоута [6, 7] и является корнем уравнения

$$\lambda_1(0) \left(1 + \frac{lT(n)}{I_0 n} \eta\right)^{3/4} = \lambda_n, \quad \eta_* = \frac{nI_0}{lT(n)} \left( \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{4/3} - 1 \right).$$

После упрощения получаем

$$f_b = \begin{cases} d^{5/2} \sqrt[4]{C \left(1 + \frac{Ba^4}{d^3}\right)^3}, & 0 \leq \eta \leq \eta_*, \\ d^{5/2} \left(\frac{2n+1}{3}\right), & \eta_* < \eta, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$B = \frac{\sigma k^3}{I_0 h_0^3} \cdot T(n), \quad C = \frac{l^4 I_1}{\pi^4 I_0}.$$

Условие равенства массы подкрепленной оболочки массе гладкой оболочки ( $M(h_0) = M(h) + M_r$ ) примет следующий вид:

$$a^4 = \frac{(1-d)^2}{A^2}, \quad \text{где } A = \frac{k}{h_0 l} \cdot P(n), \quad P(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i).$$

После подстановки выражения для  $a^4$  в функцию  $f_b(d)$  получим

$$f_b = \begin{cases} d^{5/2} \left( \frac{2n+1}{3} \right), & 0 \leq d \leq d_*, \\ d^{5/2} \sqrt[4]{C \left( 1 + \frac{B}{A^2} \cdot \frac{(1-d)^2}{d^3} \right)^3}, & d_* < d \leq 1, \end{cases}$$

где  $d_*$  — корень кубического уравнения

$$d_*^3 - \frac{B}{A^2 \left( \left( \frac{2n+1}{3} \right)^{4/3} C^{-1/3} - 1 \right)} (d_* - 1)^2 = 0.$$

Данное уравнение имеет один корень на интервале  $(0, 1)$ .

Функция  $g = C^{-1/3} f_b^{4/3}$  возрастает при  $d \in [0; d_*]$ , следовательно, максимум функции находится на промежутке  $[d_*; 1]$ . На этом промежутке функцию  $g$  можно записать в виде

$$g(d) = d^{10/3} + BA^{-2} d^{1/3} (d-1)^2.$$

Корни уравнения  $g'(d) = 0$  лежат вне отрезка  $[d_*; 1]$  (см. [10]), значит, максимум функции  $f_b(d)$  достигается на одном из краев  $[d_*; 1]$ :

$$f_b^* = \max \left[ \frac{2n+1}{3} d_*^{5/3}; 1 \right].$$

Для малых  $h_0$  выполняется неравенство  $d_*^{5/3} \cdot \frac{2n+1}{3} > 1$ , поскольку  $d \rightarrow 1$  при  $h_0 \rightarrow 0$ .

Таким образом, получено кубическое уравнение, корень которого соответствует максимальному критическому давлению жестко заделанной оболочки, подкрепленной шпангоутами разной жесткости:

$$d_*^3 - \frac{\sigma k l^2}{h_0 I_0} \cdot \frac{T(n)}{P^2(n) \left( \left( \frac{2n+1}{3} \right)^{4/3} C^{-1/3} - 1 \right)} \cdot (d_* - 1)^2 = 0.$$

При этом  $a_*$  и  $f_b^*$ , соответствующие  $d_*$ , можно найти по следующим формулам:

$$a_* = \sqrt{\frac{1-d_*}{A}}, \quad f_b^* = \left( \frac{2n+1}{3} \right) \sqrt{d_*^{5/3}}.$$

**6. Результаты.** В таблице приведены значения критического давления, полученные описанным в статье аналитическим методом ( $p$ ) и методом конечных элементов ( $p_{fem}$ ) в пакете Comsol. Рассматриваются некоторые параметры функции

**Некоторые значения критического давления**

	$k = 1$				$k = 2$			
	$n_s$	$p, \text{Па}$	$p_{fem}, \text{Па}$	$d_*$	$n_s$	$p, \text{Па}$	$p_{fem}, \text{Па}$	$d_*$
$u = 1$	3	628199	609440	0.918	3	666391	645430	0.9399
	4	700574	688990	0.8850	4	760599	747720	0.9145
	5	757109	755760	0.8539	5	839855	839140	0.89
$u = 1.5$	3	658402	614370	0.9354	3	689856	642590	0.9530
	4	754081	717130	0.9114	4	803660	762560	0.9349
	5	863682	804290	0.9	5	927847	861660	0.9262
$u = 2$	3	681002	616760	0.9481	3	707084	637890	0.9625
	4	787950	733720	0.9276	4	830211	770330	0.9471
	5	918921	811080	0.9226	5	971589	851530	0.9434

распределения жесткостей шпангоутов  $u$  и  $k$  для медной оболочки  $l = 4$ , подкрепленной  $n_s$  шпангоутами ( $E = 11 \cdot 10^{10}$  Па,  $\rho = 8920$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0.35$ ). Края оболочки жестко закреплены, а высоты шпангоутов распределены по треугольному закону:

$$f(i) = \begin{cases} (i - 1)(u - 1) + 1, & i < \frac{n}{2}, \\ (n - i - 1)(u - 1) + 1, & i \geq \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Здесь  $u$  — отношение высоты второго шпангоута к первому. Для гладкой оболочки толщины  $h = 0.01$  критическое давление для тех же условий  $p_{\max} = 384840$  Па.

Сравнение результатов аналитического и численного решений показывает, что данный подход можно использовать для приближенного подбора параметров перед началом проектирования.

## Литература

1. Адамович И. А., Филиппов С. Б. Оптимизация параметров подкрепленной цилиндрической оболочки. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия* **2 (60)**, вып. 2, 226–234 (2015).
2. Боярская М. Л., Филиппов С. Б. Устойчивость шпангоута под действием внутреннего давления в цилиндрической оболочке. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия* **3 (61)**, вып. 2, 264–273 (2016). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.210>
3. Teng J. G., Rotter J. M. *Buckling of Thin Metal Shells*. CRC Press (2003).
4. Товстик П. Е. *Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы*. Москва, Наука (1995).
5. Филин А. П. *Элементы теории оболочек*. Ленинград, Стройиздат (1975).
6. Филиппов С. Б. *Теория сопряженных и подкрепленных оболочек*. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (1999).
7. Алфутов Н. А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем*. Москва, Машиностроение (1978).
8. Шарыпов Д. В. Низкочастотные колебания цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 3, 102–108 (1997).
9. Лопатухин А. Л., Филиппов С. Б. Низкочастотные колебания и устойчивость тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутами. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 2, 84–90 (2001).
10. Filippov S. B. Buckling, vibrations and optimal design of ring-stiffened thin cylindrical shells. In: *Advances in Mechanics of Solids*, 17–47 (2006). <https://doi.org/10.1142/9789812773166.0002>

Статья поступила в редакцию 21 ноября 2020 г.;  
после доработки 16 декабря 2020 г.;  
рекомендована в печать 17 декабря 2020 г.

Контактная информация:

Нестерчук Григорий Анатольевич — ассистент; grigory\_ne@mail.ru

## Buckling of a clamped supported cylindrical shell\*

G. A. Nesterchuk

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Nesterchuk G. A. Buckling of a clamped supported cylindrical shell. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 2, pp. 247–254. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.205> (In Russian)

The paper considers problem of buckling of a thin elastic cylindrical shell, supported by rings of various stiffness. The approximate solution for clamping edge was obtained with analytical Rayleigh — Ritz method. The parameters of the optimal distribution of the mass of the structure between the shell and the stiffeners are found in order to maximize the critical pressure. Frames with zero eccentricity are considered. The obtained analytical solutions are compared with the solution by the finite element method.

*Keywords:* stiffened cylindrical shell, asymptotic methods, buckling.

## References

1. Adamovich I. A., Filippov S. B. Optimal design of stiffened cylindrical shell. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2** (60), iss. 2, 226–234 (2015). (In Russian)
2. Boyarskaya M. L., Filippov S. B. Buckling of a ring joint with the cylindrical shell under internal pressure in the shell. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3** (61), iss. 2, 264–273 (2016). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.210> (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ., Math.* **49**, 166–173 (2016). <https://doi.org/10.3103/S1063454116020035>].
3. Teng J. G., Rotter J. M. *Buckling of Thin Metal Shells*. CRC Press (2003).
4. Tovstik P. E. *Buckling of thin shells. Asymptotic methods*. Moscow, Nauka Publ. (1995). (In Russian)
5. Filin A. P. *Elements of the Theory of Shells*. Leningrad, Stroiizdat Publ. (1975). (In Russian)
6. Filippov S. B. *Theory of joint and stiffened shells*. St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Press (1999). (In Russian)
7. Alfutov N. A. *Basis of calculation for stability of elastic systems*. Moscow, Mashinostroenie Publ. (1978). (In Russian)
8. Sharipov D. V. Low frequency vibrations of stiffened cylindrical shell. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 3, 102–108 (1997). (In Russian)
9. Lopatukhin A. L., Filippov S. B. Low frequency vibration and buckling of the ring stiffened thin cylindrical shell *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 2, 84–90 (2001). (In Russian)
10. Filippov S. B. Buckling, vibrations and optimal design of ring-stiffened thin cylindrical shells. In: *Advances in Mechanics of Solids*, 17–47 (2006). <https://doi.org/10.1142/9789812773166.0002>

Received: November 21, 2020

Revised: December 16, 2020

Accepted: December 16, 2020

Author's information:

Grigory A. Nesterchuk — grigory\_ne@mail.ru

---

\*This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant no. 19-01-00208).