

Обратная задача стабилизации сферического маятника в заданном положении под действием косо́й вибрации*

А. Г. Петров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Российская Федерация, 119526, Москва, пр. Вернадского, 101

Для цитирования: *Петров А. Г.* Обратная задача стабилизации сферического маятника в заданном положении под действием косо́й вибрации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 2. С. 255–269. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.206>

Ставится обратная задача о стабилизации сферического маятника (материальная точка массы m на конце невесомого твердого стержня длины l) в заданном положении с помощью высокочастотной вибрации точки подвеса. Положение маятника определяется углом между стержнем маятника и вектором ускорения силы тяжести. Для любого заданного положения маятника найдена серия параметров косо́й вибрации (амплитуда скорости вибрации и угол между вектором скорости вибрации и вертикалью), стабилизирующих маятник в этом положении. Из полученной серии решений выделены параметры вибрации с минимальной амплитудой скорости, зависящие от положения маятника. Исследована область начальных условий, из которых такая вибрация через достаточно большое время приводит маятник в заданное устойчивое положение. Эта область, следуя акад. Н. Ф. Морозову с соавторами, названа областью притяжения.

Ключевые слова: сферический маятник, устойчивость, вибрация точки подвеса, обратная задача.

1. Введение. Первое исследование возможности стабилизации одинарного математического маятника в верхней точке за счет вертикальных высокочастотных вибраций точки подвеса было приведено Стефенсоном [1].

Более подробно колебания маятника с различными видами вибраций изучались Боголюбовым, Капицей и вслед за ними другими авторами [2–5]. Авторы получают уравнения равновесия и условия устойчивости, маятника при заданной вибрации подвеса. В основном исследуется устойчивость вертикального положения маятника под действием высокочастотных вибраций точки подвеса по вертикали или горизонтали. В [6] описаны положения равновесия и устойчивости маятника, обусловленные плоскими колебаниями точки подвеса по вертикали и горизонтали, а также при периодическом изменении длины маятника. В работе [7] исследованы осесимметричные колебания сферического маятника с вертикальной вибрацией точки подвеса.

В статье [8] определяется не только уровень вибраций опоры, обеспечивающий устойчивость вертикального положения маятника, но и область его притяжения. В [9, 10] исследуется устойчивость вертикального положения гибкого стержня с нижней точкой опоры, находящегося под действием собственного веса и вибраций.

*Работа выполнена в рамках госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

В работе [11] поставлена обратная задача: для заданного положения маятника найти закон колебаний точки подвеса, чтобы в этом положении выполнялись условия равновесия и устойчивости. Кроме того, требуется найти режимы вибрации, при которых амплитуда вибрации минимальна. Задача сводится к уравнениям для вектора, определяющего направление и амплитуду вибрации. Найден режим вибрации с наименьшей амплитудой, при котором выполнены условия равновесия. Если положение маятника расположено в нижней полусфере, то при найденном режиме положение равновесия маятника устойчиво, а если в верхней, то неустойчиво.

В данной работе исследуется область притяжения при вибрации с наименьшей амплитудой (область начальных данных, при которых маятник под действием вибрации примет устойчивое положение в заданной точке).

Так же, как и в [11], исследование будет проводиться с помощью вибрационной энергии, понятие которой введено в известной монографии Ландау и Лифшица «Механика» [12]. Для осредненного движения эффект вибрации приводит к появлению дополнительного слагаемого потенциальной энергии (вибрационная энергия). Задача нахождения устойчивых стационарных движений таким образом сводится к поиску минимума эффективной потенциальной энергии. Эффективность использования вибрационной энергии демонстрируется в монографиях [13, 14].

В [11] вибрационная энергия выведена методом канонического осреднения уравнений, имеющих гамильтонову форму (см. [15, с.385–388]). Таким путем неавтономная гамильтонова система с достаточной точностью заменяется автономной гамильтоновой системой, и на основании теорем Боголюбова положение равновесия и устойчивость исходной неавтономной системы сводится к исследованию равновесия и устойчивости автономной гамильтоновой системы. Отсюда и возникает эффективная потенциальная энергия, точка минимума которой соответствует устойчивому равновесию. Задача устойчивого равновесия сведена к задаче на условный минимум эффективной потенциальной энергии. Благодаря найденному тождеству удается существенно упростить вибрационную энергию осредненной гамильтоновой системы, что позволило дать более простое и полное аналитическое решение обратной задачи стабилизации маятника в заданном положении с помощью косої вибрации. Найденны параметры косої вибрации с наименьшей амплитудой, стабилизирующие маятник как в нижнем полушарии, так и в верхнем. Кроме того, исследована область начальных условий, из которых вибрация с наименьшей амплитудой через достаточно большое время приводит маятник в заданное устойчивое положение. Эта область, следуя [8], названа областью притяжения.

2. Постановка задачи. Рассматривается сферический маятник: материальная точка массы m , качающаяся на невесомом нерастяжимом стержне длины l . Точка подвеса стержня с радиус-вектором \mathbf{r} движется по заданному периодическому закону с частотой ω вдоль единичного вектора $\mathbf{e}(\sin \psi, 0, \cos \psi)$, лежащего в плоскости x_1, x_3 под углом ψ к вертикальной оси x_3 (рис. 1). Такой способ вибрации, при котором скорость точки подвеса направлена по одной и той же прямой, назовем косої вибрацией.

Таким образом, для радиус-вектора точки подвеса имеем $\mathbf{r} = a \sin \omega t \mathbf{e}$, а для вектора скорости вибрации — $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = a\omega \cos \omega t \mathbf{e}$. На противоположном конце стержня с радиус-вектором $\mathbf{r} + \mathbf{R}$ находится материальная точка, к которой приложены сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила натяжения стержня \mathbf{N} , зависящая от вибрации и силы тяжести. Под действием этих сил материальная точка будет двигаться по некоторой,

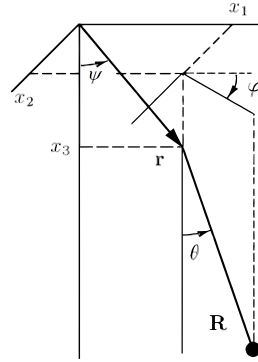


Рис. 1. Сферический маятник.

вообще говоря, непериодической траектории. Из этих движений можно выделить периодические движения. При достаточно малой амплитуде вибрации a периодическое движение будет происходить в некоторой малой окрестности вектора $\mathbf{R} = \mathbf{R}_e$. Обычно ставится прямая задача: задаются параметры вибрации (угол ψ , определяющий направление вектора \mathbf{e} и амплитуда a), следует найти углы θ_e, φ_e , задающие положение вектора \mathbf{R}_e и устойчивость периодического движения в его окрестности.

В данной работе исследуется обратная задача: по заданным углам θ_e, φ_e определить параметры вибрации ψ, a , стабилизирующие маятник в этом положении. Из множества найденных параметров вибрации будет выделена вибрация с наименьшей амплитудой. Наконец, для вибрации с наименьшей амплитудой будет найдена область притяжения (область начальных положений маятника, из которых за достаточно большое время устанавливается устойчивое периодическое движение маятника в окрестности заданного положения).

3. Гамильтониан и вибрационная энергия сферического маятника.

В сферических координатах θ, φ кинетическая T и потенциальная V энергии даются формулами

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \dot{\mathbf{r}} \right)^2, \quad V = -m(\mathbf{R} \cdot \mathbf{g}).$$

Вектор \mathbf{R} в осях x_1, x_2, x_3 имеет компоненты

$$\mathbf{R} = l(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Его полная производная определяется по теореме дифференцирования сложной функции. Точкой обозначена производная вектора \mathbf{r} по времени. С помощью приведенных формул можно выразить кинетическую T и потенциальную V энергии через сферические координаты маятника и координату вектора вибрации ψ :

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \dot{\mathbf{r}} \right)^2 = \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + b_1 \dot{\theta} + b_2 \dot{\varphi} + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2,$$

$$V = -mgl \cos \theta,$$

$$b_1 = m \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) = b'_1 m l a \omega \cos \omega t, \quad b_2 = m \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) = b'_2 m l a \omega \cos \omega t,$$

$$b'_1 = \left(\frac{1}{l} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} \cdot \mathbf{e} \right) = \cos \theta \cos \varphi \sin \psi - \sin \theta \cos \psi, \quad b'_2 = \left(\frac{1}{l} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} \cdot \mathbf{e} \right) = -\sin \theta \sin \varphi \sin \psi.$$

Функция Гамильтона, построенная по функции Лагранжа с помощью преобразования Лежандра, имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p_\theta^2}{ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{b_1}{ml^2} p_\theta - \frac{b_2}{ml^2 \sin^2 \theta} p_\varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{b_1^2}{ml^2} + \frac{b_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right) - mgl \cos \theta.$$

Несущественное для функции Гамильтона слагаемое $m\dot{\mathbf{r}}^2/2$ опущено.

В [11] было замечено, как существенно упростить гамильтониан с помощью тождества

$$(\mathbf{e}_\theta \cdot \dot{\mathbf{r}})^2 + (\mathbf{e}_\varphi \cdot \dot{\mathbf{r}})^2 + (\mathbf{e}_R \cdot \dot{\mathbf{r}})^2 = (\dot{\mathbf{r}})^2,$$

где

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{l} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{l} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sin \theta \partial \varphi}, \quad \mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{l}$$

— единичные орты сферической системы координат.

Пользуясь этим тождеством, получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{b_1^2}{ml^2} + \frac{b_2^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right) = \frac{m}{2} ((\mathbf{e}_\theta \cdot \dot{\mathbf{r}})^2 + (\mathbf{e}_\varphi \cdot \dot{\mathbf{r}})^2) = -\frac{m}{2l^2} (\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}})^2.$$

Здесь несущественное для функции Гамильтона слагаемое \mathbf{r}^2 опущено.

Точное выражение гамильтониана через сферические координаты θ, φ и импульсы p_θ, p_φ примет вид

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p_\theta^2}{ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{b_1}{ml^2} p_\theta - \frac{b_2}{ml^2 \sin^2 \theta} p_\varphi - \frac{m}{2} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{l} \right)^2 - mgl \cos \theta. \quad (1)$$

С помощью замен импульсов и времени вида

$$p_\theta = \frac{mgl}{\omega \varepsilon} P_\theta, \quad p_\varphi = \frac{mgl}{\omega \varepsilon} P_\varphi, \quad \omega t = \tau$$

гамильтониан приводится к безразмерному виду:

$$\tilde{H} = \varepsilon \left(\frac{P_\theta^2}{2} + \frac{P_\varphi^2}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\delta}{\varepsilon} \left(b'_1 P_\theta + \frac{b'_2}{\sin^2 \theta} P_\varphi \right) \cos \tau - \frac{\delta^2}{2l^2 \varepsilon^2} \cos^2 \tau (\mathbf{R} \cdot \mathbf{e})^2 - \cos \theta \right),$$

$$\varepsilon = \omega_0 / \omega, \quad \delta = a / l, \quad \omega_0 = \sqrt{g/l},$$

$$(\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}) = l (\sin \theta \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi). \quad (2)$$

Здесь ω_0 — собственная частота маятника (частота Гюйгенса). Параметры ε (отношение собственной частоты к частоте вибрации) и δ (отношение амплитуды вибрации к длине маятника) предполагаются малыми одного порядка.

Система уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\theta}, & \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\varphi}, \\ \frac{dP_\theta}{d\tau} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta}, & \frac{dP_\varphi}{d\tau} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (3)$$

приведена к стандартной форме по Боголюбову [15, с. 390]. Для этого вида уравнений Гамильтона можно применить метод канонического осреднения, по которому неавтономная гамильтонова система приближается более простой автономной гамильтоновой системой. По первой теореме Боголюбова (см. [16]) с точностью до малых второго порядка ε^2 эта система имеет гамильтониан, равный осредненному по явно входящему времени гамильтониану \tilde{H} . Осредненный гамильтониан \bar{H} упрощается:

$$\bar{H} = \varepsilon \left(\frac{P_\theta^2}{2} + \frac{P_\varphi^2}{2 \sin^2 \theta} + \Phi \right), \quad \Phi = -\frac{1}{2} C^2 \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{e})^2}{l^2} - \cos \theta. \quad (4)$$

Ему соответствует гамильтониан в размерных переменных:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{1}{2} \left(\frac{p_\theta^2}{ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{ml^2 \sin^2 \theta} \right) + \Pi, \\ \Pi &= mgl\Phi = -\frac{mg}{2l} C^2 (\mathbf{R} \cdot \mathbf{e})^2 - m(\mathbf{R} \cdot \mathbf{g}), \\ C^2 &= \frac{\delta^2}{2\varepsilon^2} = \frac{(a\omega)^2}{2gl}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь Π — эффективная потенциальная энергия. Ее первое слагаемое — вибрационная энергия, второе — потенциальная энергия силы тяжести; C — безразмерная амплитуда вибрации, в дальнейшем будет называться просто амплитудой вибрации.

Точке минимума функции

$$\Phi = -\frac{1}{2} C^2 (\sin \theta \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi)^2 - \cos \theta \quad (6)$$

соответствует устойчивое равновесие системы с осредненным гамильтонианом, а по второй теореме Боголюбова (см. [16]) этой точке соответствует устойчивое периодическое решение исходной системы.

Из условий экстремума

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$$

находится точка равновесия $\varphi_e = 0$, θ_e . Значение θ_e определяется из уравнения

$$\varphi_e = 0, \quad C^2 \sin(\theta_e - \psi) \cos(\theta_e - \psi) + \sin \theta_e = 0. \quad (7)$$

Условие устойчивости вытекает из условия минимума в точке $\theta_e, 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} &= C^2 \cos 2(\psi - \theta_e) + \cos \theta_e > 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} &= C^2 \sin \theta_e \sin \psi \cos(\psi - \theta_e) > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Свести задачу равновесия и устойчивости сферического маятника под действием вибрации к задаче на минимум возможно и другими подходами [3, 4, 12–14], но использование теорем Боголюбова позволяет упростить ее и строго обосновать.

Покажем на двух примерах, рассмотренных в учебнике Ландау и Лифшица [12, с. 121–122], как с помощью (7) и (8) решается задача равновесия и устойчивости при заданных параметрах кривой вибрации: безразмерной амплитуде C и углу ψ , который составляет вектор скорости вибрации с вертикальной осью.

Случай 1 вертикальной вибрации точки подвеса: $v = a\omega \cos \omega t$, $\omega \gg \sqrt{g/l}$, $\psi = 0$. Из уравнения равновесия (7) в виде $C^2 \cos \theta_e \sin \theta_e + \sin \theta_e = 0$ найдем три точки равновесия $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ и $\cos \theta_3 = -1/C^2$, $C > 1$. Для первой точки равновесия условие устойчивости (8) $C^2 + 1 > 0$ выполнено всегда, для второй точки условие устойчивости (8) выполняется при $C^2 > 1$ и для третьей точки условие устойчивости $1/C^2 - C^2 > 0$ не может быть выполнено, так как $C > 1$. Результат в точности соответствует решению в [12].

Случай 2 горизонтальной вибрации точки подвеса $v = a\omega \sin \omega t$, $\omega \gg \sqrt{g/l}$, $\psi = \pi/2$. Из уравнения равновесия (7) найдем три точки равновесия: $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ и $\cos \theta_3 = 1/C^2$, $C > 1$. Условие устойчивости (8) имеет вид $C^2(-2 \cos^2 \theta_e + 1) + \cos \theta_e > 0$. Для первой точки условие устойчивости (8) $C^2 + 1 > 0$ выполнено при $C^2 < 1$, для второй точки оно никогда не выполняется и для третьей точки условие устойчивости (8) сводится к неравенству $C^2 - 1/C^2 > 0$ и выполнено при $C > 1$. Результат также совпадает с решением в [12].

4. Стабилизация заданного положения маятника косо́й вибрацией с минимальной амплитудой. Для управления положением равновесия маятника необходимо решить следующую задачу: для заданного вектора \mathbf{R}_e найти амплитуду вектора вибрации C и его угол с вертикалью ψ , чтобы было удовлетворено уравнение равновесия (7) и выполнено условие устойчивости (8).

Рассмотрим решение этой задачи, когда вектор \mathbf{R}_e расположен в нижней полусфере, то есть угол θ_e , определяющий положение вектора, изменяется в следующих пределах: $0 \leq \theta_e \leq \pi/2$.

Обозначим через M_e множество значений параметров вибрации C, ψ , удовлетворяющих уравнению равновесия (7) $C^2 = 2 \sin \theta_e / \sin(2(\psi - \theta_e))$ при заданном положении равновесия θ_e , через M_s — множества значений параметров вибрации C, ψ , удовлетворяющих уравнению равновесия (7) и условию устойчивости (8) одновременно при заданном положении равновесия θ_e . Назовем множество M_e множеством равновесия, а множество M_s — множеством устойчивости.

Для описания множеств равновесия и устойчивости удобно ввести параметр $\xi = 2(\psi - \theta_e)$. Из уравнения равновесия (7) следует, что параметр ξ находится в интервале $0 < \xi < \pi$. Множества M_e и M_s образуют следующие однопараметрические семейства с параметром $\xi = 2(\psi - \theta_e)$:

$$\begin{aligned} M_e : \quad & 0 < \xi < \pi, \quad C^2 = 2 \sin \theta_e / \sin \xi; \\ M_s : \quad & 0 < \xi < \xi_s = \pi - \arctg(2 \operatorname{tg} \theta_e), \quad C^2 = 2 \sin \theta_e / \sin \xi. \end{aligned}$$

Выделим из множества M_s параметры вибрации с наименьшей амплитудой. В нижней полусфере $0 \leq \theta_e \leq \pi/2$ для такого режима получаем следующие формулы:

$$C^2 = 2 \sin \theta_e, \quad \sin \xi = 1 \Rightarrow \xi = \pi/2 \Rightarrow \psi = \theta_e + \pi/4. \quad (9)$$

Условие устойчивости (8) принимает вид $\cos \theta_e > 0$ и очевидно выполнено в нижней полусфере $0 \leq \theta_e < \pi/2$.

Для верхней полусферы $\pi/2 \leq \theta_e \leq \pi$ минимальное значение амплитуды и угол $\psi - \theta_e$ находятся из уравнения равновесия 7 и нижней границы неравенств (8):

$$C^2 \sin 2(\psi - \theta_e) = 2 \sin \theta_e, \quad C^2 \cos 2(\psi - \theta_e) = -\cos \theta_e.$$

Рис. 2. Вектор $\mathbf{C} = C\mathbf{e}$ вибрации с наименьшей амплитудой.

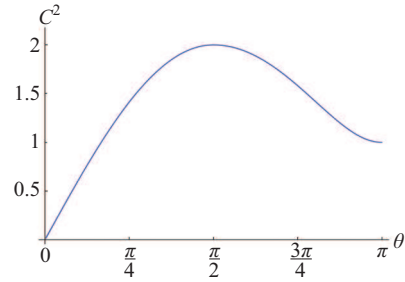
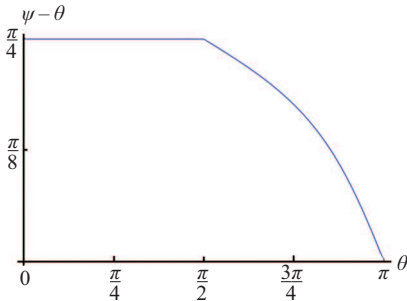
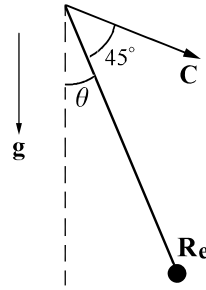


Рис. 3. Вибрация с минимальной амплитудой.

Из решения этой системы для $\pi/2 \leq \theta_e \leq \pi$ получаем

$$C^2 = \sqrt{4 \sin^2 \theta_e + \cos^2 \theta_e}, \quad \psi - \theta_e = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-2 \operatorname{tg} \theta_e). \quad (10)$$

Окончательный результат таков: для того чтобы режим вибрации в точке равновесия \mathbf{R}_e , расположенной в нижней полусфере $0 \leq \theta \leq \pi/2$, имел наименьшую амплитуду ($(a\omega)^2/(gl) = \min$), точку подвеса следует колебать с вектором скорости

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = a\omega \mathbf{e} \cos \omega t = C\sqrt{2gl} \mathbf{e} \cos \omega t,$$

расположенным в одной плоскости с вектором \mathbf{R}_e и вертикалью. Параметры вибрации с наименьшей амплитудой имеют следующие значения: $\psi - \theta_e = 45^\circ$, $C^2 = \frac{(a\omega)^2}{2gl} = 2 \sin \theta_e$ (рис. 2).

Для верхней полусферы $\pi/2 < \theta < \pi$ наименьшая безразмерная амплитуда и угол вибрации определяются по формулам (10).

Характер устойчивости маятника в точке θ_e под действием вибрации с наименьшей амплитудой зависит от значения θ_e . Для нижней полусферы $\theta_e \in (0, \pi/2)$ точка θ_e является точкой строгого минимума эффективной потенциальной энергии и периодическое движение в окрестности этой точки устойчиво.

Для верхней полусферы $\theta_e \in [\pi/2, \pi]$ точкой минимума не является. Точка θ_e будет точкой строгого минимума при любом малом увеличении амплитуды вибрации и периодическое движение будет устойчивым.

На рис. 3 изображены зависимости $\psi - \theta_e$ и минимальной безразмерной амплитуды C^2 от угла θ_e .

5. Область притяжения для управления маятником с минимальной амплитудой вибрации. Поставим задачу определения начальных условий, из которых маятник под действием вибрации с минимальной амплитудой примет заданное положение θ_e . Частный случай такой задачи изучен в [8]: найдена область начальных условий, для которых маятник под действием вертикальной вибрации примет устойчивое положение в верхней вертикальной точке. Область начальных значений в [8] назовем областью притяжения.

Поставим задачу определения области притяжения для вибрации (9) с наименьшей амплитудой, когда положение маятника задано в произвольной точке, находящейся в нижней полусфере $0 \leq \theta_e < \pi/2$.

С учетом демпфирующего момента с коэффициентом α уравнения плоского движения маятника (3) и начальные условия примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\theta}, & \frac{dP_\theta}{d\tau} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} - \alpha P_\theta, \\ \tilde{H} &= \varepsilon \left(\frac{P_\theta^2}{2} + \frac{\delta}{\varepsilon} b'_1 P_\theta \cos \tau + \Phi - \frac{1}{4} C^2 \cos 2(\theta - \psi) \cos 2\tau \right), \\ \Phi &= -\frac{1}{4} C^2 \cos(2\theta - 2\theta_e) - \cos \theta, \\ \theta(0) &= \theta_0, & P_\theta(0) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения осредненного движения имеют гамильтониан (4). Для плоского случая гамильтониан, уравнения с учетом демпфирующего момента с коэффициентом α и начальные условия таковы:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \varepsilon \left(\frac{P_\theta^2}{2} + \Phi \right), & \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial P_\theta}, & \frac{dP_\theta}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} - \alpha P_\theta, \\ \theta(0) &= \theta_0, & P_\theta(0) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Для вибрации с наименьшей амплитудой величина C и угол ψ определяются по формулам (9). С их помощью потенциальная энергия приводится к виду

$$\Phi = -\frac{1}{2} \sin \theta_e \sin(2\theta - 2\theta_e) - \cos \theta.$$

Соотношения (12) можно записать в виде уравнения второго порядка для угла θ :

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + \varepsilon^2 \frac{d\Phi}{d\theta} = 0. \quad (13)$$

Поскольку для осредненного движения $\dot{\theta} = \varepsilon P_\theta$, то начальные условия примут вид

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0. \quad (14)$$

Важно отметить, что в полном уравнении (11) из начального условия для импульса $P_\theta = 0$ не следует условие $\dot{\theta}(0) = 0$.

По первой теореме Боголюбова (доказательство см. [16, с. 78–84]) при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения задач Коши полной (11) и осредненной (12) систем приближаются друг к другу на достаточно большом интервале времени. Если решение осредненной системы асимптотически устойчиво, то по теореме К. Банфи решения систем (11) и (12) приближаются друг к другу на бесконечном интервале времени.

Уравнение (13) имеет закон изменения энергии в виде

$$\frac{dE}{d\tau} = -\alpha\dot{\theta}^2, \quad E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \varepsilon^2\Phi. \quad (15)$$

Из уравнения (15) следует, что функция $E(\theta, \dot{\theta})$ в окрестности точки минимума $\Phi(\theta)$ удовлетворяет всем условиям функции Ляпунова. Отсюда по теореме Ляпунова следует, что в точке минимума функции $\Phi(\theta)$ равновесие при $\alpha > 0$ асимптотически устойчиво. По второй теореме Боголюбова точке равновесия осредненного движения соответствует периодическое движение маятника, и оно тоже будет асимптотически устойчивым [16].

Назовем θ_0 точкой притяжения к положению равновесия θ_e , если решение задачи Коши (13), (14) стремится к положению равновесия $\theta(\tau) \rightarrow \theta_e$, при $\tau \rightarrow \infty$.

Функция $\Phi(\theta)$ имеет точку минимума и точку максимума. Они определяются из уравнения

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = -\sin\theta_e \cos(2\theta - 2\theta_e) + \sin\theta = 0. \quad (16)$$

Это уравнение имеет два корня. Первый корень очевиден: $\theta = \theta_e$. Он соответствует точке минимума функции Φ . Для определения второго корня сделаем замену $\theta_e - \theta = \xi$ и полученное уравнение (16) преобразуем:

$$-\sin\theta_e \cos 2\xi + \sin(\theta_e - \xi) = 0 \Rightarrow \sin \frac{\xi}{2} \left(\left(4 \cos^2 \frac{\xi}{2} - 1 \right) \sin \frac{\xi}{2} \sin \theta_e - \cos \theta_e \cos \frac{\xi}{2} \right) = 0.$$

Таким образом, получаем два уравнения. Первое уравнение $\sin \frac{\xi}{2} = 0$ имеет корень $\xi = 0$, соответствующий точке минимума $\theta = \theta_e$ функции $\Phi(\theta)$.

Уравнение для второго корня удобно представить в виде

$$\left(4 \cos^2 \frac{\xi}{2} - 1 \right) \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} - \operatorname{ctg} \theta_e = 0.$$

Умножением на $\operatorname{tg}^2 \frac{\xi}{2} + 1 = 1/\cos^2 \frac{\xi}{2}$ оно приводится к кубическому уравнению относительно $t = \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}$:

$$t^3 + \operatorname{ctg} \theta_e t^2 - 3t + \operatorname{ctg} \theta_e = 0.$$

При $\theta_e \in [\pi/4, \pi/2]$ это уравнение имеет три действительных корня. Для определения точки максимума θ_{\max} функции $\Phi(\theta)$ следует выбрать ветвь, зависящую от точки равновесия $t(\theta_e)$, которая удовлетворяет условию $t(\pi/2) = 0$. Требуемый корень θ_{\max} в зависимости от θ_e удобно представить в параметрической форме:

$$\theta_e = \operatorname{arctg} \left(\frac{1+t^2}{3t-t^3} \right), \quad \theta_{\max} = \theta_e - 2\operatorname{arctg}(t). \quad (17)$$

Параметр t меняется в интервале $t \in (0, \sqrt{2}-1)$; $t=0$: $\theta_e = \theta_{\max} = \pi/2$; $t = \sqrt{2}-1$: $\theta_e = \pi/4$, $\theta_{\max} = 0$.

Полезна также аппроксимация $\theta_{\max} \approx \frac{\pi}{2} - 1.697 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_e \right) - 0.8 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_e \right)^5$, погрешность которой не превосходит значения 0.004.

Таким образом, потенциальная энергия $\Phi(\theta)$ имеет минимум в точке равновесия $\theta_{\min} = \theta_e$ и максимум в точке θ_{\max} . Графики зависимостей точек θ_{\min} и θ_{\max} от точки равновесия θ_e приведены на рис. 4.

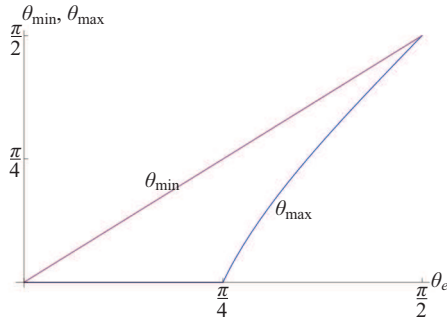


Рис. 4. Зависимости точки минимума θ_e и точки максимума θ_{\max} от заданной точки равновесия.

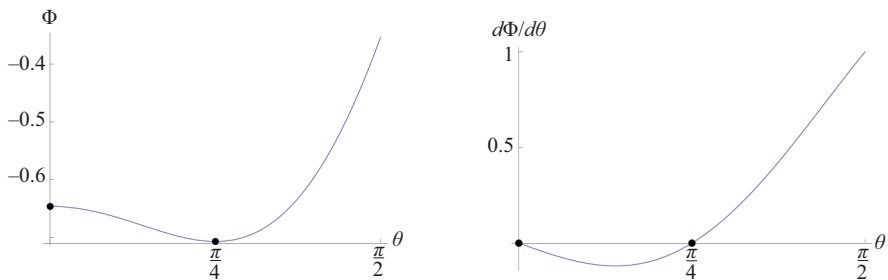


Рис. 5. Потенциальная энергия $\Phi(\theta)$ и ее производная $d\Phi(\theta)/d\theta$ при $\theta_e = \pi/4$.

Если заданная точка равновесия удовлетворяет неравенству $\theta_e < \pi/4$, то на отрезке $\theta \in (0, \pi)$ производная потенциальной энергии $d\Phi/d\theta$ имеет один корень в точке равновесия $\theta = \theta_e$. Эта точка является точкой минимума потенциальной энергии $\Phi(\theta)$. При $\theta_e = \pi/4$ кроме корня $\theta = \theta_e$ появляется второй корень производной $d\Phi/d\theta$ в точке $\theta = 0$. Корни $\theta = 0$ и $\theta = \pi/4$ являются точками максимума и минимума функции $\Phi(\theta)$.

Рассмотрим область $0 \leq \theta \leq \pi/4$. На рис. 5 изображены зависимости функций $\Phi(\theta)$ и ее производной $d\Phi(\theta)/d\theta$ при $\theta_e = \pi/4$. Из рис. 5 видно, что производная $d\Phi(\theta)/d\theta$ отрицательна, а сила $-d\Phi(\theta)/d\theta$ положительна и направлена к точке равновесия θ_e . Значит, все точки отрезка $\theta \in (0, \pi/2)$ являются точками притяжения к точке равновесия. Областью притяжения является весь отрезок $\theta \in (0, \pi]$, то есть при любом начальном условии решение задачи (13), (14) $\theta(\tau)$ стремится к заданному положению равновесия θ_e .

При $\pi/4 < \theta_e \leq \pi/2$ производная $d\Phi(\theta)/d\theta$ на отрезке $\theta \in (0, \pi)$ имеет два корня. Первая точка $\theta = \theta_e$ экстремума функции $\Phi(\theta)$ — это точка минимума функции $\Phi(\theta)$. Вторая точка экстремума $\theta = \theta_{\max}$, определяемая по формуле (17) — точка максимума функции $\Phi(\theta)$. Областью притяжения является интервал (θ_{\max}, π) .

На рис. 6 изображены зависимости функций $\Phi(\theta)$ и ее производной $d\Phi(\theta)/d\theta$ при $\theta_e = 3\pi/8$. Точки максимума и минимума в этом случае имеют следующие численные значения:

$$\theta_{\max} \approx 0.896, \quad \theta_{\min} = \theta_e = 3\pi/8 \approx 1.178.$$

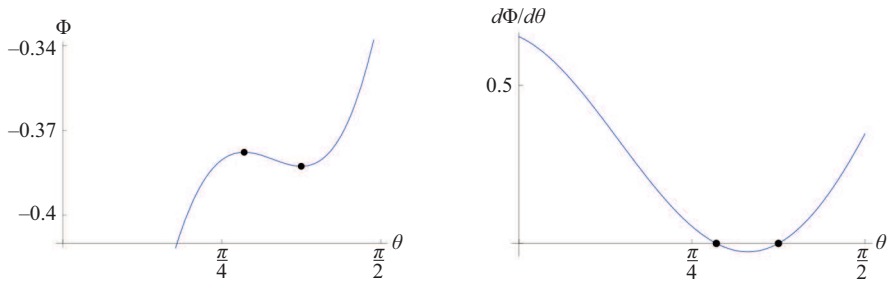


Рис. 6. Потенциальная энергия $\Phi(\theta)$ и ее производная $d\Phi(\theta)/d\theta$ при $\theta_e = 3\pi/8$.

Точки притяжения для $\theta_e = 3\pi/8$ подчинены неравенству $\theta > 1.178$. Для начальных условий $\theta_0 > 1.178$ решение задачи (13), (14) $\theta(\tau)$ стремится к заданному положению равновесия $\theta_e = 3\pi/8$.

Сформулируем окончательный результат:

Под действием вибрации с амплитудой C и углом ψ , определяемых по формулам (9), маятник перейдет в заданное положение равновесия из интервала $\theta \in (\theta_e, \pi/4)$ из любого начального положения; перейдет в заданное положение равновесия из интервала $\theta_e \in (\pi/4, \pi/2)$ из начального положения $\theta_0 \in (\theta_{\max}(\theta_e), \pi)$, где функция $\theta_{\max}(\theta_e)$ определена формулой (17).

В терминах области притяжения формулировка такова:

При $\theta_e \leq \pi/2$ область притяжения является весь отрезок $\theta_0 \in (0, \pi)$. При $\pi/4 < \theta_e \leq \pi/2$ область притяжения ограничена снизу $\theta_0 \in (\theta_{\max}, \pi)$. С ростом θ_e длина интервала области притяжения снизу от точки равновесия $\theta_e - \theta_{\max}$ монотонно убывает от значения $\pi/2$ при $\theta_e = \pi/4$ до нуля при $\theta_e = \pi/2$.

При вибрации с минимальной амплитудой для положения маятника в верхней полусфере $\pi/2 < \theta_e \leq \pi$ точки минимума и максимума эффективной потенциальной энергии сливаются и длина интервала притяжения равна нулю. При любом как угодно малом увеличении амплитуды вибрации (10) длина интервала области притяжения становится положительной.

6. Численный эксперимент. Проведем сравнение решений, полученных из осредненных уравнений (12) с решениями точных уравнений (11) при вибрации с наименьшей амплитудой (9) $2C^2 = \varepsilon^2/\delta^2 = 4 \sin \theta_e$, $\psi = \theta_e + \pi/4$.

На рис. 7 приведены решения осредненной (12) (рис. 7, а) и точной (11) (рис. 7, б, в) систем при вибрации с наименьшей амплитудой при $\varepsilon = 0.05$, заданном положении равновесия $\theta_e = \pi/4$ и начальном условии $\theta(0) = 0.001$, близким к границе области притяжения. Как следует из теории, в этом случае при любых начальных данных из области притяжения $\theta_0 \in (0, \pi)$ маятник выходит за достаточно большое время на заданное равновесное значение. На рис. 7, б показан переходный процесс от начального положения до установления периодического решения. Периодическое решение изображено на рис. 7, в в растянутом масштабе на отрезке времени (9980, 10000).

На рис. 8 приведены решения осредненной (12) и точной (11) систем уравнений при вибрации с наименьшей амплитудой при $\varepsilon = 0.01$, заданном положении равновесия $\theta_e = 3\pi/8$ и начальном условии $\theta(0) = \theta_{\max} + 0.01$, близким к границе области притяжения. Начальное данное находится в области притяжения $\theta_0 \in (\theta_{\max}, \pi)$ и, в

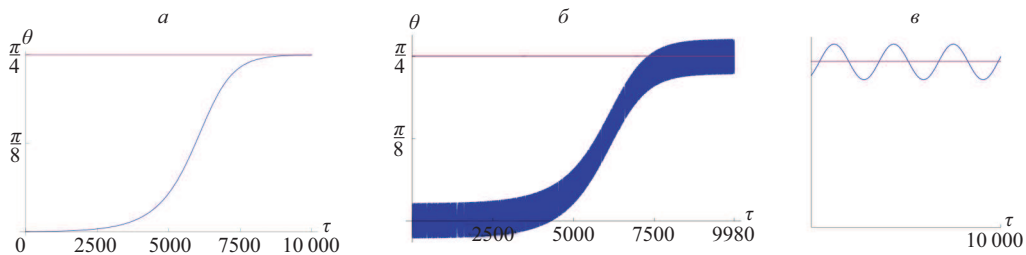


Рис. 7. Решение осредненной (12) и точной (11) систем уравнений при $\theta_e = \pi/4$.

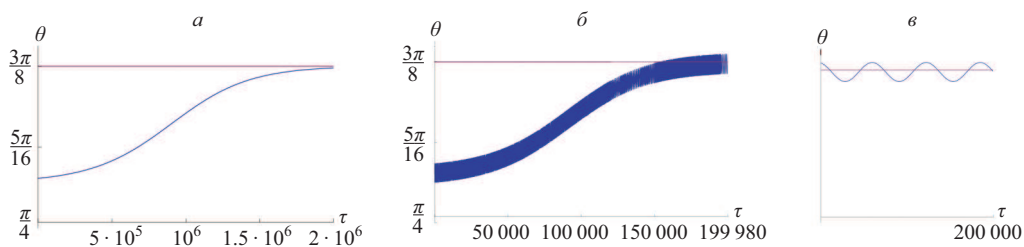


Рис. 8. Решение осредненной (12) и точной (11) систем уравнений при $\theta_e = 3\pi/8$.

согласии с теорией, маятник выходит за достаточно большое время на заданное равновесное значение. Переходный процесс от начального положения до установления периодического решения показан на рис. 8, б. В окрестности $\theta_e = 3\pi/8$ устанавливается периодическое движение, которое изображено на рис. 8, в в растянутом масштабе на отрезке времени (19980, 200000).

Осредненное и точное решения в обоих примерах соответствуют друг другу. В обоих примерах начальное значение θ_0 выбрано достаточно близким к границе области притяжения $\theta = \theta_{\max}$. Время выхода на заданное равновесное значение увеличивается при приближении начального условия к границе области притяжения. Как только начальное условие выходит за пределы области притяжения, решения как точных, так и осредненных уравнений выходят на другой режим равновесия, отличный от заданного значения θ_e .

7. Заключение. В работе рассмотрена обратная задача стабилизации сферического маятника в заданном положении с помощью вибрации точки подвеса. При заданном положении маятника θ_e получены простые аналитические зависимости для параметров кривой вибрации, стабилизирующие маятник в заданном положении. Найдены параметры вибрации с минимальной амплитудой, при которой равновесие заданного положения маятника устойчиво. При наличии демпфирующего момента найдена область начальных условий $\theta(0) = \theta_0$, $P_\theta = 0$, из которых вибрация с наименьшей амплитудой через достаточно большое время переводит маятник в заданное устойчивое положение. Эта область, следуя [8], названа областью притяжения. Длина интервала области притяжения для вибрации с наименьшей амплитудой уменьшается до нуля при увеличении заданного равновесного угла маятника до 90 градусов. При дальнейшем увеличении равновесного угла маятника до 180 градусов, соответствующего верхнему положению маятника, длина области притяжения остается нулевой. Поэтому для стабилизации маятника в положениях от 90 до 180 градусов амплитуду вибрации следует выбирать немного больше минимальной.

При увеличении амплитуды длина интервала притяжения тоже растет. Проведено сравнение осредненной траектории маятника с точной. При достаточно малых параметрах ε и δ осредненная траектория соответствует точной. Условия равновесия и устойчивости для осредненной и точной систем совпадают в соответствии с теоремами Боголюбова.

Автор благодарит проф. А. А. Тихонова за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

Литература

1. Stephenson A. On a new type of dynamical stability. *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society* **52** (8), 1–10 (1908).
2. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике. В: *Сб. тр. Ин-та строят. механики АН УССР*, (14), 9–34 (1950).
3. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. *Журн. эксперим. и теорет. физики* **21**, вып. 5, 588–598 (1951).
4. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом. *Успехи физических наук* **44**, вып. 1, 7–20 (1951).
5. Богаевский В. Н., Повзнер А. Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. Москва, Наука (1987).
6. Акуленко Л. Д. Асимптотический анализ динамических систем подверженных высокочастотным воздействиям. *ПММ* **58**, вып. 3, 23–31 (1994).
7. Маркеев А. П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом. *ПММ* **63**, вып. 2, 213–219 (1999).
8. Морозов Н. Ф., Беляев А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Области притяжения в обобщенной задаче Капицы. *Доклады Академии наук* **487** (5), 502–506 (2019). <https://doi.org/10.31857/S0869-56524875502-506>
9. Морозов Н. Ф., Беляев А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Устойчивость вертикального стержня на вибрирующей опоре. *Доклады Академии наук* **482** (2), 155–159 (2018).
10. Беляев А. К., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Устойчивость гибкого вертикального стержня на вибрирующем основании. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **5** (63), вып. 3, 477–488 (2018). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.311>
11. Буланчук П. О., Петров А. Г. Об управлении движением сферического маятника с помощью вибрации точки подвеса. *Доклады Академии наук* **430** (5), 627–630 (2010).
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика*. Москва, Наука (1965).
13. Стрижак Т. Г. *Метод усреднения в задачах механики*. Киев, Донецк, Вища школа (1982).
14. Блехман И. И. *Вибрационная механика*. Москва, Физматлит (1994).
15. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Москва, Наука (1974).
16. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. *Прикладные методы в теории колебаний*. Москва, Наука (1988).

Статья поступила в редакцию 13 июля 2020 г.;
после доработки 14 августа 2020 г.;
рекомендована в печать 17 декабря 2020 г.

Контактная информация:

Петров Александр Георгиевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; petrovipmech@gmail.com

The inverse problem of stabilization of a spherical pendulum in a given position under oblique vibration*

A. G. Petrov

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
101, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation

For citation: Petrov A. G. The inverse problem of stabilization of a spherical pendulum in a given position under oblique vibration. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 2, pp. 255–269.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.206> (In Russian)

The inverse problem is posed of stabilizing a spherical pendulum (a mass point at the end of a weightless solid rod of length l) in a given position using high-frequency vibration of the suspension point. The position of the pendulum is determined by the angle between the pendulum rod and the gravity acceleration vector. For any given position of the pendulum, a series of oblique vibration parameters (amplitude of the vibration velocity and the angle between the vibration velocity vector and the vertical) were found that stabilize the pendulum in this position. From the obtained series of solutions, the parameters of optimal vibration (vibration with a minimum amplitude of velocity) are selected depending on the position of the pendulum. The region of initial conditions is studied, of which the optimal vibration leads the pendulum to a predetermined stable position after a sufficiently long time. This area, following N. F. Morozov et al., called the area of attraction.

Keywords: spherical pendulum, stability, vibration of the suspension point, inverse problem.

References

1. Stephenson A. On a new type of dynamical stability. *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society* **52** (8), 1–10 (1908).
2. Bogolyubov N. N. Perturbation theory in nonlinear mechanics. In: *Sbornik trudov Instituta stroitel'noj mekhaniki AN USSR*, (14), 9–34 (1950). (In Russian)
3. Kapica P. L. Dynamic stability of a pendulum at an oscillating suspension point. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **21**, iss. 5, 588–598 (1951). (In Russian)
4. Kapica P. L. A pendulum with a vibrating suspension. *Uspekhi fizicheskikh nauk* **44**, iss. 1, 7–20 (1951). (In Russian)
5. Bogaevskij V. N., Povzner A. Ja. *Algebraic methods in nonlinear perturbation theory*. Moscow, Nauka Publ. (1987). (In Russian)
6. Akulenko L. D. Asymptotic analysis of dynamic systems exposed to high frequency influences. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **58**, iss. 3, 23–31 (1994). (In Russian)
7. Markeev A. P. On the dynamics of a spherical pendulum with a vibrating suspension. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **63**, iss. 2, 213–219 (1999). (In Russian)
8. Morozov N. F., Beljaev A. K., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Regions of attraction in the generalized Kapitza problem. *Doklady Akademii nauk* **487** (5), 502–506 (2019). <https://doi.org/10.31857/S0869-56524875502-506> (In Russian)
9. Morozov N. F., Beljaev A. K., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Stability of the vertical rod on the vibrating support. *Doklady Akademii nauk* **482** (2), 155–159 (2018). (In Russian)
10. Belyaev A. K., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Stability of a flexible vertical rod on the vibrating support. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5** (63), iss. 3, 477–488 (2018). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.311> (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersburg Univ., Math.* **51**, 296–304 (2018). <https://doi.org/10.3103/S1063454118030020>].
11. Bulanchuk P. O., Petrov A. G. On controlling the motion of a spherical pendulum by vibrating the suspension point. *Doklady Akademii nauk* **430** (5), 627–630 (2010). (In Russian)
12. Landau L. D., Lifshic E. M. *Mechanics*. Moscow, Nauka Publ. (1965). (In Russian)

*The work was performed on state assignment (no. AAA-A20-120011690138-6).

13. Strizhak T. G. *Averaging method in problems of mechanics*. Kiev, Donetsk, Vishha shkola Publ. (1982). (In Russian)
14. Blehman I. I. *Vibration mechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ. (1994). (In Russian)
15. Bogoljubov N. N., Mitropol'skij Ju. A. *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*. Moscow, Nauka Publ. (1974). (In Russian)
16. Zhuravlev V. F., Klimov D. M. *Applied methods in the theory of oscillations*. Moscow, Nauka Publ. (1988). (In Russian)

Received: July 13, 2020
Revised: August 14, 2020
Accepted: December 17, 2020

Author's information:

Alexander G. Petrov — petrovipmech@gmail.com

ХРОНИКА

11 ноября 2020 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН выступил профессор С. В. Потапенко (Department of Civil Engineering, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada) с докладом на тему «Некоторые актуальные задачи механики неоднородных сред: теория и приложения».

Краткое содержание доклада:

В докладе обсуждается основополагающая микрополярная модель для трансверсально изотропного композитного линейно упругого материала, включающего полимерную матрицу основу и однонаправленные волокна. Кроме того, рассматривается ряд интересных краевых задач, возникающих в механике композитов согласно положениям микрополярной упругости для однородных, изотропных, линейно упругих материалов. Эти задачи формулируются в классических и соболевских (слабых) пространствах. Для получения аналитических решений этих задач применяется метод граничных интегральных уравнений. Представлен ряд примеров и приложений из области механики композитов, биомеханики и механики горных пород.