

## Устойчивость цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевыми пластинами, под действием внешнего давления\*

*С. Б. Филиппов*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Филиппов С. Б.* Устойчивость цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевыми пластинами, под действием внешнего давления // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 2. С. 282–294. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.208>

С помощью асимптотического метода исследована устойчивость под действием равномерного внешнего давления тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной одинаковыми кольцевыми пластинами. Выведены граничные условия на внутренней параллели оболочки, сопряженной с тонкой пластиной. На краях оболочки заданы условия шарнирного опирания. Решение краевой задачи на собственные значения ищется в виде суммы функций, описывающих полубезмоментное напряженно-деформируемое состояние оболочки, и интегралов краевого эффекта. Для постановки краевой задачи нулевого приближения получены главные граничные условия на параллели сопряжения пластины и оболочки. Задача нулевого приближения описывает также колебания шарнирно опертой балки, подкрепленной пружинами. Ее решение ищется в виде линейных комбинаций функций Крылова. Показано, что в нулевом приближении при малой ширине пластины ее можно заменить круговым стержнем. При увеличении ширины пластины жесткость соответствующей ей пружины стремится к постоянной величине, что связано с локализацией напряженно-деформируемого состояния пластины вблизи внутреннего края пластины. В качестве примера найден параметр критического давления для случая, когда оболочка подкреплена одной пластиной. Замена узкой пластины круговым стержнем не приводит к заметному изменению критического давления, однако для широкой пластины стержневая модель дает завышенное значение критического давления.

*Ключевые слова:* подкрепленная цилиндрическая оболочка, устойчивость, кольцевая пластина, асимптотический метод, краевая задача.

**1. Введение.** В многочисленных монографиях [1–5] и статьях [6–8], посвященных теории подкрепленных оболочек, шпангоуты рассматривались как круговые стержни. Однако, если высота шпангоута достаточно велика, более подходящей моделью для него является кольцевая пластина. В теории подкрепленных оболочек принято называть высотой шпангоута тот его размер, которым для кольцевой пластины является ее ширина. В дальнейшем термины «высота шпангоута» и «ширина пластины» будут использоваться как синонимы.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00208).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

В задаче об устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки величина критического внешнего давления существенно зависит от жесткости шпангоута на изгиб в его плоскости [4, 7]. При использовании стержневой модели шпангоута эта жесткость быстро возрастает с увеличением высоты шпангоута и в пределе стремится к бесконечности. В действительности, как показывают исследования более точной пластиночной модели шпангоута, с увеличением высоты шпангоута его жесткость приближается к конечному пределу. Это происходит благодаря тому, что для широкой пластины напряженно-деформированное состояние локализуется вблизи ее внутреннего края. Замечание Петра Евгеньевича Товстика об этой локализации, высказанное во время нашей прогулки, дало начало циклу исследований устойчивости и колебаний оболочек, подкрепленных кольцевыми пластинами.

Для цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной по краю, предельное значение жесткости было найдено и использовано для приближенного вычисления критического давления в работе [9]. В статье [10] для жесткости кольцевой пластины, сопряженной с краем оболочки, выведена общая формула, которая при уменьшении ширины пластины превращается в соотношение, соответствующее стержневой модели, а при увеличении ширины стремится к найденному в [10] предельному значению. На основании этой формулы разработан алгоритм приближенного определения критического давления для шпангоутов любой высоты.

В данной работе аналогичные результаты получены для пластины, расположенной на внутренней параллели срединной поверхности цилиндрической оболочки. Для реальных конструкций (корпусов самолетов, ракет, подводных лодок и котлов высокого давления) характерной является установка шпангоутов на внутренних параллелях оболочек.

**2. Постановка задачи и основные уравнения.** Рассмотрим задачу о потере устойчивости безмоментного напряженного состояния подкрепленной  $n_s$  одинаковыми шпангоутами цилиндрической оболочки под действием равномерного бокового внешнего давления  $p$  (рис. 1). Предположим, что оболочка и шпангоуты изготовлены из одного материала, шпангоуты имеют прямоугольное поперечное сечение и расположены снаружи оболочки.

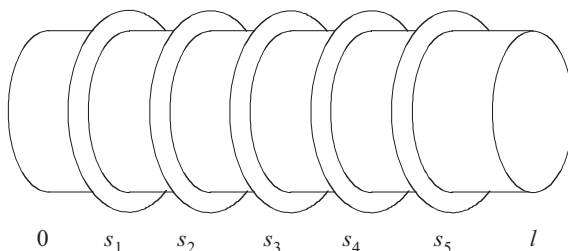


Рис. 1. Оболочка, подкрепленная шпангоутами.

Выберем за единицу длины радиус цилиндрической оболочки и запишем систему уравнений устойчивости оболочки (см. [4, 11]) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} T_1^{(k)'} + mS^{(k)} &= 0, & S^{(k)'} - mT_2^{(k)} + Q_2^{(k)} + 2H^{(k)'} &= 0, \\ Q_1^{(k)'} + mQ_2^{(k)} - T_2^{(k)} + \lambda m\vartheta_2^{(k)} &= 0, & Q_1^{(k)} &= M_1^{(k)'} + 2mH^{(k)}, \\ Q_2^{(k)} = -mM_2^{(k)}, & M_1^{(k)} = \mu^4(\vartheta_1^{(k)'} + \nu m\vartheta_2^{(k)}), & M_2^{(k)} &= \mu^4(m\vartheta_2^{(k)} + \nu\vartheta_1^{(k)'}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H^{(k)} &= 2\mu^4 \gamma \vartheta_2^{(k)'}, & S^{(k)} &= \gamma(v^{(k)'} - mu^{(k)}), & T_1^{(k)} &= u^{(k)'} + \nu(w^{(k)} + mv^{(k)}), \\
 T_2^{(k)} &= w^{(k)} + mv^{(k)} + \nu v^{(k)'}, & \vartheta_1^{(k)} &= -w^{(k)'}, & \vartheta_2 &= mw^{(k)} + v^{(k)}, & \gamma &= \frac{1-\nu}{2},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где штрихом обозначена производная по безразмерной длине дуги меридиана  $s \in [0, l]$ ,  $l$  — безразмерная длина оболочки,  $m$  — число волн по параллели,  $Q_1^{(k)}$ ,  $Q_2^{(k)}$ ,  $T_1^{(k)}$ ,  $T_2^{(k)}$ ,  $S^{(k)}$  — усилия,  $M_1^{(k)}$ ,  $M_2^{(k)}$ ,  $H^{(k)}$  — моменты,  $\vartheta_1^{(k)}$ ,  $\vartheta_2^{(k)}$  — углы поворота,  $u^{(k)}$ ,  $v^{(k)}$ ,  $w^{(k)}$  — проекции перемещений точек срединной поверхности,  $\lambda = \sigma\rho/(Eh)$  — искомый параметр нагружения,  $\sigma = 1 - \nu^2$ ,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\mu^4 = h^2/12$  — малый параметр,  $h$  — безразмерная толщина оболочки. Функции  $y^{(k)}$  заданы в интервалах  $s \in [s_{k-1}, s_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n = n_s + 1$ ,  $s_k$  — координаты подкрепленных параллелей при  $k = 1, 2, \dots, n_s$ ,  $s_0 = 0$ ,  $s_n = l$ .

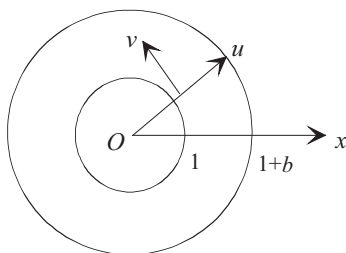


Рис. 2. Кольцевая пластина.

Шпангоут рассматривается как кольцевая пластина. Деформацию кольцевой пластины в ее плоскости (рис. 2) описывают безразмерные уравнения [10]:

$$\begin{aligned}
 (xT_1)' - T_2 + mS &= 0, & xS' + 2S - mT_2 &= 0, & xS &= \gamma(xv' - mu - v), \\
 xT_1 &= xu' + \nu(mv + u), & xT_2 &= u + mv + \nu xu',
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где  $( )'$  обозначает производную по радиальной координате  $x \in [1, 1+b]$ ,  $b$  — безразмерная ширина кольцевой пластины (высота шпангоута),  $u$  и  $v$  — тангенциальные компоненты перемещения,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $S$  — безразмерные усилия.

Будем считать, что пластины достаточно тонкие, поэтому пренебрежем их жесткостью на изгиб по сравнению с жесткостью на растяжение. В этом случае граничные условия на параллели сопряжения имеют вид

$$v^{(k)} = v^{(k+1)}, \quad u^{(k)} = u^{(k+1)}, \quad T_1^{(k)} = T_1^{(k+1)}, \tag{3}$$

$$w^{(k)} = w^{(k+1)}, \quad \vartheta_1^{(k)} = \vartheta_1^{(k+1)}, \quad M_1^{(k)} = M_1^{(k+1)}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 w^{(k)} &= u(1), & v^{(k)} &= v(1), & h(Q_1^{(k)} - Q_1^{(k+1)}) &= aT_1(1), \\
 h(S^{(k)} - S^{(k+1)}) &= aS(1), & s &= s_k, & k &= 1, 2, \dots, n_s.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Здесь  $a$  — безразмерная толщина пластины.

Предположим, что края оболочки шарнирно оперты:

$$T_1^{(1)} = v^{(1)} = w^{(1)} = M_1^{(1)} = 0, \quad s = 0, \quad T_1^{(n)} = v^{(n)} = w^{(n)} = M_1^{(n)} = 0, \quad s = l, \tag{6}$$

а внешний край пластины свободен:

$$T_1 = S = 0, \quad x = 1 + b. \quad (7)$$

**3. Граничные условия для уравнений оболочки.** Условия (3), (4) и (6) являются граничными условиями для систем (1). Чтобы получить еще  $2n_s$  условий, найдем решение системы (2) и исключим из (5) перемещения пластины и усилия в ней.

Замена переменной  $x = e^t$  превращает систему (2) в систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2u}{dt^2} - u - \gamma m^2 u + \delta m \frac{dv}{dt} - (1 + \gamma)mv = 0, \quad \gamma \frac{d^2v}{dt^2} - \gamma v - m^2 v + \delta m \frac{du}{dt} - (1 + \gamma)mu = 0,$$

общее решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} u &= C_1 x^{m-1} + a_1 C_2 x^{m+1} + C_3 x^{-m-1} + a_2 C_4 x^{-m+1}, \\ v &= -C_1 x^{m-1} + b_1 C_2 x^{m+1} + C_3 x^{-m-1} + b_2 C_4 x^{-m+1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $C_i$  — произвольные постоянные,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,

$$\gamma = \frac{1 - \nu}{2}, \quad \delta = \frac{1 + \nu}{2}, \quad a_1 = \frac{2\gamma}{\delta m} - 1, \quad a_2 = \frac{2\gamma}{\delta m} + 1, \quad b_1 = 1 + \frac{2}{\delta m}, \quad b_2 = 1 - \frac{2}{\delta m}.$$

Подстановка решения (8) в первое и второе условия (5), а также в граничные условия (7) дает систему уравнений

$$\begin{aligned} C_1 + a_1 C_2 + C_3 + a_2 C_4 &= w^{(k)}(s_k), \quad C_1 + b_1 C_2 + C_3 + b_2 C_4 = v^{(k)}(s_2), \\ m(m-1)\beta^m C_1 - (m+1)(m-2)\beta^{m+1} C_2 - m(m+1)C_3 - (m-1)(m+2)\beta C_4 &= 0, \\ -(m-1)\beta^m C_1 + (m+1)\beta^{m+1} C_2 - (m+1)C_3 - (m-1)\beta C_4 &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\beta = (1 + b)^2$ .

Найденные из системы (9) выражения  $C_i$  через  $w^{(k)}(s_k)$  и  $v^{(k)}(s_k)$  подставим в формулы для  $T_1(1)$  и  $S(1)$ , вытекающие из соотношений (2), (8), и получим

$$\begin{aligned} S(1) &= -2\gamma\delta[(B_1 + mB_2)w^{(k)}(s_k) + (D_1 + mD_2)v^{(k)}(s_k)]/D, \\ T_1(1) &= -2\gamma\delta[(mB_1 + B_2)w^{(k)}(s_k) + (mD_1 + D_2)v^{(k)}(s_k)]/(D), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \beta(\beta^{2m} - 1) - 2mb(b+2)\beta^m, \\ B_2 &= \beta(\beta^m + 1)^2 - 4\beta^m - \delta\beta(\beta^m - 1)^2 + \delta m^2 b^2 (b+2)^2 \beta^m, \\ D_1 &= \gamma\beta(\beta^m - 1)^2 + \delta m^2 b^2 (b+2)^2 \beta^m, \\ D_2 &= \beta(\beta^{2m} - 1) + 2mb(b+2)\beta^m, \\ D &= \gamma[4\beta^m + \delta\beta(\beta^m - 1)^2] + \delta[\beta(\beta^m + 1)^2 + \delta m^2 b^2 (b+2)^2 \beta^m]. \end{aligned} \quad (11)$$

Подстановка соотношений (10) в две последние формулы (5) приводит к следующим  $2n_s$  условиям на параллели сопряжения для решений уравнений устойчивости оболочки:

$$\begin{aligned} S^{(k)} - S^{(k+1)} &= -2a\gamma\delta[(B_1 + mB_2)w^{(k)} + (D_1 + mD_2)v^{(k)}]/(hD), \\ Q_1^{(k)} - Q_1^{(k+1)} &= -2\gamma\delta[(mB_1 + B_2)w^{(k)} + (mD_1 + D_2)v^{(k)}]/(hD), \\ s &= s_k, \quad k = 1, 2, \dots, n_s. \end{aligned} \quad (12)$$

Наименьшее положительное собственное значение  $\lambda_c$  краевой задачи для систем уравнений (1) с граничными условиями (3), (4), (6) и (12) является критическим параметром нагружения.

**4. Приближенное решение краевой задачи для подкрепленной оболочки.** Предполагая, что  $m \sim \mu^{-1/2}$ ,  $\lambda \sim m^{-6}$ , мы, следуя [4] и [11], ищем приближенное решение систем (1) в виде суммы основного полубезмоментного состояния  $y_0$  и интегралов простого краевого эффекта  $y_1, y_2$ :

$$y^{(k)} = m^{I_0(y)} y_0^{(k)} + m^{I_1(y)} (y_1^{(k)} + y_2^{(k)}), \quad (13)$$

где  $y$  обозначает любую неизвестную функцию из систем (1). Показатели интенсивности  $I_0$  и  $I_1$  приведены в таблице.

Показатели интенсивности								
Показатель	$u^{(k)}$	$v^{(k)}$	$w^{(k)}$	$\vartheta^{(k)}$	$T_{10}^{(k)}$	$S^{(k)}$	$M_1^{(k)}$	$Q_1$
$I_0$	-2	-1	0	0	-2	-3	-6	-6
$I_1$	-4	-5	-2	0	-4	-3	-6	-4

Функции  $v_0^{(k)}$  удовлетворяют полубезмоментным уравнениям

$$\frac{d^4 v_0^{(k)}}{ds^4} - \alpha^4 v_0^{(k)} = 0, \quad \alpha^4 = \frac{\lambda m^6 - \mu^4 m^8}{\sigma}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

причем

$$w_0^{(k)} = -v_0^{(k)}, \quad u_0^{(k)} = \frac{dv_0^{(k)}}{ds}, \quad T_{10}^{(k)} = \frac{d^2 v_0^{(k)}}{ds^2}, \quad S_0^{(k)} = -\sigma \frac{d^3 v_0^{(k)}}{ds^3}. \quad (15)$$

Интегралы краевого эффекта имеют вид

$$y_1^{(k)} = \sum_{j=1}^2 \hat{D}_j^{(k)} \hat{y}_j \exp[r_j(s - s_{k-1})/\mu], \quad y_2^{(k)} = \sum_{j=3}^4 \hat{D}_j^{(k)} \hat{y}_j \exp[r_j(s - s_k)/\mu].$$

Здесь  $\hat{D}_j^{(k)} \sim 1$  — произвольные постоянные,  $\hat{w}_j = 1$  при  $j = 1, 2, 3, 4$ ,

$$r_{1,2} = g(-1 \mp i), \quad r_{3,4} = g(1 \pm i), \quad g = \sigma^{1/4}/\sqrt{2}, \quad i^2 = -1.$$

Функция  $y_1^{(k)}(s)$  быстро убывает при увеличении  $s$  от  $s_k$  до  $s_{k+1}$ , а функция  $y_2^{(k)}(s)$  — при уменьшении  $s$  от  $s_{k+1}$  до  $s_k$ .

Граничные условия для уравнений (14) находятся после разделения условий (3), (4), (6) и (12) на главные и дополнительные. Из главных условий путем отбрасывания второстепенных членов получаются граничные условия для уравнений (14).

Обозначим  $\Delta$  разность между наибольшими показателями интенсивности главных членов полубезмоментного решения и краевого эффекта в граничном условии. Тогда:

1) величины  $\Delta$  для двух главных граничных условий должны быть строго больше, чем для двух дополнительных,

2) в главных условиях должны быть линейно независимы главные члены основного решения, а в дополнительных — интегралов краевого эффекта.

Во многих случаях для разделения условий на главные и дополнительные необходимо составлять линейные комбинации граничных условий.

Разделение условий на краях оболочки подробно рассматривается в книге [11]. В частности, для условий шарнирного опирания (6) главными будут условия

$$v^{(1)}(0) = T_1^{(1)}(0) = 0, \quad v^{(n)}(s_n) = T_1^{(n)}(s_n) = 0. \quad (16)$$

Пренебрегая в равенствах (16) малыми краевыми эффектами и учитывая формулу (15) для  $T_{10}^{(k)}$ , получаем граничные условия для уравнений (14):

$$v_0^{(1)}(0) = v_0^{(1)''}(0) = 0, \quad v_0^{(n)}(s_n) = v_0^{(n)''}(s_n). \quad (17)$$

Дополнительными условиями являются  $M_1^{(1)}(0) = 0$  и  $M_1^{(n)}(s_n) = 0$ . В линейной комбинации  $w^{(k)} + mv^{(k)}$  обращается в нуль главный член основного состояния, поэтому два других дополнительных условия имеют вид

$$w^{(1)}(0) + mv^{(1)}(0) = 0, \quad w^{(n)}(s_n) + mv^{(n)}(s_n) = 0.$$

На подкрепленной параллели главными являются условия (3). Из них и из формул (15) следуют три условия сопряжения для уравнений (14):

$$v_0^{(k)} = v_0^{(k+1)}, \quad v_0^{(k)'} = v_0^{(k+1)'}, \quad v_0^{(k)''} = v_0^{(k+1)''}, \quad s = s_k, \quad k = 1, 2, \dots, n_s. \quad (18)$$

Четвертое условие сопряжения для уравнений (14) находится путем исключения интегралов краевого эффекта из условий (4) и (12).

Предположим, что  $s_k - s_{k-1} \gg \mu$  для  $k = 1, 2, \dots, n$ . Тогда  $y_1^{(k)}(s_k) \ll 1$ ,  $y_2^{(k+1)}(s_k) \ll 1$  и, следовательно, в первом приближении при  $s = s_k$  имеем

$$y^{(k)} = m^{I_0(y)} y_0^{(k)} + m^{I_1(y)} y_2^{(k)}, \quad y^{(k+1)} = m^{I_0(y)} y_0^{(k+1)} + m^{I_1(y)} y_1^{(k+1)}, \quad (19)$$

причем на параллели сопряжения, где  $s = s_k$ , интегралы краевого эффекта принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} w_2^{(k)} &= \hat{D}_3^{(k)} + \hat{D}_4^{(k)}, & w_1^{(k+1)} &= \hat{D}_1^{(k+1)} + \hat{D}_2^{(k+1)}, \\ \vartheta_2^{(k)} &= -gK^{-1}(r_3 \hat{D}_3^{(k)} + r_4 \hat{D}_4^{(k)}), & \vartheta_1^{(k+1)} &= -gK^{-1}(r_1 \hat{D}_1^{(k+1)} + r_2 \hat{D}_2^{(k+1)}), \\ M_{12}^{(k)} &= -g^2 K^2 (r_3^2 \hat{D}_3^{(k)} + r_4^2 \hat{D}_4^{(k)}), & M_{11}^{(k+1)} &= -g^2 K^2 (r_1^2 \hat{D}_1^{(k+1)} + r_2^2 \hat{D}_2^{(k+1)}), \\ S_2^{(k)} &= Q_{12}^{(k)} = -g^3 K (r_3^3 \hat{D}_3^{(k)} + r_4^3 \hat{D}_4^{(k)}), \\ S_1^{(k+1)} &= Q_{11}^{(k+1)} = -g^3 K (r_1^3 \hat{D}_1^{(k+1)} + r_2^3 \hat{D}_2^{(k+1)}), & K &= \mu m^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Из условий (18) вытекают равенства

$$w_0^{(k)} = w_0^{(k+1)}, \quad \vartheta_0^{(k)} = \vartheta_0^{(k+1)}, \quad M_{10}^{(k)} = M_{10}^{(k+1)}, \quad s = s_k. \quad (21)$$

Подставим решения (19) в первое и третье условия (4). Принимая во внимание формулы (20) и (21), получим

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = \hat{D}_3 + \hat{D}_4, \quad r_1^2 \hat{D}_1^{(k+1)} + r_2^2 \hat{D}_2^{(k+1)} = r_3^2 \hat{D}_3 + r_4^2 \hat{D}_4,$$

где  $\hat{D}_1 = \hat{D}_1^{(k+1)}$ ,  $\hat{D}_2 = \hat{D}_2^{(k+1)}$ ,  $\hat{D}_3 = \hat{D}_3^{(k)}$ ,  $\hat{D}_4 = \hat{D}_4^{(k)}$ . Ввиду того, что  $r_1^2 = r_3^2 = -r_2^2 = -r_4^2$ , из последнего равенства следует, что

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_3, \quad \hat{D}_2 = \hat{D}_4. \quad (22)$$

Подстановка решения (19) во второе условие (4) с учетом формул (20) и (21) дает равенство  $r_1\hat{D}_1 + r_2\hat{D}_2 = r_3\hat{D}_3 + r_4\hat{D}_4$ , которое сводится к соотношению

$$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 0, \quad \hat{C}_1 = \hat{D}_1 + \hat{D}_2, \quad \hat{C}_2 = \hat{D}_1 - i\hat{D}_2. \quad (23)$$

Составим линейные комбинации условий (12), умножив каждое из них на  $-m$  и сложив с другим условием. Отбросив второстепенные члены, получим

$$\begin{aligned} A(Q_1^{(k)} - mS^{(k)} - Q_1^{(k+1)} + mS^{(k+1)}) &= B_2w^{(k)} + D_2v^{(k)}, & A &= \frac{hD}{2am^2\gamma\delta}. \\ A(S^{(k)} - mQ_1^{(k)} - S^{(k+1)} + mQ_1^{(k+1)}) &= B_1w^{(k)} + D_1v^{(k)}, \end{aligned} \quad (24)$$

Подставим в (24) приближенные равенства

$$\begin{aligned} Q_1^{(k)} &= m^{-4}Q_{12}^{(k)}, & S^{(k)} &= m^{-3}(S_0^{(k)} + S_2^{(k)}), \\ Q_1^{(k+1)} &= m^{-4}Q_{11}^{(k+1)}, & S^{(k+1)} &= m^{-3}(S_0^{(k+1)} + S_1^{(k+1)}), \\ w^{(k)} &= w_0^{(k)} + m^{-2}w_2^{(k)} = -v_0^{(k)} + m^{-2}\hat{C}_1, & v^{(k)} &= m^{-1}v_0^{(k)} \end{aligned}$$

и примем во внимание две последние формулы (20) и формулу

$$\begin{aligned} S_2^{(k)} - S_1^{(k+1)} &= g^3K(-r_3^3\hat{D}_3 - r_4^3\hat{D}_4 + r_1^3\hat{D}_1 + r_2^3\hat{D}_2) = 2g^3K(r_1^3\hat{D}_1 + r_2^3\hat{D}_2) = \\ &= 4g^3K[\hat{D}_1 + \hat{D}_2 - i(D_1 - \hat{D}_2)] = 4g^3K(\hat{C}_1 - \hat{C}_2) = 8g^3K\hat{C}_1, \end{aligned}$$

при выводе которой используются соотношения (22) и (23). Тогда условия (24) после отбрасывания малых слагаемых примут вид

$$\begin{aligned} A(8g^3K\hat{C}_1 + S_0^{(k)} - S_0^{(k+1)}) &= m(mB_2 - D_2)v_0^{(k)} - B_2\hat{C}_1, \\ A(S_0^{(k)} - S_0^{(k+1)}) &= m^2(D_1 - mB_1)v_0^{(k)} + mB_1\hat{C}_1. \end{aligned} \quad (25)$$

Исключение из равенств (25) постоянной  $\hat{C}_1$  дает четвертое условие сопряжения для уравнений (14)

$$S_0^{(k)} - S_0^{(k+1)} + cv_0^{(k)} = 0, \quad s = s_k,$$

которое с учетом последней формулы (15) приобретает вид

$$\sigma(v_0^{(k)''''} - v_0^{(k+1)''''}) = cv_0^{(k)}, \quad s = s_k, \quad (26)$$

где

$$c = \frac{8m^2g^3AK(mB_1 - D_1) + m^2(B_1D_2 - B_2D_1)}{A(8g^3AK + mB_1 + B_2)}. \quad (27)$$

Аналогичная формула получена в работе [10] для цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной по краю. Условия (18) и (26) будем называть условиями сопряжения нулевого приближения.

Краевая задача нулевого приближения (14), (17), (18) и (26) совпадает по форме с краевой задачей для определения частот и форм колебаний шарнирно опертой балки [12], подкрепленной  $n_s$  пружинами жесткости  $c(m)$ . Пусть  $\alpha_1(m)$  — наименьшее

положительно собственное значение этой краевой задачи. Тогда из второй формулы (14) следует, что параметр критического давления определяется как

$$\lambda_c \simeq \min \left( \frac{\sigma \alpha_1^4(m)}{m^6} + \mu^4 m^2 \right). \quad (28)$$

Общее решение уравнения (14) ищется в виде линейной комбинации функций Крылова [12]:

$$v_0^{(k)} = A_k S(z_k) + B_k V(z_k) + C_k U(z_k) + D_k T(z_k), \quad z_k = \alpha(s - s_{k-1}), \quad (29)$$

$$s_{k-1} < s < s_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad s_0 = 0, \quad s_n = l,$$

где  $A_k, B_k, C_k$  и  $D_k$  — произвольные постоянные,

$$S(z) = \operatorname{ch} z + \cos z, \quad V(z) = \operatorname{sh} z - \sin z, \quad U(z) = \operatorname{ch} z - \cos z, \quad T(z) = \operatorname{sh} z + \sin z.$$

Подставив решения (29) в граничные условия (17), (18) и (26), мы получим систему  $4n$  линейных однородных алгебраических уравнений с неизвестными  $A_k, B_k, C_k$  и  $D_k$ . Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель  $G(\alpha)$  равен нулю. Корни уравнения

$$G(\alpha) = 0 \quad (30)$$

являются собственными значениями краевой задачи нулевого приближения.

**5. Асимптотический анализ условий сопряжения нулевого приближения.** Рассмотрим узкую пластину, считая, что  $b \ll m^{-2}$ . Подставим в формулы (11) приближенное выражение

$$\beta^m = 1 + 2mb + \frac{2m(2m-1)b^2}{2} + \frac{2m(2m-1)(2m-2)b^3}{6}.$$

Отбросив второстепенные члены, получим

$$B_1 = 4mb^2 + 8m^3b^3/3, \quad D_1 = 4m^2b^2, \quad B_2 = 8b + 4m^2b^2, \quad D_2 = 8mb, \quad D = 4. \quad (31)$$

При выводе формул (31) происходит взаимное уничтожение главных членов, поэтому в разложении для  $\beta^m$  необходимо удерживать не менее четырех слагаемых. Подстановка выражений (31) в формулу (27) дает приближенное значение  $c_b$  постоянной  $c$  для узкой пластины:

$$c_b = \frac{\sigma m^8}{h} \left( J + \frac{e^2 F}{1+d} \right), \quad d = \frac{\sigma m^2 F}{8hg^3 K}, \quad K = \mu m^2, \quad (32)$$

где  $J = ab^3/12$  — момент инерции поперечного сечения шпангоута относительно образующей срединной поверхности цилиндрической оболочки,  $e = b/2$  — расстояние от центра тяжести поперечного сечения до срединной поверхности (эксцентриситет),  $F = ab$  — площадь поперечного сечения.

Формула (32) и условие сопряжения

$$\sigma(v_0^{(k)''''} - v_0^{(k+1)''''}) = c_b v_0^{(k)}, \quad s = s_k, \quad (33)$$

соответствуют описанию шпангоута с использованием традиционной модели кругового стресса с прямоугольным поперечным сечением. Вывод условий сопряжения



нулевого приближения для стержневой модели подробно рассматривается в монографии [4].

Для широкой пластины при  $b \gg m^{-1}$  подстановка приближенных равенств

$$A = A_0 \beta^{2m+1}, \quad A_0 = \frac{h(1+\gamma)}{2am^2\gamma}, \quad B_1 = D_2 \simeq \beta^{2m+1}, \quad B_2 = D_1 \simeq \gamma \beta^{2m+1}$$

в соотношение (27) дает приближенную формулу

$$c \simeq c_p = \frac{m^2(8g^3 m K A_0 + 1 - \gamma^2)}{A_0(8g^3 K A_0 + m)}.$$

Величина  $c_p$  не зависит от ширины пластины  $b$ , но зависит от ее толщины  $a$ . Предположим, что  $a \sim m^{-\xi}$ . Если  $\xi = 9$ , то  $c_p \sim 1$ . В этом случае, пренебрегая малыми членами, получаем

$$c_p \simeq \frac{2am^5\gamma}{h(1+\gamma)}. \quad (34)$$

При  $\xi < 9$  имеем  $c_p \gg 1$ , что соответствует бесконечной жесткости пластины в ее плоскости. Приближенное условие сопряжения (26) принимает вид  $v_0^{(k)}(s_k) = 0$ . Для очень тонкой пластинки, когда  $\xi > 9$ , выполняется сильное неравенство  $c_p \ll 1$ . В этом случае в нулевом приближении оболочка «не замечает» шпангоута.

Формулу (34) можно вывести, используя локализацию решений системы (2) в случае широкой пластины, как это было сделано в работе [9] для оболочки, подкрепленной пластиной по краю. При  $m \gg 1$  решения  $x^{m-1}$  и  $x^{m+1}$  быстро убывают при удалении от внешнего края пластины  $x = 1 + b$ . В случае  $b \gg m^{-1}$  этими решениями можно пренебречь у внутреннего края пластины  $x = 1$ , полагая  $C_1 = C_2 = 0$  в формуле (8), и при выводе приближенных условий сопряжения использовать решения

$$u = C_3 x^{-m-1} + a_2 C_4 x^{-m+1}, \quad v = C_3 x^{-m-1} + b_2 C_4 x^{-m+1},$$

локализованные вблизи края  $x = 1$ .

Постоянные  $C_3$  и  $C_4$  выражаются через  $w^{(k)}(s_k)$  и  $v^{(k)}(s_k)$  из первых двух уравнений (9), в которых  $C_1 = C_2 = 0$ . Подставив выражения для  $C_3$  и  $C_4$  в формулы для  $S(1)$  и  $T(1)$ , а те, в свою очередь, — в два последних условия (5), после отбрасывания малых членов получим следующие граничные условия на параллели сопряжения оболочки с широкой пластиной:

$$\begin{aligned} L_1 &= S^{(k)} - S^{(k+1)} - A_p[(m\gamma + 1)w^{(k)} + (m + \gamma)v^{(k)}] = 0, \\ L_2 &= Q_1^{(k)} - Q_1^{(k+1)} - A_p(w^{(k)} + \gamma v^{(k)}) = 0, \quad A_p = \frac{2a\gamma}{(1+\gamma)h}, \quad s = s_k. \end{aligned}$$

Главными граничными условиями являются линейные комбинации  $L_1 - mL_2 = 0$  этих условий. Сохранив в главных условиях только главные члены, получим

$$S_0^{(k)} - S_0^{(k+1)} = c_p v_0^{(k)}, \quad s = s_k,$$

где  $c_p$  вычисляется по формуле (34).

**6. Пример расчета.** Рассмотрим шарнирно опертую цилиндрическую оболочку длиной  $l$ , подкрепленную кольцевой пластиной по параллели  $s_1 = l/2$ . Тогда корни уравнения (30) совпадают с корнями двух следующих уравнений:

$$\tanh z - \tan z = 32z^3/c, \quad \sin z = 0, \quad z = \alpha l/2. \quad (35)$$

Корни второго уравнения (35) не зависят от жесткости  $c$ . Если мы обозначим  $z_1$  и  $z_2$  минимальные положительные корни первого и второго уравнений, то

$$\pi/2 \leq z_1 < 3.927, \quad z_2 = \pi.$$

Предположив, что  $l = 4$ , толщины оболочки и пластины равны  $h = a = 0.01$ , а коэффициент Пуассона их материалов  $\nu = 0.3$ , по формуле (28) найдем зависимость критического параметра нагружения  $\lambda_c$  от ширины пластины  $b$ .

Сначала мы вычисляем  $c(m)$  посредством формулы (27), затем находим корень  $z_1(m)$  первого уравнения (35). Рассмотрим  $b \leq 0.2$ . Тогда  $z_1 < z_2$  и  $\alpha_1 = 2z_1/l = z_1/2$ . Функция в соотношении (28) достигает минимума при  $m = 4$ . Результаты показаны на рис. 3 (кривая 1), где  $\Lambda_c = \lambda_c 10^4$ . Кривая 2 демонстрирует значения  $\Lambda_c$ , найденные с использованием стержневой модели шпангоута, когда  $c = c_b$  (см. (32)).

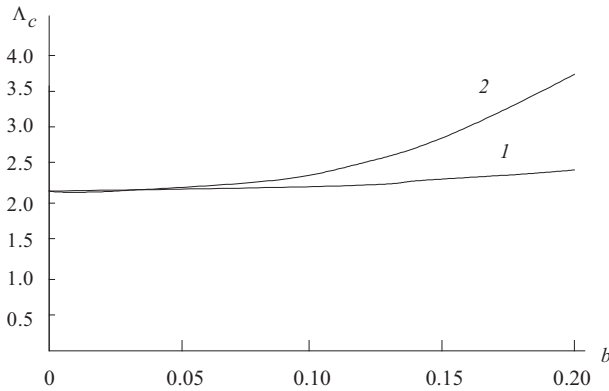


Рис. 3. Зависимость параметра  $\Lambda_c$  от ширины пластины  $b$ .

Если пластина является достаточно узкой, использование стержневой модели дает хорошие результаты, которые мало отличаются от результатов, полученных на основе модели пластины. Однако при увеличении ширины пластины  $b$  параметр  $\Lambda_c$  для стержневой модели становится существенно больше, чем для модели пластины, так как жесткость стержня  $c_b$  больше отличается от жесткости пластины  $c$ . На рис. 4 приведены зависимости жесткостей  $c_p$ ,  $c_b$  и  $c$  от ширины пластины.

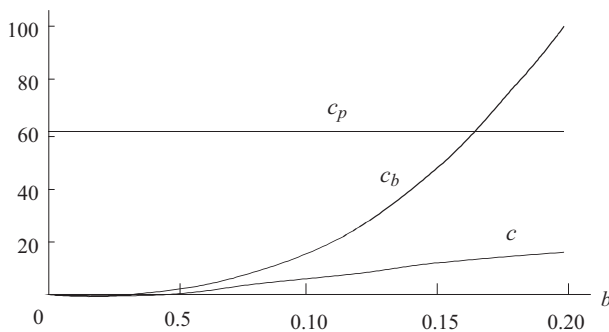


Рис. 4. Зависимости жесткостей  $c_p$ ,  $c_b$  и  $c$  от ширины пластины  $b$ .

В том случае, когда  $n_s > 1$ , для вычисления  $\alpha_1$  можно использовать алгоритмы, разработанные в [4] для стержневой модели шпангоута.

**7. Заключение.** Установлено, что стержневая модель шпангоута дает завышенное значение критического давления для подкрепленной шпангоутами цилиндрической оболочки. Чем выше шпангоут, тем больше ошибка, возникающая при использовании этой модели по сравнению с более точной пластиночной моделью.

Есть и другая причина, по которой традиционная стержневая модель не годится для высоких шпангоутов. Рассмотренная в данной работе потеря устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки первого типа похожа на потерю устойчивости гладкой оболочки, при которой образуется множество вмятин, вытянутых в направлении образующей цилиндра. Увеличение высоты шпангоутов приводит к превращению потери устойчивости первого типа в потерю устойчивости второго типа. При этом на поверхности шпангоута появляется множество вмятин, а оболочка практически не деформируется. Такая форма потери устойчивости не может быть найдена при помощи стержневой модели. Приближенное решение краевой задачи, соответствующей потере устойчивости второго типа, для оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной по краю, получено в работе [13]. В дальнейшем предполагается построить асимптотическое разложение решения задачи о потере устойчивости второго типа для оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной по внутренней параллели.

## Литература

1. Маневич А. И. *Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек*. Киев, Донецк, Вища школа (1979).
2. Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И. *Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек*. Москва, Наука (1985).
3. Амиро И. Я., Грачев О. А., Заруцкий В. А., Пальчевский А. С., Санников Ю. А. *Устойчивость ребристых оболочек вращения*. Киев, Наукова думка (1987).
4. Филиппов С. Б. *Теория сопряженных и подкрепленных оболочек*. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (1999).
5. Teng J. G., Rotter J. M. *Buckling of Thin Metal Shell*. CRC Press (2004).
6. Wang C. M., Swaddiwudhipohg S. Elastic buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shell under general pressure loading via the Ritz method. *Thin-Walled Structures* **35**, 1–24 (1999).
7. Filippov S. B. Optimal design of stiffened cylindrical shells based on an asymptotic approach. *Technische Mechanik* **24**, 221–230 (2004).
8. Dai H. L., Qi L. L., Zheng H. Y. Buckling analysis for a ring-stiffened FGM cylindrical shell under hydrostatic pressure and thermal loads. *Journal of Mechanics* **30**, 403–410 (2014).
9. Макаренко И. Н., Филиппов С. Б. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевой пластиной. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 1, 94–102 (2005).
10. Кобченко М. Е., Филиппов С. Б. Устойчивость цилиндрической оболочки, сопряженной с кольцевой пластиной под действием внешнего давления. В: *Асимптотические методы в механике деформируемого твердого тела*. Санкт-Петербург, ВВМ, 60–74 (2006).
11. Товстик П. Е. *Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы*. Москва, Наука (1995).
12. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. *Колебания в инженерном деле*, пер. с англ. Москва, Машиностроение (1985).
13. Filippov S. B., Sabaneev V. S. *Buckling of Cylindrical Shell Stiffened by Annular Plate Under External Pressure*. In: *Advanced Structured Materials*, vol. 110, 251–270. Springer (2019). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_14)

Статья поступила в редакцию 23 ноября 2020 г.;  
после доработки 7 декабря 2020 г.;  
рекомендована в печать 17 декабря 2020 г.

## Buckling of the cylindrical shell joint with annular plates under external pressure\*

S. B. Filippov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Filippov S. B. Buckling of the cylindrical shell joint with annular plates under external pressure. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 2, pp. 282–294. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.208> (In Russian)

By means of an asymptotic method the buckling under the uniform external pressure of the thin cylindrical shell supported by identical annular plates is analyzed. Boundary conditions on an internal parallel of the shell joined to a thin plate are obtained. At the edges of the shell the free support conditions are introduced. We seek the approximate solutions of the eigenvalue problem as a sum of slowly varying functions and edge effect integrals. On a parallel, where the plate joint with the shell, the main boundary conditions for the formulation of an eigenvalue problem of zero approximation are obtained. This problem describes also vibrations of a simply supported beam stiffened by springs. Its solution we seek as linear combinations of Krylov's functions. It is shown, that in zero approximation it is possible to replace a narrow plate with a circular beam. At increase in width of a plate stiffness of the corresponding spring tend to a constant. It occurs because of localization plate deformations near to the internal edge of a plate. As an example the dimensionless critical pressure for the case when the shell is supported by one plate is found. The replacement of a narrow plate with a circular beam does not lead to appreciable change of the critical pressure, however for a wide plate the beam model gives the overestimated value of critical pressure.

*Keywords:* ring-stiffened cylindrical shell, buckling, annular plate, asymptotic method, eigenvalue problem.

## References

1. Manevich A. I. *Buckling and optimal designing of stiffened shells*. Kiev, Donetsk, Vischa shkola Publ. (1979). (In Russian)
2. Andrianov I. V., Lesnichaya V. A., Manevich L. I. *Homogenization method in static and dynamic of ribbed shells*. Moscow, Nauka Publ. (1985). (In Russian)
3. Amiro I. Ya., Grachev O. A., Zarutsky V. A., Pal'chevskii A. S., Sannikov Iu. A. *Buckling of ribbed shells of revolution*. Kiev, Naukova dumka Publ. (1987). (In Russian)
4. Filippov S. B. *Theory of joined and stiffened shells*. St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Press (1999). (In Russian)
5. Teng J. G., Rotter J. M. *Buckling of Thin Metal Shell*. CRC Press (2004).
6. Wang C. M., Swaddiwudhipohg S. Elastic buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shell under general pressure loading via the Ritz method. *Thin-Walled Structures* **35**, 1–24 (1999).
7. Filippov S. B. Optimal design of stiffened cylindrical shells based on an asymptotic approach. *Technische Mechanik* **24**, 221–230 (2004).
8. Dai H. L., Qi L. L., Zheng H. Y. Buckling analysis for a ring-stiffened FGM cylindrical shell under hydrostatic pressure and thermal loads. *Journal of Mechanics* **30**, 403–410 (2014).
9. Makarenko I. N., Filippov S. B. Buckling of cylindrical shell stiffened by annular plate. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **50** (1), 94–102 (2005). (In Russian)

---

\*This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00208).

10. Kobchenko M. E., Filippov S. B. Buckling of cylindrical shell, joined with annular plate under external pressure. In: *Asymptotic methods in deformable solid mechanics*, St. Petersburg, BBM Publ., 60–74 (2006). (In Russian)
11. Tovstik P. E. *Buckling of thin shells. Asymptotic methods*. Moscow, Nauka Publ. (1995). (In Russian)
12. Weaver W. Jr., Timoshenko S. P., Yang D. H. *Vibration problems in engineering*. Wiley (1990). [Russ. ed.: Timoshenko S. P., Yang D. H., Weaver W. Jr. *Kolebaniia v inzhenernom dele*. Moscow, Mashinostroenie Publ. (1985)].
13. Filippov S. B., Sabaneev V. S. *Buckling of Cylindrical Shell Stiffened by Annular Plate Under External Pressure*. In: *Advanced Structured Materials*, vol. 110, 251–270. Springer (2019). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_14)

Received: November 23, 2020

Revised: December 7, 2020

Accepted: December 17, 2020

Author's information:

*Sergei B. Filippov* — [s\\_b\\_filippov@mail.ru](mailto:s_b_filippov@mail.ru)