МАТЕМАТИКА

УДК 517.925.53
MSC 37C75, 37C29, 34C37

Различные виды устойчивых периодических точек диффеоморфизма плоскости с гомоклинической орбитой*

Е. В. Васильева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Васильева Е. В.* Различные виды устойчивых периодических точек диффеоморфизма плоскости с гомоклинической орбитой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 2. С. 295–304. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.209

Рассматривается диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой, предполагается наличие нетрансверсальной гомоклинической точки. Устойчивое и неустойчивое многообразия касаются друг друга в гомоклинической точке, существуют различные способы касания устойчивого и неустойчивого многообразий. В работах Ш. Ньюхауса, Л. П. Шильникова и других авторов изучались диффеоморфизмы плоскости с нетрансверсальной гомоклинической точкой, в предположении, что эта точка является точкой касания конечного порядка. Из работ этих авторов следует, что в окрестности гомоклинической точки может лежать бесконечное множество устойчивых периодических точек, наличие такого множества зависит от свойств гиперболической точки. В данной работе предполагается, что гомоклиническая точка не является точкой, в которой касание устойчивого и неустойчивого многообразия является касанием конечного порядка. Выделяют счетное число видов периодических точек, лежащих в окрестности гомоклинической точки; точки, принадлежащие одному виду, называются n-обходными, где n — натуральное число. В предлагаемой работе показано, что в случае если касание не является касанием конечного порядка, окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки может содержать бесконечное множество устойчивых однобходных, двухобходных или трехобходных периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Ключевые слова: диффеоморфизм, нетрансверсальная гомоклиническая точка, устойчивость, характеристические показатели.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00388).

1. Введение. В предлагаемой работе изучается двумерный диффеоморфизм с неподвижной гиперболической точкой и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. В статье показано, что произвольная окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки может содержать бесконечные множества однобходных, двухобходных или трехобходных устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

Периодическая точка диффеоморфизма, которая лежит в достаточно малой окрестности траектории гомоклинической точки, является r-обходной, если ее траектория образует r витков ($r \in \mathbb{N}$), находящихся вне достаточно малой фиксированной окрестности гиперболической точки.

Как известно, нетрансверсальной гомоклинической точкой называется точка, которая лежит в пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий гиперболической точки, причем эти многообразия касаются друг друга в гомоклинической точке. Нетрансверсальные гомоклинические точки различаются по способу касания устойчивого и неустойчивого многообразий. Прежде всего, выделяют гомоклинические точки с конечным порядком касания. Окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки с конечным порядком касания изучалась в работах Ш. Ньюхауса, Л. П. Шильникова, Б. Ф. Иванова и других авторов [1–4].

Пусть f — диффеоморфизм плоскости в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат, предполагается существование нетрансверсальной гомоклинической к ней точки. Предположим, что

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

где

$$0 < \lambda < 1 < \mu.$$

Пусть

$$\theta = -\frac{\ln \lambda}{\ln \mu}. \tag{1}$$

Из работ [1–4] следует, что существует такое неограниченное множество положительных действительных чисел Σ, что если $\theta \in \Sigma$, то в окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки могут лежать бесконечные множества устойчивых двухобходных или трехобходных периодических точек. Из статьи [2] следует, что хотя бы один из характеристических показателей у двухобходных устойчивых периодических точек стремится к нулю с ростом периода. Также из [1–4] следует, что если $\theta \notin \Sigma$, то окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки не содержит устойчивых двухобходных или трехобходных периодических точек.

В данной работе предполагается, что нетрансверсальная гомоклиническая точка не является точкой с конечным порядком касания. Основная цель работы — показать, что в этом случае в произвольной окрестности нетрансверсальной гомоклинической точки могут лежать бесконечные множества устойчивых однообходных, двухобходных или трехобходных периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля. Пример диффеоморфизма плоскости с бесконечным множеством устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями, траектории которых лежат в ограниченной части плоскости, приведен в [5]. Предлагаемая работа является продолжением работ [6, 7]. В этих статьях изучается окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки в предположении, что гомоклиническая точка не является точкой касания конечного порядка.

Даны достаточные условия существования в окрестности гомоклинической точки бесконечных множеств однообходных или двуобходных устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями. В данной работе показано, что при любых $\theta > r$, $r \in \{1, 2, 3\}$, в окрестности гомоклинической точки может существовать бесконечное множество r-обходных устойчивых периодических точек с отделенными от нуля характеристическими показателями.

2. Основные определения и обозначения. Пусть f — C^1-диффеоморфизм плоскости в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат. Пусть $W^s(0)$, $W^u(0)$ — *устойчивое и неустойчивое многообразия* гиперболической точки диффеоморфизма f, где

$$W^s(0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \lim_{k \to +\infty} \| f^k(z) \| = 0 \right\},$$

$$W^u(0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : \lim_{k \to +\infty} \| f^{-k}(z) \| = 0 \right\},$$

а f^k, f^{-k} — степени диффеоморфизмов f и f^{-1} .

Предполагается наличие *нетрансверсальной гомоклинической точки*, а именно предполагается, что в пересечении устойчивого и неустойчивого многообразия лежит отличная от нуля точка w, причем эта точка является точкой касания данных многообразий. Ясно, что

$$\lim_{k \to +\infty} \| f^k(w) \| = \lim_{k \to +\infty} \| f^{-k}(w) \| = 0.$$

Предположим, что f линеен в некоторой ограниченной окрестности V_0 начала координат, точнее, если $(x, y) \in V_0$, то

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Пусть w_1 и w_2 — две такие точки из орбиты гомоклинической точки w, что $w_1 \in V_0$, $w_2 \in V_0$, и их координаты имеют вид $w_1 = (0, y^0)$, $w_2 = (x^0, 0)$.

Предположим, существуют такие действительные числа $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, что $\lambda < \bar{\lambda} < 1$, $1 < \bar{\mu} < \mu$ и справедливо включение

$$V = \left\{ (x, y) : \, |x| \leq \bar{\lambda}^{-1} |x^0|, \, |y| \leq \bar{\mu} |y^0| \right\} \subset V_0. \tag{3}$$

Из определения гомоклинической точки следует, что существует натуральное число $\omega > 1$ такое, что $f^\omega(w_1) = w_2$. Пусть точки w_1 и w_2 и множество V таковы, что $f^k(w_1) \notin V$, $k = 1, 2, \ldots, \omega - 1$.

Пусть U — такая окрестность точки w_1, что $U \subset V$, $f^\omega(U) \subset V$, $f^k(U) \bigcap V = \emptyset$, $k = 1, 2, \ldots, \omega - 1$, и множества U, $f(U)$, $\ldots$, $f^\omega(U)$ попарно не пересекаются.

Назовем

$$U_0 = V \bigcup f(U) \bigcup \ldots \bigcup f^{\omega - 1}(U)$$

расширенной окрестностью гомоклинической точки.

Периодическая точка $u \in U$ называется *r-обходной периодической точкой*, если ее траектория лежит в U_0 и пересечение ее орбиты с U состоит из r различных точек. Таким образом, в U_0 определено счетное число видов периодических точек.

Обозначим через L сужение $f^\omega |_U$. Ясно, что L — отображение класса C^1. Запишем отображение L в координатах:

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} x^0 + F_1(x, y - y^0) \\ F_2(x, y - y^0) \end{pmatrix},$$

где $F_1(x, y-y^0)$, $F_2(x, y-y^0)$ — C^1-функции, определенные в U, такие что $F_1(0,0) = F_2(0,0) = 0$. Матрица $DL(0)$ невырожденная.

Касание устойчивого и неустойчивого многообразия в точке w_2 называется *касанием конечного порядка*, если существует такая величина $l > 1$, что

$$\frac{\partial F_2(0,0)}{\partial y} = \ldots = \frac{\partial^{l-1} F_2(0,0)}{\partial y^{l-1}} = 0, \quad \frac{\partial^l F_2(0,0)}{\partial y^l} \neq 0. \tag{4}$$

В работах [1–4] исследовалась окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки, предполагалось, что касание устойчивого и неустойчивого многообразия в точке w_2 является касанием конечного порядка. В данной работе исследуется окрестность нетрансверсальной гомоклинической точки, в случае когда w_2 не является точкой касания конечного порядка.

3. Формулировка теорем. Пусть f — C^1-диффеоморфизм плоскости в себя с гиперболической неподвижной точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Предположим, что в некоторой ограниченной окрестности начала координат выполнены условия (2). Пусть $w_1 = (0, y^0)$, $w_2 = (x^0, 0)$ — две такие точки из орбиты гомоклинической точки w, что справедливо включение (3) и определена расширенная окрестность U_0. В окрестности U точки w_1 определено отображение $L = f^\omega |_U$. Предположим, что

$$x^0 > 0, \quad y^0 > 0. \tag{5}$$

Предположим также, что координатные функции отображения L имеют вид

$$F_1(x, y - y^0) = b(y - y^0) + x\varphi_1(x, y - y^0),$$

$$F_2(x, y - y^0) = cx + g(y - y^0) + x\varphi_2(x, y - y^0), \tag{6}$$

где b, c — действительные числа такие, что

$$b < 0, \quad c > 0, \tag{7}$$

а g, φ_1, φ_2 — такие непрерывно дифференцируемые функции одной или двух переменных, что $\varphi_1(0,0) = \varphi_2(0,0) = 0$, $g(0) = 0$, $\dfrac{dg(0)}{dy} = 0$. Предположим, что производные первого порядка функций φ_1, φ_2 ограничены в окрестности U.

Характер касания устойчивого многообразия с неустойчивым в точке w_2 определяется свойствами функции g. Опишем свойства этой функции с помощью последовательностей. Пусть σ_k, ε_k — такие положительные, стремящиеся к нулю последовательности, что

$$\sigma_{k-1} - \varepsilon_{k-1} > \sigma_k + \varepsilon_k \tag{8}$$

для любого k.

Пусть i_k — такая возрастающая последовательность натуральных чисел, что существуют такие целые неотрицательные величины s, η, где $\eta \geq 1$, что при любом k

$$i_k - i_{k-1} > s, \tag{9}$$

$$(\lambda \mu^{\eta})^{i_k} < \varepsilon_k. \tag{10}$$

Пусть Δ_k — стремящаяся к нулю последовательность.

Предположим, что функция g такова, что при любом k

$$g(\sigma_k) = \left(y^0 + \Delta_k\right) \mu^{-i_k}, \tag{11}$$

и существует такая действительная положительная $\alpha > 1$, что при любом k

$$\left|\frac{dg(t)}{dt}\right| < \mu^{-\alpha i_k} \tag{12}$$

при $t \in (\sigma_k - \varepsilon_k, \sigma_k + \varepsilon_k)$.

Из соотношений (11), (12) следует, что исходный диффеоморфизм не удовлетворяет условиям (4), следовательно, точка w_2 не является точкой с конечным порядком касания.

Теорема 1. *Пусть f — диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Пусть $\theta > 1$, выполнены условия* (2), (3), (5)–(12) *при $s \geq 0$, $\eta = 1$, $\alpha > 1$. Предположим, что при любом k и при фиксированном положительном значении $d < 1$*

$$\left|\Delta_k + (\lambda\mu)^{i_k} c\left(x^0 + b\sigma_k\right) - \sigma_k\right| < d\varepsilon_k,$$

тогда в любой окрестности гомоклинической точки w_1 лежит счетное множество однообходных устойчивых периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Доказательство теоремы приведено в [6].

Предположим, что элементы последовательности Δ_k при $s \geq 1$ удовлетворяют одному из условий

$$\Delta_k < -c\,(\lambda\mu)^{i_k} \lambda^{-s} x^0, \tag{13}$$

$$\sigma_k + \varepsilon_k - c\,(\lambda\mu)^{i_k} x^0 < \Delta_k < \sigma_{k-1} - \varepsilon_{k-1} - c\,(\lambda\mu)^{i_k} \lambda^{-s} x^0. \tag{14}$$

Пусть j_k — такая возрастающая последовательность натуральных чисел, что при любом k выполняется $0 < i_k - j_k \leq s$.

Определим последовательность δ_k как

$$\delta_k = \left(cx^0\,(\lambda)^{j_k}\,(\mu)^{i_k} + \Delta_k\right)\left(1 - (\lambda)^{j_k}\,(\mu)^{i_k}\,bc\right)^{-1}.$$

Теорема 2. *Пусть f — диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Пусть $\theta > 2$, выполнены условия* (2), (3), (5)–(12) *при $s \geq 1$, $\eta = 2$, $\alpha > 2$. Пусть последовательность Δ_k удовлетворяет при любом k либо неравенству* (13), *либо* (14). *Предположим, что существуют такие последовательности j_k и δ_k, что при любом k*

$$\left|g(\delta_k) - \left(y^0 + \sigma_k\right)\mu^{-j_k} + (\lambda)^{j_k} c\left(x^0 + b\sigma_k\right)\right| < \varepsilon_k \mu^{-i_k}.$$

Тогда в любой окрестности гомоклинической точки w_1 лежит счетное множество устойчивых двухобходных периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

Доказательство теоремы приведено в [7].

Пусть m_k и n_k — такие возрастающие последовательности натуральных чисел, что при $s \geq 2$ и любом k

$$0 < i_k - m_k \leq s, \quad 0 < i_k - n_k \leq s, \quad |n_k - m_k| > 0. \tag{15}$$

По любым последовательностям m_k, n_k, удовлетворяющим последним условиям, существует такая последовательность $\tau_k \in (\sigma_k + \varepsilon_k, \sigma_{k-1} - \varepsilon_{k-1})$, что

$$g(\tau_k) + c^2 b^2 (\lambda)^{m_k+n_k} (\mu)^{i_k} \tau_k = \\ = \left(y^0 + \sigma_k\right) \mu^{-n_k} - c (\lambda)^{m_k} \left(x^0 + b\Delta_k\right) - c^2 b (\lambda)^{m_k+n_k} (\mu)^{i_k} x^0. \tag{16}$$

Пусть

$$\xi_k = \Delta_k + c (\lambda)^{n_k} (\mu)^{i_k} \left(x^0 + b\tau_k\right).$$

Теорема 3. *Пусть f — диффеоморфизм плоскости в себя с неподвижной гиперболической точкой в начале координат и нетрансверсальной гомоклинической к ней точкой. Пусть $\theta > 3$, выполнены условия (2), (3), (5)–(12) при $s \geq 2$, $\eta = 3$, $\alpha > 3$. Пусть последовательность Δ_k удовлетворяет при любом k либо неравенству (13), либо (14). Предположим, что существуют такие последовательности m_k, n_k, удовлетворяющие неравенствам (15), что при любом k*

$$\left| g\left(\xi_k\right) - \left(y^0 + \tau_k\right) \mu^{-m_k} + (\lambda)^{i_k} c \left(x^0 + b\sigma_k\right) \right| < \varepsilon_k \mu^{-2i_k}, \tag{17}$$

где τ_k определены условиями (16). Тогда в любой окрестности гомоклинической точки w_1 лежит счетное множество устойчивых трехобходных периодических точек, характеристические показатели которых отделены от нуля.

4. Вспомогательная лемма. Пусть ${x_k}^1 = \lambda^{n_k} \left(x^0 + b\tau_k\right)$, ${x_k}^2 = \lambda^{i_k} \left(x^0 + b\sigma_k\right)$, ${x_k}^3 = \lambda^{m_k} \left(x^0 + b\xi_k\right)$.

Определим последовательности множеств

$${U_1}^k = \left\{ \begin{array}{c} \left|x - {x_k}^1)\right| \leq \lambda^{n_k} \mu^{-i_k} \\ \left|y - \left(y^0 + \sigma_k\right)\right| \leq \varepsilon_k \end{array} \right\},$$

$${U_2}^k = \left\{ \begin{array}{c} \left|x - {x_k}^2\right| \leq \lambda^{i_k} \left(|b| + 1\right) \varepsilon_k \\ \left|y - \left(y^0 + \xi_k\right)\right| \leq \varepsilon_k \mu^{-2i_k} \end{array} \right\},$$

$${U_3}^k = \left\{ \begin{array}{c} \left|x - {x_k}^3\right| \leq \lambda^{m_k} \mu^{-n_k} \\ \left|y - \left(y^0 + \tau_k\right)\right| \leq \varepsilon_k \mu^{-i_k} \end{array} \right\}.$$

Для достаточно больших k справедливы включения ${U_l}^k \subset U$ при $l \in \{1, 2, 3\}$.

Для доказательства теоремы 3 докажем лемму.

Лемма. *Пусть выполнены условия теоремы 3, тогда существует k_0 такая, что при $k > k_0$ справедливы включения*

$$f^{i_k} L({U_1}^k) \subset {U_2}^k, \quad f^{m_k} L({U_2}^k) \subset {U_3}^k, \quad f^{n_k} L({U_3}^k) \subset {U_1}^k. \tag{18}$$

Доказательство леммы. Докажем первое из включений (18). Пусть $(x,y) \in {U_1}^k$. Ясно, что $x = {x_k}^1 + u$, $y = y^0 + \sigma_k + v$, где $|u| \le \lambda^{n_k}\mu^{-i_k}$, $|v| \le \varepsilon_k$.

Пусть

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = f^{i_k} L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Из условий (2), (6) получим

$$\overline{x} = {x_k}^2 + \lambda^{i_k}\left[bv + ({x_k}^1 + u)\varphi_1({x_k}^1 + u, \sigma_k + v)\right],$$

$$\overline{y} = \mu^{i_k}\left(c({x_k}^1 + u) + g(\sigma_k)\right) + \mu^{i_k}\left[g(\sigma_k + v) - g(\sigma_k) + ({x_k}^1 + u)\varphi_2({x_k}^1 + u, \sigma_k + v)\right].$$

Из условий (12) следует, что

$$|g(\sigma_k + v) - g(\sigma_k)| \le \varepsilon_k \mu^{-\alpha i_k},$$

откуда с учетом условий (10) получим

$$\left|\overline{x} - {x_k}^2\right| \le \lambda^{i_k}\left(|b| + 1\right)\varepsilon_k,$$

$$\left|\overline{y} - \left(y^0 + \xi_k\right)\right| \le \varepsilon_k \mu^{-2i_k}.$$

Последние неравенства доказывают первое из включений (18).

Докажем второе включение из (18). Пусть $(x,y) \in {U_2}^k$. Ясно, что $x = {x_k}^2 + u$, $y = y^0 + \xi_k + v$, где $|u| \le \lambda^{i_k}\left(|b|+1\right)\varepsilon_k$, $|v| \le \varepsilon_k\mu^{-2i_k}$. Пусть

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = f^{m_k} L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

тогда

$$\overline{x} = {x_k}^3 + \lambda^{m_k}\left[bv + ({x_k}^2 + u)\varphi_1({x_k}^2 + u, \xi_k + v)\right],$$

$$\overline{y} = \mu^{m_k}\left(c({x_k}^2 + u) + g(\xi_k)\right) + \mu^{m_k}\left[g(\xi_k + v) - g(\xi_k) + ({x_k}^2 + u)\varphi_2({x_k}^2 + u, \xi_k + v)\right].$$

Из свойств функции g следует, что для достаточно больших номеров k справедливы неравенства

$$|g(\xi_k + v) - g(\xi_k)| \le (\mu - 1)(2\mu)^{-1}\varepsilon_k\mu^{-2i_k}.$$

Отсюда и из условий (17) получим

$$\left|\overline{x} - {x_k}^3\right| \le \lambda^{m_k}\mu^{-n_k},$$

$$\left|\overline{y} - \left(y^0 + \tau_k\right)\right| \le \varepsilon_k\mu^{-i_k}.$$

Последние неравенства доказывают второе из включений (18).

Доказательство третьего включения из (18) проводится аналогично с применением условий (16).

Лемма доказана. □

5. Доказательство теоремы 3. Из включений (18) следует, что при достаточно больших номерах k множество ${U_1}^k$ содержит неподвижную точку $z_k^1 = (\overline{x}_k^1, \overline{y}_k^1)$ отображения $f^{n_k} L f^{m_k} L f^{i_k} L$, которая является трехобходной периодической точкой диффеоморфизма f.

Пусть $z_k^2 = (\overline{x}_k^2, \overline{y}_k^2) = f^{i_k} L(z_k^1), z_k^3 = (\overline{x}_k^3, \overline{y}_k^3) = f^{m_k} L(z_k^2)$, тогда $z_k^1 = f^{n_k} L(z_k^3)$, где $z_k^l \in {U_l}^k$, $l = 1, 2, 3$.

Обозначим

$$\Psi_k = D\left(f^{n_k} L f^{m_k} L f^{i_k} L(z_k^1)\right) = D f^{n_k} L(z_k^3) D f^{m_k} L(z_k^2) D f^{i_k} L(z_k^1).$$

В дальнейшем $\mathrm{Det}\Psi_k$ — определитель матрицы Ψ_k, а $\mathrm{Tr}\Psi_k$ — ее след.

Ясно,что

$$D f^{i_k} L(z_k^1) = \left.\begin{pmatrix} \lambda^{i_k} \frac{\partial x \varphi_1(x, y-y^0)}{\partial x} & \lambda^{i_k}\left(b + \frac{\partial x \varphi_1(x, y-y^0)}{\partial y}\right) \\ \mu^{i_k}\left(c + \frac{\partial x \varphi_2(x, y-y^0)}{\partial x}\right) & \mu^{i_k}\left(\frac{dg(y-y^0)}{dy} + \frac{\partial x \varphi_2(x, y-y^0)}{\partial y}\right) \end{pmatrix}\right|_{\substack{x=\overline{x}_k^1 \\ y=\overline{y}_k^1}},$$

$$D f^{m_k} L(z_k^2) = \left.\begin{pmatrix} \lambda^{m_k} \frac{\partial x \varphi_1(x, y-y^0)}{\partial x} & \lambda^{m_k}\left(b + \frac{\partial x \varphi_1(x, y-y^0)}{\partial y}\right) \\ \mu^{m_k}\left(c + \frac{\partial x \varphi_2(x, y-y^0)}{\partial x}\right) & \mu^{m_k}\left(\frac{dg(y-y^0)}{dy} + \frac{\partial x \varphi_2(x, y-y^0)}{\partial y}\right) \end{pmatrix}\right|_{\substack{x=\overline{x}_k^2 \\ y=\overline{y}_k^2}},$$

$$D f^{n_k} L(z_k^3) = \left.\begin{pmatrix} \lambda^{n_k} \frac{\partial x \varphi_1(x, y-y^0)}{\partial x} & \lambda^{n_k}\left(b + \frac{\partial x \varphi_1(x, y-y^0)}{\partial y}\right) \\ \mu^{n_k}\left(c + \frac{\partial x \varphi_2(x, y-y^0)}{\partial x}\right) & \mu^{n_k}\left(\frac{dg(y-y^0)}{dy} + \frac{\partial x \varphi_2(x, y-y^0)}{\partial y}\right) \end{pmatrix}\right|_{\substack{x=\overline{x}_k^3 \\ y=\overline{y}_k^3}}.$$

Из последних равенств следует, что существует такая последовательность ψ_k, что $\lim\limits_{k \to +\infty} \psi_k = 0$ и

$$\mathrm{Det}\Psi_k = -\left(\lambda\mu\right)^{(m_k + n_k + i_k)} (bc)^3 \left(1 + \psi_k\right). \tag{19}$$

Непосредственными вычислениями легко проверяется следующее утверждение. Пусть $\beta = \min\{\theta - 3, \alpha - 3\}$, тогда существует такая независящая от k постоянная $P > 0$, что при любом k

$$\left|\mathrm{Tr}\Psi_k\right| \leq P\mu^{-\beta i_k}.$$

Пусть $\rho_q(k)$, $q = 1, 2,$ — собственные числа матрицы Ψ_k, тогда существуют $T > 0$ и k_0 такие, что при любом $k > k_0$ и $q = 1, 2$ справедливы неравенства

$$\left|\rho_q(k)\right| \leq T\mu^{-\beta i_k}. \tag{20}$$

Докажем последние неравенства. Предположим, что неравенства (20) неверны. Пусть последовательность T_ν такова, что $\lim\limits_{\nu \to +\infty} T_\nu = +\infty$. Тогда существуют такие последовательности номеров $k(\nu)$ и $q(\nu)$, что $\lim\limits_{\nu \to +\infty} k(\nu) = +\infty$, $q(\nu) \in \{1, 2\}$ при любом ν, и

$$\left|\rho_{q(\nu)}\left(k(\nu)\right)\right| \geq T_\nu \mu^{-\beta i_{k(\nu)}}.$$

Пусть $q(\nu) = 1$ при любом ν, тогда

$$\rho_2\left(k(\nu)\right) = \mathrm{Tr}\Psi_{k(\nu)} - \rho_1\left(k(\nu)\right),$$

откуда

$$\left|\rho_2\left(k(\nu)\right)\right| \geq \left|\rho_1\left(k(\nu)\right)\right| - \left|\mathrm{Tr}\Psi_{k(\nu)}\right| \geq \left(T_\nu - P\right)\mu^{-\beta i_{k(\nu)}}.$$

Известно, что

$$\left|\mathrm{Det}\Psi_{k(\nu)}\right| = \left|\rho_1\left(k(\nu)\right)\right| \left|\rho_2\left(k(\nu)\right)\right|,$$

откуда

$$\left|\mathrm{Det}\Psi_{k(\nu)}\right| \geq T_\nu \left(T_\nu - P\right) \mu^{-2\beta i_{k(\nu)}}.$$

Величина θ определена в (1), поэтому в силу условий теоремы имеем $(3(\theta-1)-2\beta) > 0$. Следовательно, получено противоречие с условиями (19). Это противоречие доказывает неравенства (20).

Характеристические показатели $\gamma_q(k)$, $q=1,2$, точек z_k^1 задаются формулами

$$\gamma_q(k) = \left(m_k + n_k + i_k + 3\omega\right)^{-1} \ln\left|\rho_q(k)\right|.$$

Из неравенств (20) следует

$$\gamma_q(k) \leq -\frac{\beta \ln \mu}{6},$$

где $q=1,2$.

Последние неравенства доказывают теорему.

Литература

1. Newhouse Sh. Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology* **12**, 9–18 (1973).

2. Иванов Б. Ф. Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой. *Дифференц. уравнения* **15** (8), 1411–1419 (1979).

3. Гонченко С. В., Шильников Л. П. О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми. *Доклады АН СССР* **286** (5), 1049–1053 (1986).

4. Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре. *Доклады Академии наук* **330** (2), 144–147 (1993).

5. Плисс В. А. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.* Москва, Наука (1977).

6. Васильева Е. В. Диффеоморфизмы плоскости с устойчивыми периодическими точками. *Дифференц. уравнения* **48** (3), 307–315 (2012).

7. Васильева Е. В. Устойчивость периодических точек диффеоморфизма плоскости в случае наличия гомоклинической орбиты. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6 (64)**, вып. 1, 44–52 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.103

Статья поступила в редакцию 26 октября 2020 г.;
после доработки 13 ноября 2020 г.;
рекомендована в печать 17 декабря 2020 г.

Контактная информация:

Васильева Екатерина Викторовна — д-р физ.-мат. наук; ekvas1962@mail.ru

Different types of stable periodic points of diffeomorphism of a plane with a homoclinic orbit*

E. V. Vasil'eva

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vasil'eva E. V. Different types of stable periodic points of diffeomorphism of a plane with a homoclinic orbit. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 2, pp. 295–304. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.209 (In Russian)

A diffeomorphism of the plane into itself with a fixed hyperbolic point is considered; the presence of a nontransverse homoclinic point is assumed. Stable and unstable manifolds touch each other at a homoclinic point; there are various ways of touching a stable and unstable manifold. In the works of Sh. Newhouse, L. P. Shilnikov and other authors, studied diffeomorphisms of the plane with a nontranverse homoclinic point, under the assumption that this point is a tangency point of finite order. It follows from the works of these authors that an infinite set of stable periodic points can lie in a neighborhood of a homoclinic point; the presence of such a set depends on the properties of the hyperbolic point. In this paper, it is assumed that a homoclinic point is not a point at which the tangency of a stable and unstable manifold is a tangency of finite order. Allocate a countable number of types of periodic points lying in the vicinity of a homoclinic point; points belonging to the same type are called n-pass (multi-pass), where n is a natural number. In the present paper, it is shown that if the tangency is not a tangency of finite order, the neighborhood of a nontransverse homolinic point can contain an infinite set of stable single-pass, double-pass, or three-pass periodic points with characteristic exponents separated from zero.

Keywords: diffeomorphism, nontransverse homoclinic point, stability, characteristic exponents.

References

1. Newhouse Sh. Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology* **12**, 9–18 (1973).
2. Ivanov B. F. Stability of the trajectories that do not leave the neighborhood of a homoclinic curve. *Differentsial'nye Uravneniya* **15** (8), 1411–1419 (1979). (In Russian)
3. Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P. Dynamical systems with structurally unstable homoclinic curves. *Doklady Akademii nauk SSSR* **286** (5), 1049–1053 (1986). (In Russian)
4. Gonchenko S. V., Turaev D. V., Shil'nikov L. P. Dynamical Phenomena in Mutidimensional Systems with a Structurally Unstable Homoclinic Poincare Curve. *Doklady Akademii nauk* **330** (2), 144–147 (1993). (In Russian) [Engl. transl.: *Doklady Mathematics* **47** (3), 410–415 (1993)].
5. Pliss V. A. *Integral Sets of Periodic Systems of Differential Equations.* Moscow, Nauka Publ. (1977). (In Russian)
6. Vasil'eva E. V. Diffeomorphisms of the Plane with Stable Periodic Points. *Differentsial'nye Uravneniya* **48** (3), 307–315 (2012). (In Russian) [Engl. transl.: *Differential Equations* **48** (3), 309–317 (2012). https://doi.org/10.1134/S0012266112030019].
7. Vasileva E. V. Stability of periodic points of diffeomorphism of a plane in the case of a homoclinic orbit. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6 (64)**, iss. 1, 44–52 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.103 (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ., Math.* **52**, iss. 1, 30–35 (2019). https://doi.org/10.3103/S1063454119010138].

Received: October 26, 2020
Revised: November 13, 2020
Accepted: December 17, 2020

Author's information:

Ekaterina V. Vasil'eva — ekvas1962@mail.ru

*The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant no. 19-01-00388).