УДК 515.1 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 2
MSC 47H10, 54H25

Теоремы о неподвижной точке для новых сжимающих отображений с приложением в динамическом программировании

Ю. Туаль, Д. Аль-Мутавакиль

Университет Султана Мулая Слимана, Бени-Меллал, 23000, Марокко

Для цитирования: *Туаль Ю., Аль-Мутавакиль Д.* Теоремы о неподвижной точке для новых сжимающих отображений с приложением в динамическом программировании // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 2. С. 338–348. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.213

В этом исследовании мы приводим обобщение известной неподвижной точки Райха при определении общих топологических пространств с τ-расстояниями. В качестве приложений полученного результата мы доказываем несколько теорем о неподвижных точках для новых типов сжимающих отображений в метрических пространствах. Кроме того, устанавливаем существование и единственность решений для класса функциональных уравнений, возникающих в динамическом программировании.

Ключевые слова: неподвижная точка, строгое сжатие, обобщенные E-слабосжимающие отображения, метрическое пространство, хаусдорфово топологическое пространство, динамическое программирование.

1. Введение. В 1971 г. Райх [1] обобщил теоремы Банаха и Каннана о неподвижной точке на метрическом пространстве (X, d) для тождественных отображений $T : X \to X$. Эти теоремы используют следующее условие сжатия: при любых $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) + bd(x, Tx) + cd(y, Ty), \tag{1.1}$$

где a, b, c — неотрицательные вещественные числа и $a + b + c < 1$.

В 2003 г. Аамри и Аль-Мутавакиль [2] ввели понятие τ-расстояния в общих топологических пространствах, которые расширяют многие известные в литературе пространства. Более того, для этой общей постановки они доказали версию теоремы Банаха о неподвижной точке.

Первая цель нашей работы состоит в том, чтобы доказать новую теорему о неподвижной точке для тождественных отображений, удовлетворяющих вышеприведеному сжатию (1.1), которое дает неподвижную точку, подтвержденную в [1] в новой постановке.

С другой стороны, хорошо известно, что при введении метрического пространства строгое сжимающее условие для отображения в себя не обеспечивает существование неподвижной точки, если только пространство не предполагается компактным или строгие условия не заменяются более сильными условиями, как в [3–5].

Благодаря этому факту возникает вторая цель данной работы — установить неподвижную точку для нового класса сжимающих отображений на основе нашего первого результата и без использования компактности пространства. В качестве приложения нашего второго результата, вдохновленные Альбером, Герре — Делабриером [3] (1997) и Роудс [5] (2001), мы представляем новый класс слабосжимающих отображений, названный нами обобщенное E-слабо сжимающее отображение. При этом отображении вспомогательная функция ϕ удовлетворяет условиям $\phi(1) = 0$ и $\inf\limits_{t>1} \phi(t) > 0$.

В конце работы представлено приложение к исследованию существования и единственности решений класса функциональных уравнений, возникающих в динамическом программировании.

2. Подготовительный этап. Цель этого раздела — представить некоторые понятия и результаты, используемые в работе.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство, а $p : X \times X \to [0, \infty)$ — функция. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in X$ пусть $B_p(x, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) < \varepsilon\}$.

Определение 2.1 [2]**.** Функция p называется *τ-расстоянием*, если для каждого $x \in X$ и любой окресности V элемента x существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_p(x, \varepsilon) \subset V$.

Определение 2.2. Последовательность $\{x_n\}$ в хаусдорфовом топологическом пространстве X называется *p-Коши последовательностью*, если она удовлетворяет обычному метрическому условию относительно p, другими словами, если $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$.

Определение 2.3 [2, определение 3.1]**.** Пусть (X, τ) — топологическое пространство с τ-расстоянием p.

1. X является *S-полным*, если для каждой p-Коши последовательности (x_n), существует x из X такой, что $\lim p(x, x_n) = 0$.

2. X считается *p-Коши полным*, если для каждой p-Коши последовательности (x_n) существует x из X такой, что $\lim x_n = x$ по τ.

3. X называется *p-ограниченным*, если $\sup\{p(x, y)/x, y \in X\} < \infty$.

Лемма 2.4 [2, лемма 3.1]**.** *Пусть (X, τ) — топологическое пространство Хаусдорфа с τ-расстоянием p, тогда*

1) если $p(x, y) = 0$, то $x = y$.

2) пусть (x_n) — последовательность в X такая, что $\lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = 0$ и $\lim_{n\to\infty} p(y, x_n) = 0$, тогда $x = y$.

Определение 2.5 [2]**.** Ψ — класс всех функций $\psi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, удовлетворяющих условиям:

i) ψ неубывающая;

ii) $\lim \psi^n(t) = 0$ для всех $t \in [0, \infty)$.

Определение 2.6. Φ — класс всех функций $\phi : [1, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, удовлетворяющих условиям:

i) $\phi(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $t = 1$,

ii) $\inf\limits_{t>1} \phi(t) > 0$.

Теорема 2.7 [2, теорема 4.1]**.** *Пусть* (X,τ) *— хаусдорфово топологическое пространство с* τ*-расстоянием* p*. Предположим, что* X p*-ограничено и* S*-полно. Пусть* T *— отображение* X *такое, что*

$$p(Tx,Ty) \le \psi(p(x,y))$$

для всех $x,y \in X$*. Тогда* T *имеет единственную неподвижную точку.*

3. Топологическое пространство с τ**-расстоянием.** В этом разделе мы начнем со следующего определения.

Определение 3.1. Пусть (X,τ) — топологическое пространство с τ-расстоянием p. Тогда $T: X \to X$ является *p-непрерывным* при $x \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$ такой, что $\lim_{n\to\infty} p(x,x_n) = 0$, получаем $\lim_{n\to\infty} p(Tx,Tx_n) = 0$.

Докажем наш первый результат.

Теорема 3.2. *Пусть* (X,τ) *— топологическое пространство Хаусдорфа с* τ*-расстоянием* p*. Предположим, что* X p*-ограничено и* S*-полно. Пусть* T *является* p*-непрерывным тождественным отображением* X *таким, что*

$$p(Tx,Ty) \le \psi(\max\{p(x,y), p(x,Tx), p(y,Ty)\}) \tag{3.2}$$

для всех $x,y \in X$*. Тогда* T *имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка X, определим последовательность $\{x_n\} \subset X$ как $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0,1,\ldots$. Используя (3.1), для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется следующее:

$$\begin{aligned} p(x_{n+1},x_{n+2}) \le \psi(\max\{p(x_n,x_{n+1}), p(x_n,x_{n+1}), p(x_{n+1},x_{n+2})\}) \le \\ \le \psi(\max\{p(x_n,x_{n+1}), p(x_{n+1},x_{n+2})\}). \end{aligned}$$

Если существует $n_0 \in \mathbb{N}$, для которого $p(x_{n_0},x_{n_0+1}) < p(x_{n_0+1},x_{n_0+2})$, то $p(x_{n_0+1},x_{n_0+2}) < p(x_{n_0+1},x_{n_0+2})$, что приводит к противоречию. Тогда $p(x_{n+1},x_{n+2}) \le p(x_n,x_{n+1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$, из чего следует, что

$$p(x_{n+1},x_{n+2}) \le \psi(p(x_n,x_{n+1})) \tag{3.3}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теперь пусть $n,m \in \mathbb{N}$. Используя (3.1), получим

$$\begin{aligned} p(x_n,x_{n+m}) = p(Tx_{n-1},Tx_{n+m-1}) \le \\ \le \psi(\max\{p(x_{n-1},x_{n+m-1}), p(x_{n-1},x_n), p(x_{n+m-1},x_{n+m})\}) \le \\ \le \psi(\max\{p(x_{n-1},x_{n+m-1})), p(x_{n-1},x_n)\}) \le \\ \le \psi\Big(\max\Big\{\psi\big(\max\{p(x_{n-2},x_{n+m-2}), p(x_{n-2},x_{n-1}), \\ p(x_{n+m-2},x_{n+m-1})\}\big), p(x_{n-1},x_n)\Big\}\Big) \le \\ \le \psi\Big(\max\Big\{\psi\big(\max\{p(x_{n-2},x_{n+m-2}), p(x_{n-2},x_{n-1})\}\big), \psi(p(x_{n-2},x_{n-1}))\Big\}\Big) \le \end{aligned}$$

$$\leq \psi^2\big(\max\{p(x_{n-2}, x_{n+m-2}), p(x_{n-2}, x_{n-1})\}\big) \leq$$
$$\vdots$$
$$\leq \psi^n\big(\max\{p(x_0, x_m), p(x_0, x_1)\}\big) \leq \psi^n(M), \quad (3.4)$$

где $M = \sup\{p(x,y)/x, y \in X\}$. Полагая $n \to \infty$ в (3.3), получаем, что $\{x_n\}$ является p-Коши последовательностью. Поскольку X — S-полное пространство, существует $u \in X$ такое, что $\lim_{n\to\infty} p(u, x_n) = 0$. С другой стороны, p-непрерывность T предполагает справедливость равенства $\lim_{n\to\infty} p(Tu, Tx_n) = \lim_{n\to\infty} p(u, x_n) = 0$.

Следовательно, по лемме 2.4 получаем $Tu = u$.

Теперь положим $p(u,u) > 0$, тогда из (3.2) получаем $p(u,u) \leq \psi(p(u,u)) < p(u,u)$, что является противоречием и, следовательно, $p(u,u) = 0$.

Для доказательства единственности предположим, что существуют $u, v \in X$ такие, что $Tu = u$ и $Tv = v$. Если $p(u,v) > 0$, то

$$p(u,v) \leq \psi(\max\{p(u,v), p(u,u), p(v,v)\}) = \psi(p(u,v)) < p(u,v),$$

что приводит к противоречию. □

Заметим, что из неравенства $p(Tx, Ty) \leq \psi(p(x,y))$ вытекает p-непрерывность T. Тогда мы имеем следующее следствие.

Следствие 3.3 [2, теорема 4.1]. *Пусть (X, τ) — хаусдорфово топологическое пространство с τ-расстоянием p. Положим, что X — p-ограниченное и S-полное. Пусть T — тождественное отображение X такое, что*

$$p(Tx, Ty) \leq \psi(p(x,y))$$

при любых $x, y \in X$. Тогда T имеет единственную неподвижную точку.

Следствие 3.4. *Пусть (X, τ) является топологическим пространством Хаусдорфа с τ-расстоянием p. Положим, что X — p-ограниченное и S-полное. Пусть T — p-непрерывное отображение X в себя такое, что*

$$p(Tx, Ty) \leq \psi(\max\{p(x, Tx), p(y, Ty)\}) \quad (3.5)$$

при любых $x, y \in X$. Тогда T имеет единственную неподвижную точку.

Пример 3.5. Пусть $X = [0,1]$ — пространство с метрикой, определенной следующим образом:

$$d(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\}, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y, \end{cases}$$

при любых $x, y \in X$. Отображение T на X задано как $Tx = \frac{2}{5}x^2$.

С другой стороны, в лемме 4.1 мы покажем, что $p(x,y) = e^{d(x,y)} - 1$ — это τ-расстояние на X. Заметим, что $p(Tx, Ty) = 0$, если $x = y \in X$. Но, если $x \neq y \in X$, получаем

$$p(Tx,Ty) = e^{d(Tx,Ty)} - 1 = e^{\max\{Tx,Ty\}} - 1 = e^{\frac{2}{5}\max\{x^2,y^2\}} - 1 \leq$$
$$\leq e^{\frac{2}{5}\max\{x,y\}} - 1 \leq \psi(\max\{p(x,y), p(x,Tx), p(y,Ty)\}),$$

при любых $x \neq y \in X$, где $\psi(t) = \frac{2}{5}t$ для любого $t \in \mathbb{R}^+$. Следовательно, все условия теоремы 3.2 выполнены, и поэтому 0 — единственная неподвижная точка T.

Пример 3.6. Пусть $X = \{1,2,3,4\}$ — пространство с обычной метрикой $d(x,y) = |x-y|$ для всех $x, y \in X$. Как упоминалось в приведенном выше примере, функция, определенная как $p(x,y) = e^{d(x,y)} - 1$ для всех $x, y \in X$, является τ-расстоянием. Определим отображение $T : X \to X$ следующим образом:

$$T(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x \neq 4, \\ 1, & \text{если } x = 4. \end{cases}$$

Заметим, что
$$p(T1,T2) = p(T1,T3) = p(T2,T3) = 0.$$

Во всех остальных случаях получаем

$$p(Tx,Ty) = e^2 - 1$$

и
$$\max\{p(x,Tx), p(y,Ty)\} \geq e^3 - 1.$$

Тогда для $\psi(t) = \frac{1}{2}t$ все условия теоремы 3.2 для получения фиксированной точки T выполняются, и получается точка, которая равна 3.

С другой стороны, тот факт, что $p(T3,T4) = e^2 - 1 > e^1 - 1 = p(3,4)$, показывает, что теорема 3.2 улучшает теорему 2.7.

4. Метрические пространства. В этом разделе мы сначала рассмотрим следующую лемму, которая понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 4.1. *Пусть (X,d) — метрическое пространство, а $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ — функция, определенная формулой*

$$p(x,y) = e^{d(x,y)} - 1. \tag{4.6}$$

Тогда p — это τ_d-расстояние на X, где τ_d — метрическая топология.

Доказательство. Пусть (X,τ_d) — топологическое пространство с метрической топологией τ_d, пусть $x \in X$ и V — произвольная окрестность x, тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_d(x,\varepsilon) \subset V$, где $B_d(x,\varepsilon) = \{y \in X, d(x,y) < \varepsilon\}$ — открытый шар.

Очевидно, что $B_p(x, e^{\varepsilon} - 1) \subset B_d(x,\varepsilon)$. Действительно, пусть $y \in B_p(x, e^{\varepsilon} - 1)$, тогда $p(x,y) < e^{\varepsilon} - 1$, откуда следует, что $e^{d(x,y)} < e^{\varepsilon}$, а значит, $d(x,y) < \varepsilon$. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть $T : X \longrightarrow X$ — отображение ограниченного полного метрического пространства (X,d) такое, что*

$$\inf_{x\neq y\in X}\left\{\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - d(Tx,Ty)\right\} > 0. \tag{4.7}$$

Тогда T имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Пусть

$$\alpha = \inf_{x\neq y\in X}\left\{\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - d(Tx,Ty)\right\},$$

откуда следует, что при любых $x \neq y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leq \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\} - \alpha.$$

Затем получаем

$$e^{d(Tx,Ty)} \leq ke^{\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty)\}},$$

где $k = e^{-\alpha} < 1$. Также можем записать

$$p(Tx, Ty) \leq k \max\{p(x, y), p(x, Tx), p(y, Ty)\} \tag{4.8}$$

при любых $x, y \in X$, где $p(x, y) = e^{d(x,y)} - 1$ — функция, определенная в лемме 4.1. Теперь, используя доказательство теоремы 3.2, взяв $\psi(t) = kt$ для всех $t \in [0, \infty)$, мы заключаем, что существует последовательность $\{x_n\} \subset X$ такая, что $\{p(u, x_n)\}$ сходится к 0 для некоторого $u \in X$ и, следовательно, $\{d(u, x_n)\}$ сходится к 0. Наконец, из (4.8) мы получаем, что T имеет единственную неподвижную точку. □

Пример 4.3. Пусть $X = \{0, 1, 2\}$ — пространство с метрикой, определенной следующим образом:

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases} \tag{4.9}$$

Определим отображение T на X как $T0 = 1, T1 = 1$ и $T2 = 0$. Итак, мы имеем следующие случаи:
случай 1: $\max\{d(0, 1), d(0, T0), d(1, T1)\} - d(T0, T1) = 1$;
случай 2: $\max\{d(0, 2), d(0, T0), d(2, T2)\} - d(T0, T2) = 1$;
случай 3: $\max\{d(1, 2), d(1, T1), d(1, T2)\} - d(T1, T2) = 1$.
Тогда T удовлетворяет всем условиям теоремы 4.2 и T имеет единственную неподвижную точку, равную 1.

Замечание 4.4. Из приведенного выше примера мы видим, что пространство X компактно и выполняется условие

$$\inf_{x \neq y} \Big\{ \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\} - d(Tx, Ty) \Big\} > 0$$

для всех $x, y \in X$. Чтобы показать, что это условие и компактность пространства не связаны, приведем следующие примеры.

Пример 4.5. Пусть $X = \overline{B}(0, 1) \times [0, 1]$, где $\overline{B}(0, 1)$ — единичный замкнутый шар банахова пространства над полем действительных чисел. Определим метрику на X как

$$d\big((x, y), (x', y')\big) = \begin{cases} 1 + |y - y'|, & \text{если } x \neq x', \\ |y - y'|, & \text{если } x = x'. \end{cases}$$

Определим тождественное отображение T на X как $T(x, y) = (0, 1 - y)$ для всех $(x, y) \in X$. Получаем

$$\max\{d\big((x, y), (x', y')\big), d\big((x, y), T(x, y)\big), \big((x', y'), T(x', y')\big)\} - d\big(T(x, y), T(x', y')\big) = 1$$

при любых $(x, y) \neq (x', y') \in X$.

Тогда T удовлетворяет всем условиям теоремы 4.2 и T имеет единственную неподвижную точку, равную $(0, \frac{1}{2})$. Кроме того, заметим, что X не компактно и

$$\inf_{(x,y)\neq(x',y')\in X}\Big\{\max\{d\big((x,y),(x',y')\big), d\big((x,y),T(x,y)\big), \big((x',y'),T(x',y')\big)\}- \\ - d\big(T(x,y),T(x',y')\big)\Big\} > 0.$$

Пример 4.6. Пусть $X = [0,1]$ — пространство с метрикой, определенной в (4.9) и $Tx = \frac{2}{3}x$, пространство X компактно и $\inf\limits_{x\neq y}\{\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - d(Tx,Ty)]\} = 0$.

В качестве приложений теоремы 4.2 мы получаем результат для нового класса слабосжимающих отображений, определяемых следующим образом.

Определение 4.7. Пусть $T : X \longrightarrow X$ — отображение метрического пространства (X, d). T будем называть обобщенным E-слабосжимающим отображением, если

$$d(Tx,Ty) \leq \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - \phi(1 + \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\})$$

для всех $x, y \in X$, где $\phi : [1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ — функция, удовлетворяющая $\phi(1) = 0$ и $\inf\limits_{t>1}\phi(t) > 0$.

Теорема 4.8. *Пусть $T : X \longrightarrow X$ — обобщенное E-слабосжимающее отображение ограниченного полного метрического пространства (X, d). Тогда T имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $x \neq y \in X$, тогда из определения 4.7 имеем

$$0 < \inf_{t>1}\phi(t) \leq \phi(1 + \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\}) \leq \\ \leq \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - d(Tx,Ty),$$

и поэтому

$$\inf_{x\neq y\in X}\Big\{\max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\} - d(Tx,Ty)\Big\} > 0.$$

Согласно теореме 4.2, T имеет единственную неподвижную точку в X. □

Определение 4.9. Пусть $T : X \longrightarrow X$ — отображение метрического пространства (X, d).

(i) T назовем *E-слабосжимающим отображением*, если

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y) - \phi(1 + d(x,y)),$$

(ii) T назовем *E'-слабосжимающим отображением*, если

$$d(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\}, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y, \end{cases}$$

для всех $x, y \in X$, где $\phi : [1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ — функция, удовлетворяющая условиям $\phi(1) = 0$ и $\inf\limits_{t>1}\phi(t) > 0$.

Следствие 4.10. *Пусть $T : X \longrightarrow X$ — E-слабосжимающее отображение ограниченного полного метрического пространства (X, d), тогда T имеет единственную неподвижную точку.*

Следствие 4.11. *Пусть $T : X \longrightarrow X$ — E'-слабосжимающее отображение ограниченного полного метрического пространства (X, d), тогда T имеет единственную неподвижную точку.*

Пример 4.12. Пусть $X = \{0, 1, 2, 3\}$ — пространство со следующей метрикой:

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Определим $T : X \to X$ как

$$Tx = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 3, \\ 1, & \text{если } x = 3, \end{cases}$$

для всех $x \in X$ и

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 1, \\ 1, & \text{если } t > 1. \end{cases}$$

Тогда T удовлетворяет всем условиям теоремы 4.8 и 0 — единственная неподвижная точка отображения T. Заметим, что ϕ не является непрерывным в точке 1.

Теперь, чтобы показать важность условия $\inf\limits_{t>1} \phi(t) > 0$, приведем следующий пример.

Пример 4.13. Пусть $X = \{0, 1, 2\}$ — пространство с обычной метрикой $d(x, y) = |x - y|$. Зададим отображение T на X как $T0 = 1, T1 = 2, T2 = 0$ и $\phi(t) = 0$ для всех $t \in [1, \infty)$. Заметим, что T не имеет неподвижных точек, даже если (X, d) — ограниченное полное метрическое пространство и $d(Tx, Ty) \leq \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\} - \phi(1 + \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\})$ для всех $x, y \in X$, но T не является обобщенным E-слабосжимающим отображением, поскольку $\inf\limits_{t>1} \phi(t) = 0$, и, следовательно, условие $\inf\limits_{t>1} \phi(t) > 0$ существенно.

5. Применение. Происхождение теории динамического программирования лежит в области многоступенчатых процессов принятия решений, в которых возникают функциональные уравнения (см. [6, 7]).

В этом разделе мы предполагаем, что X и Y являются банаховыми пространствами, $S \subset X$ — пространством состояний, а $D \subset Y$ — пространством решений. Пусть $\rho : S \times D \to S$, $g : S \times D \to \mathbb{R}$ и $G : S \times D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел. $B(S)$ — множество всех ограниченных вещественнозначных функций на S. Для $h, k \in B(S)$ пусть

$$d(h, k) = \sup\{|h(x) - k(x)| : x \in S\}.$$

Очевидно, что d — метрика на $B(S)$, а $(B(S), d)$ — полное метрическое пространство.

В этом разделе мы исследуем существование и единственность решения следующего класса функциональных уравнений, возникающих в динамическом программировании.

$$f(x) = \sup_{y \in D}\{g(x, y) + G(x, y, f(\rho(x, y)))\}, \tag{5.10}$$

где g и G ограничены. Определим $T : B(S) \to B(S)$ следующим образом:

$$Tf(x) = \sup_{y \in D}\{g(x,y) + G(x,y,f(\rho(x,y)))\}. \tag{5.11}$$

Понятно, что T корректно определено, поскольку g и G ограничены. Пусть

$$A(h,k) = \max\{d(h,k), d(h,Th), d(k,Tk)\}.$$

Теперь докажем существование и единственность решения функционального уравнения (5.10).

Теорема 5.1. *Пусть $T : B(S) \to B(S)$ — оператор, определенный в* (5.11). *Предположим, что выполняется следующее условие: существует $M \in \mathbb{R}^+$ такое, что*

$$|G(x,y,h(x)) - G(x,y,k(x))| \leq A(h,k) - M \tag{5.12}$$

для всех $(h,k,x,y) \in B(S)^2 \times S \times D$, где $h(x) \neq k(x)$. Тогда функциональное уравнение (5.10) *имеет единственное ограниченное решение.*

Доказательство. Пусть λ — произвольное положительное число, $x \in S$ и $h, k \in B(S)$, существуют $y, z \in D$ такие, что

$$T(h(x)) < g(x,y) + G(x,y,h(\rho(x,y))) + \lambda, \tag{5.13}$$

$$T(k(x)) < g(x,z) + G(x,z,k(\rho(x,z))) + \lambda. \tag{5.14}$$

С другой стороны, по определению T получаем

$$T(h(x)) \geq g(x,z) + G(x,z,h(\rho(x,z))), \tag{5.15}$$

$$T(k(x)) \geq g(x,y) + G(x,y,k(\rho(x,y))). \tag{5.16}$$

Из (5.13) и (5.16) следует, что

$$\begin{aligned} T(h(x)) - T(k(x)) < G(x,y,h(\rho(x,y))) - G(x,y,k(\rho(x,y))) + \lambda \leq \\ \leq |G(x,y,h(\rho(x,y))) - G(x,y,k(\rho(x,y)))| + \lambda, \end{aligned}$$

следовательно

$$T(h(x)) - T(k(x)) \leq A(h,k) - M + \lambda. \tag{5.17}$$

Аналогично из (5.14) и (5.15) следует

$$T(k(x)) - T(h(x)) \leq A(h,k) - M + \lambda. \tag{5.18}$$

Учитывая (5.17) и (5.18), получаем

$$|T(h(x)) - T(k(x))| \leq A(h,k) - M + \lambda,$$

что эквивалентно неравенству

$$d(T(h), T(k)) \leq A(h,k) - M + \lambda. \tag{5.19}$$

Поскольку λ выбрано произвольно, получаем

$$d(T(h), T(k)) \leq A(h,k) - M \tag{5.20}$$

для всех $h \neq k \in B(S)$. Наконец, мы заключаем, что

$$\inf_{h \neq k \in B(S)} \left\{ A(h,k) - d(Th, Tk) \right\} > 0, \tag{5.21}$$

откуда по теореме 4.2 следует, что функциональное уравнение (5.10) имеет единственное ограниченное решение. □

Редколлегия журнала благодарит Н. А. Широкова и М. Шагай за помощь в оформлении статьи.

Литература/References

1. Reich S. Kannans fixed point theorem. *Boll. Unione Mat. Ital.* **4** (4), 111 (1971).

2. Aamri M., El Moutawakil D. τ-distance in general topological spaces with application to fixed point theory. *Southwest Journal of Pure and Applied Mathematics*, iss. 2 (2003).

3. Alber Y. I., Guerre-Delabriere S. Principle of Weakly Contractive Maps in Hilbert Spaces. In: Gohberg I., Lyubich Y. (eds.) *Operator Theory: Advances and Applications.* New Results in Operator Theory and Its Applications. Vol. 98. Basel, Birkhäuser (1997). https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8910-0_2

4. Edelstein M. On fixed and periodic points under contractive mappings. *J. London Math. Soc.* **37**, 771–779 (1986).

5. Rhoades B. E. Some theorems on weakly contractive maps. *Nonlinear Analysis* **47**, 2683–2693 (2001).

6. Bellman R. *Dynamic Programming.* Princeton, Princeton University Press (1957).

7. Bellman R., Lee E. S. Functional equations arising in dynamic programming. *Aequ. Math.* **17**, 118 (1978).

Статья поступила в редакцию 6 декабря 2019 г.;
после доработки 4 августа 2020 г.;
рекомендована в печать 17 декабря 2020 г.

Контактная информация:

Туаль Юсеф — аспирант; youssef9touail@gmail.com
Аль-Мутавакиль Дрисс — проф.; d.elmoutawakil@gmail.com

Fixed point theorems for new contractions with application in dynamic programming

Y. Touail, D. El Moutawakil

Sultan Moulay Slimane University,
Morocco, 23000, Beni-Mellal

For citation: Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point theorems for new contractions with application in dynamic programming. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 2, pp. 338–348.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.213 (In Russian)

In this study, we give a generalization of the well-known Reich fixed point in the setting of general topological spaces with τ-distances. As applications of the obtained result, we prove some fixed point theorems for new contraction types in metric spaces. Moreover, we establish the existence and the uniqueness of solutions for a class of functional equations arising in dynamic programming.

Keywords: fixed point, strict contraction, generalized E-weakly contractive maps, metric spaces, Hausdorff topological spaces, dynamic programming.

Received: December 6, 2019
Revised: August 4, 2020
Accepted: December 17, 2020

Authors' information:

Youssef Touail — youssef9touail@gmail.com
Driss El Moutawakil — d.elmoutawakil@gmail.com