

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.14
MSC 70F15

Пространство кеплеровых орбит и семейство его фактор-пространств*

К. В. Холшевников, Д. В. Миланов, А. С. Щепалова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Холшевников К. В., Миланов Д. В., Щепалова А. С. Пространство кеплеровых орбит и семейство его фактор-пространств // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 2. С. 359–369. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.215>

Функции расстояния на множестве кеплеровских орбит играют важную роль в решении задач поиска родительских тел метеороидных потоков. Специальным видом таких функций являются расстояния в фактор-пространствах орбит. Ранее были построены три метрики такого типа, позволяющие не принимать во внимание долготу узла, или аргумент перицентра, или то, и другое. Здесь мы вводим еще одно, четвертое фактор-пространство, в котором отождествляются орбиты с произвольными долготами узлов и аргументами перицентров при условии, что их сумма (долгота перицентра) фиксирована. Определена функция ϱ_6 , играющая роль расстояния между указанными классами орбит. Приведен алгоритм ее вычисления по данным элементам орбит и ссылка на программную реализацию этого алгоритма на языке C++. К сожалению, функция ϱ_6 не является полноценной метрикой. Мы доказали, что она удовлетворяет первым двум аксиомам метрического пространства, но третья — аксиома треугольника — нарушается, по крайней мере для больших эксцентриситетов. Однако в двух важных частных случаях (одна из орбит круговая, долготы перицентров всех трех орбит совпадают) аксиома треугольника верна. Не исключено, что она верна для всех эллиптических орбит, но это требует дальнейшего исследования.

Ключевые слова: кеплерова орбита, метрика, фактор-пространство метрического пространства, расстояние между орбитами.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 18-12-00050).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

1. Введение. Исследование связи метеороидных потоков с кометами и астероидами, поиск родительских тел потоков — одна из интереснейших задач астрономии. Ключевую роль в ее решении играет оценка близости орбит небесных тел, то есть выбор метрики на многообразии орбит, параметризованном той или иной системой орбитальных элементов. В последние 15 лет предложено несколько метрик, превращающих различные пространства кеплеровых орбит в метрические. Важную роль играют фактор-пространства, позволяющие не принимать во внимание те орбитальные элементы, которые меняются вековым образом под влиянием различных возмущений [1–6].

В качестве основного пространства мы рекомендуем пространство \mathbb{H}_2 всех непрямолинейных кеплеровых орбит (мы сохраняем введенную в [3] нумерацию), а в качестве трех фактор-пространств — \mathbb{H}_3 (игнорируются узлы), \mathbb{H}_4 (игнорируются аргументы перигелиев) и \mathbb{H}_5 (игнорируется и то, и другое).

Между тем известны потоки, в которых узлы и перигелии испытывают большие вековые возмущения, тогда как их сумма (долгота перигелия) изменяется мало. Здесь требуется фактор-пространство, в котором отождествляются орбиты с произвольными долготами узлов и аргументами перигелиев при условии, что их сумма фиксирована. Мы будем обозначать это пространство \mathbb{H}_6 , и именно ему посвящена настоящая статья.

План изложения следующий. В разделе 2 дается определение метрики ϱ_2 на пространстве \mathbb{H}_2 и построенных на ее основе метрик в фактор-пространствах \mathbb{H}_3 – \mathbb{H}_5 . Далее, в разделе 3, вводится метрика ϱ_6 на пространстве \mathbb{H}_6 . Вычисление значения ϱ_6 для пары орбит — задача, требующая применения численных методов для нахождения критических точек функции двух переменных. В разделе 4 приведено уравнение, решение которого дает критические точки, а также кратко описан общий алгоритм вычисления ϱ_6 . Вывод уравнения опубликован в статье [7], новшеством же данной работы является программная реализация алгоритма, ссылка на которую дана в разделе 4.

Вопросу о том, выполнено ли для ϱ_6 неравенство треугольника посвящен раздел 5, в котором показано, что неравенство может нарушаться для трех гиперболических орбит. Также в этом разделе описаны два частных случая, в которых неравенство все же справедливо: 1) одна из трех орбит круговая, 2) долготы перигелиев всех трех орбит одинаковы.

2. Пространства $\mathbb{H}_2 \div \mathbb{H}_5$. Элементами пространства \mathbb{H}_2 служат все непрямолинейные кеплеровы орбиты \mathcal{E} . Положение на орбите мы опускаем, но направление движения по орбите учитываем. Орбита определяется пятью кеплеровыми элементами: p, e, i, Ω, ω — фокальным параметром, эксцентриситетом, наклоном, долготой восходящего узла и аргументом перигелия.

Элементами пространства \mathbb{H}_3 являются классы орбит с фиксированными p, e, i, ω и всевозможными значениями Ω .

Элементами пространства \mathbb{H}_4 являются классы орбит с фиксированными p, e, i, Ω и всевозможными значениями ω .

Элементами пространства \mathbb{H}_5 являются классы орбит с фиксированными p, e, i , и всевозможными значениями ω, Ω .

Пространство \mathbb{H}_2 пятимерно, \mathbb{H}_3 и \mathbb{H}_4 четырехмерны, \mathbb{H}_5 трехмерно.

В работе [2] на пространстве \mathbb{H}_2 введена метрика ϱ_2 , значение которой на паре орбит \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 выражается через кеплеровы элементы следующим образом:

$$\begin{aligned}\varrho_2^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) &= (1 + e_1^2)p_1 + (1 + e_2^2)p_2 - 2\zeta_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)\sqrt{p_1 p_2}, \\ \zeta_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) &= \cos I + e_1 e_2 \cos P,\end{aligned}\quad (1)$$

где I — взаимный наклон, P — угол между векторами Лапласа — Рунге — Ленца:

$$\begin{aligned}\cos I &= c_1 c_2 + s_1 s_2 \cos \Delta, \\ \cos P &= s_1 s_2 \sin \omega_1 \sin \omega_2 + (\cos \omega_1 \cos \omega_2 + c_1 c_2 \sin \omega_1 \sin \omega_2) \cos \Delta + \\ &+ (c_2 \cos \omega_1 \sin \omega_2 - c_1 \sin \omega_1 \cos \omega_2) \sin \Delta, \\ c_j &= \cos i_j, \quad s_j = \sin i_j, \quad j = 1, 2, \quad \Delta = \Omega_1 - \Omega_2.\end{aligned}\quad (2)$$

Смысл формулы (1) становится ясным, если перейти от кеплеровых элементов к векторам интегралов площадей $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ и векторам Лапласа — Рунге — Ленца $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ орбит:

$$\varrho_2^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)^2 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{K}_i}{\varkappa}, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i |\mathbf{u}_i|, \quad (4)$$

а \varkappa^2 — гравитационный параметр.

Таким образом, ϱ_2 — евклидово расстояние между 6-мерными векторами $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ и $(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)$, определяющими криволинейные орбиты. Отметим, что, как следует из определений (3) и (1), физическая размерность ϱ_2 — корень из единицы длины.

Метрики ϱ_3 – ϱ_5 на пространствах \mathbb{H}_3 – \mathbb{H}_5 были построены в работах [2, 3] при помощи следующего приема:

$$\varrho_3 = \min_{\omega_1, \omega_2} \varrho_2, \quad \varrho_4 = \min_{\Omega_1, \Omega_2} \varrho_2, \quad \varrho_5 = \min_{\Omega_1, \Omega_2, \omega_1, \omega_2} \varrho_2. \quad (5)$$

Значения этих расстояний между орбитами \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 равны минимальным значениям ϱ_2 между орбитами \mathcal{X} и \mathcal{Y} , все кеплеровские элементы которых, кроме указанных под знаком минимума, совпадают с соответствующими элементами \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 .

Нетрудно заметить, что для ϱ_3 – ϱ_5 справедливы формулы, аналогичные (1):

$$\varrho_k^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = (1 + e_1^2)p_1 + (1 + e_2^2)p_2 - 2\zeta_k(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)\sqrt{p_1 p_2}, \quad (6)$$

где $\zeta_k(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \max \zeta_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, и максимум берется по аргументам, соответствующим номеру метрики в (5). Точные выражения ζ_k через кеплеровские элементы были получены в [3].

Оказалось [3, 4], что все три функции (5) удовлетворяют аксиомам метрического пространства. Опишем их.

Пусть на некотором множестве \mathbb{X} определена функция на $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$, удовлетворяющая следующим трем аксиомам [8–10]. Для любых $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{X}$:

$$\varrho(x_1, x_2) \geq 0, \quad \text{причем } \varrho(x_1, x_2) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x_1 = x_2; \quad (7)$$

$$\varrho(x_1, x_2) = \varrho(x_2, x_1); \quad (8)$$

$$\varrho(x_1, x_3) \leq \varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_3) \quad (\text{аксиома треугольника}). \quad (9)$$

Эта функция называется расстоянием (метрикой) и превращает \mathbb{X} в метрическое пространство. Иногда построить метрику затруднительно и приходится довольствоваться квазиметрикой: функцией на $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$, удовлетворяющей первым двум аксиомам и ослабленной третьей аксиоме. Именно,

$$\varrho(x_1, x_3) \leq M [\varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_3)] \quad (\text{ослабленная аксиома треугольника}) \quad (10)$$

при некоторой постоянной M . Квазиметрика при $M = 1$ является метрикой.

3. Пространство \mathbb{H}_6 . Элементами четырехмерного фактор-пространства \mathbb{H}_6 пространства \mathbb{H}_2 являются классы орбит с фиксированными p, e, i и всевозможными значениями ω, Ω , удовлетворяющими условию $\omega + \Omega = \varpi$, при фиксированной долготе перицентра ϖ .

Минимальное расстояние между представителями классов эквивалентности было предложено в [7] на роль расстояния в фактор-пространстве \mathbb{H}_6 :

$$\varrho_6 = \min \varrho_2. \quad (11)$$

Здесь при вычислении минимума фиксируются элементы p_j, e_j, i_j и ϖ_j , $j = 1, 2$ обеих орбит, а углы Ω_j и ω_j варьируются, оставаясь связанными соотношениями $\Omega_j + \omega_j = \varpi_j$.

4. Вычисление ϱ_6 . Представление (6) очевидно справедливо и для ϱ_6 :

$$\begin{aligned} \varrho_6^2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) &= (1 + e_1^2)p_1 + (1 + e_2^2)p_2 - 2\zeta_6(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)\sqrt{p_1 p_2}, \\ \zeta_6(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) &= \max \zeta_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Однако, в отличие от ζ_3 – ζ_5 , выразить ζ_6 через элементарные функции элементов орбит не удастся (мы не располагаем доказательством того, что такое выражение невозможно и будем рады узнать, что кому-то удалось его найти).

В работе [7] показано, что задача отыскания критических точек ζ_2 на паре элементов пространства \mathbb{H}_6 сводится к решению относительно y двух уравнений вида

$$a_0 + a_1 \sin y + a_2 \sin(y - \varpi) + a_3 \sin(2y - \varpi) + a_4 \sin(2y - 2\varpi) + a_5 \sin(3y - 2\varpi) = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= e_1 e_2 s_1^2 s_2^2 \sin \varpi, \\ a_1 &= -e_1 e_2 s_1 s_2 (1 + c_1 + c_2 - 3c_1 c_2), \\ a_2 &= -2s_1 s_2 (1 - c_1 c_2) (2 + \mu e_1 e_2), \\ a_3 &= -e_1 e_2 (1 - c_1) (1 - c_2) (1 - c_1 - c_2 - 3c_1 c_2), \\ a_4 &= s_1^2 s_2^2 (2 + \mu e_1 e_2), \\ a_5 &= e_1 e_2 s_1 s_2 (1 - c_1) (1 - c_2), \\ \mu &= \pm 1. \end{aligned}$$

Изложим кратко алгоритм вычисления ϱ_6 , приведенный в [7].

1. При $\mu = 1$ и $\mu = -1$, $-\pi < y \leq \pi$ находим все вещественные корни $y_n(\mu)$ уравнения (13). При каждом μ их не более шести.
2. Каждому корню $y_n(\mu)$ отвечает ровно одно значение $x_n(\mu)$, вычисляемое по формулам

$$\cos x = \mu \frac{s_1 s_2 - (1 - c_1 c_2) \cos(y - \varpi)}{D}, \quad \sin x = \mu \frac{(c_2 - c_1) \sin(y - \varpi)}{D}, \quad (14)$$

где

$$D = (1 - c_1 c_2) - s_1 s_2 \cos(y - \varpi).$$

Получаем несколько (не более 12) точек вида $(x_n(\mu), y_n(\mu))$.

3. Для каждой пары $(x_n(\mu), y_n(\mu))$ определяем ζ_2 по формуле

$$\zeta_2(x, y) = A_0 + A_1 \cos(\varpi - y) + A_2 \cos y - A_2 \cos x + B_1 \cos(\varpi - x - y) + B_2 \cos(\varpi - 2y) + B_3 \cos \varpi + B_4 \cos(\varpi + x - y), \quad (15)$$

где

$$A_0 = c_1 c_2, \quad A_1 = s_1 s_2, \quad 2A_2 = e_1 e_2 s_1 s_2, \quad \varpi = \varpi_1 - \varpi_2,$$

$$4B_1 = e_1 e_2 (1 - c_1)(1 + c_2),$$

$$4B_2 = e_1 e_2 (1 - c_1)(1 - c_2),$$

$$4B_3 = e_1 e_2 (1 + c_1)(1 + c_2),$$

$$4B_4 = e_1 e_2 (1 + c_1)(1 - c_2).$$

4. Величина ζ_6 равна наибольшему из чисел $\zeta_2(x_n(\mu), y_n(\mu))$.
5. Искомая величина ϱ_6 дается формулой (12).

Изложенный алгоритм реализован в виде программы, которую можно скачать по ссылке: <https://drive.google.com/drive/folders/1cGCTHqXqatGfReK3jXRrhLEc8pdzJwk?usp=sharing>. Программа написана на языке C++. Для численного решения уравнения была использована библиотека `distlink` из статьи [11]. На вход программе подается количество орбит и элементы для каждой орбиты, она рассчитывает расстояние между выбранным числом орбит (считая расстояния между каждой орбитой со всеми остальными). Более подробное описание программы можно прочитать в файле `Read.txt`, доступном по ссылке, приведенной выше.

Укажем три частных случая, в которых функция ζ_6 (а вместе с ней и ϱ_6) выражается в элементарных функциях.

1. Если хотя бы одна из орбит круговая, то

$$\zeta_6 = \cos(i_1 - i_2). \quad (16)$$

2. Если хотя бы одна из орбит (дадим ей номер 2) лежит в основной плоскости и описывает прямое движение, так что $\sin i_2 = 0$, $\cos i_2 = 1$, то

$$\zeta_6 = c_1 + \frac{1}{2}(1 - c_1)e_1 e_2 + \frac{1}{2}(1 + c_1)e_1 e_2 \cos \varpi. \quad (17)$$

Здесь и далее $s_1 = \sin i_1$, $s_2 = \sin i_2$, $c_1 = \cos i_1$, $c_2 = \cos i_2$.

3. Если хотя бы одна из орбит (дадим ей номер 2) лежит в основной плоскости, но описывает обратное движение, так что $\sin i_2 = 0$, $\cos i_2 = -1$, то

$$\zeta_6 = -c_1 + e_1 e_2. \quad (18)$$

5. Неравенство треугольника для ϱ_6 . Перейдем к свойствам функции ϱ_6 .

А. Функция ϱ_6 не удовлетворяет даже ослабленной аксиоме треугольника (10). Это следует из нижеприведенного примера.

Представим орбиту \mathcal{E} из \mathbb{H}_2 вектором $F(\mathcal{E})$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$:

$$F(\mathcal{E}) = \sqrt{p} \begin{pmatrix} c \\ -i s \exp i(\varpi - \omega) \\ \frac{e}{2} ((c+1) \exp i\varpi + (1-c) \exp i(\varpi - 2\omega)) \\ s e \sin \omega \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Здесь, как и прежде, p, e, ω, ϖ — фокальный параметр, эксцентриситет, аргумент перицентра и долгота перицентра орбиты, c и s — косинус и синус наклона, а i — мнимая единица.

Первые две координаты $F(\mathcal{E})$ соответствуют высоте и проекции на базовую плоскость определенного равенством (4) вектора \mathbf{u} , пропорционального моменту импульса. Третья и четвертая — проекции и высоте вектора \mathbf{v} , пропорционального вектору Лапласа — Рунге — Ленца. При изменении аргумента перицентра ω от 0 до 2π вектор \mathbf{u} движется по окружности радиуса s , а \mathbf{v} описывает восьмерку на сфере радиуса $e\sqrt{p}$ с узлом в точке $\omega = 0$.

При этом

$$\varrho_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = |F(\mathcal{E}_1) - F(\mathcal{E}_2)|, \quad \varrho_6(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \min_{\omega_1, \omega_2} |F(\mathcal{E}_1) - F(\mathcal{E}_2)|,$$

где модуль вектора с комплексными координатами (b_1, b_2, b_3, b_4) обозначает величину $(|b_1|^2 + |b_2|^2 + |b_3|^2 + |b_4|^2)^{1/2}$.

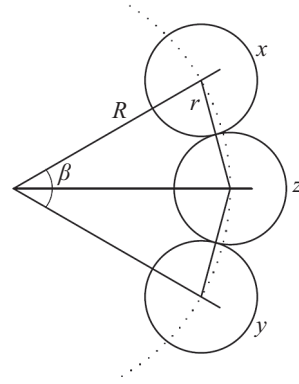
При изменении ω_1 и ω_2 от 0 до 2π третьи компоненты векторов $F(\mathcal{E}_1)$ и $F(\mathcal{E}_2)$ описывают окружности с центрами $e_j \sqrt{p_j} (1 + c_j) \exp i\varpi_j / 2$ и радиусами $e_j \sqrt{p_j} (1 - c_j) / 2$, $j = 1, 2$. Расстояние между $F(\mathcal{E}_1)$ и $F(\mathcal{E}_2)$ не меньше расстояния между ближайшими точками этих окружностей, что влечет неравенство

$$2\varrho_6(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \geq |e_1 \sqrt{p_1} (1 + c_1) \exp i\varpi_1 - e_2 \sqrt{p_2} (1 + c_2) \exp i\varpi_2| - [e_1 \sqrt{p_1} (1 - c_1) + e_2 \sqrt{p_2} (1 - c_2)] \quad (20)$$

для любых $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathbb{H}_2$.

Обозначим для краткости три орбиты, необходимые нам для примера, через x, y, z . Их элементы приведем в таблице:

Элемент	x	y	z
p	1	1	1
e	e	e	e
i	i	i	i
ϖ	β	$-\beta$	0



Проекции векторов \mathbf{v} орбит из классов x , y и z на базовую плоскость. $R = e(1+c)/2$, $r = e(1-c)/2$.

Свяжем элементы соотношениями

$$e > 0, \quad 7 - 4\sqrt{3} = 0.071797 < c < 1, \quad \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1-c}{1+c}, \quad (21)$$

обеспечивающими касание окружностей, задаваемых третьей координатой вектора (19) у пар орбит x, z и y, z . Соотношения (21) нетрудно получить, сопоставляя (19) с рисунком, на котором показано расположение проекций векторов \mathbf{v} орбит из классов x , y и z на базовой плоскости.

Используя (20), (21), оценим

$$\begin{aligned} \varrho_6(x, y) &\geq \frac{e}{2} [(1+c) |\exp i\beta - \exp(-i\beta)| - 2(1-c)] = e [(1+c) \sin \beta - (1-c)] = \\ &= e(1-c) \left[2\sqrt{1 - \left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2} - 1 \right] = e(1-c) \left(\frac{4\sqrt{c}}{1+c} - 1 \right), \quad (22) \end{aligned}$$

что положительно в силу первых соотношений (21). Функцию $\varrho_6(x, z)$ оценим сверху расстоянием ϱ_2 между следующими представителями $x(\omega_1)$ и $z(\omega_2)$ классов x и z :

$$\omega_1 = \frac{\pi + \beta}{4}, \quad \omega_2 = \frac{3\pi - \beta}{4}.$$

Прямым вычислением, учитывая (21), можно убедиться, что векторы \mathbf{v}_x и \mathbf{v}_z этих представителей совпадают:

$$\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_z = \frac{e}{2} \left((1+c) \cos^2 \frac{\beta}{2}, (1-c) \cos \frac{\beta}{2}, 2s \sin \frac{\pi + \beta}{4} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varrho_6^2(x, z) &\leq \varrho_2^2(x, z) \leq s^2 |\exp i(\beta - \omega_1) - \exp(-i\omega_2)|^2 = \\ &= s^2 |\exp i(\beta - (\omega_1 - \omega_2)) - 1|^2 = 2s^2 \left(1 + \sin \frac{\beta}{2} \right) = \frac{4s^2}{1+c} = 4(1-c). \quad (23) \end{aligned}$$

Пара орбит y, z получается из пары z, x сдвигом на $-\beta$ по координате ϖ . Из формулы (19) видно, что такой сдвиг не меняет расстояний ϱ_2 и ϱ_6 . Следовательно, $\varrho_6(y, z) =$

$\varrho_6(x, z)$. Из (20), (23) следует

$$\frac{\varrho_6(x, y)}{\varrho_6(x, z) + \varrho_6(y, z)} \geq \frac{e}{4} \sqrt{1-c} \left[\frac{4\sqrt{c}}{1+c} - 1 \right]. \quad (24)$$

Правая часть (24) положительна и неограниченно возрастает с ростом e . Таким образом, универсальной постоянной M , обеспечивающей неравенство (10), не существует.

Однако наш контр-пример требует нереально большого эксцентриситета. Прямой расчет дает для правой части (24) наибольшее значение 0.1576949 e при $c = 0.4512257$. Таким образом, неравенство треугольника (9) может гарантированно нарушаться для тройки x, y, z только при $e > 6.341360$.

Возможно, для негиперболических орбит ϱ_6 все же удовлетворяет аксиоме треугольника (9). Пока мы не смогли доказать (или опровергнуть) это утверждение. В его пользу говорят нижеследующие свойства.

Б. Пусть орбита x круговая, а y и z произвольны. Обозначим соответствующие орбитам пары векторов, определенные равенством (4), $(\mathbf{u}_x, \mathbf{v}_x)$, $(\mathbf{u}_y, \mathbf{v}_y)$ и $(\mathbf{u}_z, \mathbf{v}_z)$. По определению имеем

$$\varrho_6(y, z) = \min_{R, S} \|R\mathbf{u}_y - S\mathbf{u}_z, \bar{R}\mathbf{v}_y - \bar{S}\mathbf{v}_z\| = \|R_0\mathbf{u}_y - S_0\mathbf{u}_z, \bar{R}_0\mathbf{v}_y - \bar{S}_0\mathbf{v}_z\|. \quad (25)$$

Запятыя между парами трехмерных векторов в (25) соединяют их в векторы шестимерные, для которых вычисляется евклидова норма. Минимум берется по всем поворотам R и S трехмерного пространства вокруг оси аппликат. Каждое из этих преобразований соответствует одному значению долготы восходящего узла; \bar{R} и \bar{S} обозначают преобразования векторов $\mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z$ такие, что $(R\mathbf{u}_y, \bar{R}\mathbf{v}_y) \sim (\mathbf{u}_y, \mathbf{v}_y)$ и $(S\mathbf{u}_z, \bar{S}\mathbf{v}_z) \sim (\mathbf{u}_z, \mathbf{v}_z)$. Индексом 0 отмечена та пара преобразований, на которой достигается минимум.

Пусть P и Q — такие повороты вокруг оси z , что векторы $\mathbf{u}_x, P\mathbf{u}_y$ и $Q\mathbf{u}_z$ лежат в одной плоскости вместе с ортом \mathbf{k} , по одну сторону от последнего. Тогда

$$\begin{aligned} \varrho_6(y, z) &\geq \|P\mathbf{u}_y - Q\mathbf{u}_z, \bar{R}_0\mathbf{v}_y - \bar{S}_0\mathbf{v}_z\|, \\ \varrho_6(x, y) &= \|P\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_x, \mathbf{v}_y\| = \|P\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_x, \bar{R}_0\mathbf{v}_y\|, \\ \varrho_6(x, z) &= \|Q\mathbf{u}_z - \mathbf{u}_x, \mathbf{v}_z\| = \|Q\mathbf{u}_z - \mathbf{u}_x, \bar{S}_0\mathbf{v}_z\|. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку три шестимерных вектора под знаками нормы в (26) образуют треугольник, выполнено неравенство

$$\varrho_6(x, y) \leq \varrho_6(y, z) + \varrho_6(x, z).$$

По той же причине оценки

$$\begin{aligned} \varrho_6(y, z) &\leq \|P\mathbf{u}_y - Q\mathbf{u}_z, \bar{P}\mathbf{v}_y - \bar{Q}\mathbf{v}_z\|, \\ \varrho_6(x, y) &= \|P\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_x, \bar{P}\mathbf{v}_y\|, \\ \varrho_6(x, z) &= \|\mathbf{u}_x - Q\mathbf{u}_z, -\bar{Q}\mathbf{v}_z\|, \end{aligned}$$

влекут неравенство

$$\varrho_6(y, z) \leq \varrho_6(x, y) + \varrho_6(x, z).$$

Таким образом, если среди трех орбит есть круговая, то найдется треугольник с длинами сторон, равными расстояниям между орбитами. Отметим, что эксцентриситет двух других орбит может быть любым.

В. Введем подмножество $\mathbb{H}_6(\varpi) \subset \mathbb{H}_6$, состоящее из орбит с фиксированной длиной перицентра ϖ . Для пары орбит из этого подпространства минимальное расстояние между представителями классов эквивалентности достигается при значениях аргументов перицентра, равных 0 или π . Фиксируя соответствующего представителя в каждом классе, мы получим изометричное вложение $(\mathbb{H}_6(\varpi), \varrho_6)$ в $(\mathbb{H}_2, \varrho_2)$. Учитывая, что векторы Лапласа — Рунге — Ленца всех выбранных нами представителей сонаправлены, а векторы момента импульса лежат в одной полуплоскости, нетрудно заключить, что $(\mathbb{H}_6(\varpi), \varrho_6)$ изометрично прямому произведению полуплоскости и луча с евклидовой метрикой.

Таким образом, пространство $(\mathbb{H}_6(\varpi), \varrho_6)$ — метрическое, и аксиома треугольника (9) справедлива.

6. Заключение. Критерий близости орбит, выраженный через параметры форм орбит (p, e) , их наклонений (i) и долгот перицентров (ϖ) , представляет собой полезный инструмент исследования метеорных потоков. Именно таким критерием является функция ϱ_6 , рассмотренная в нашей статье. Эта функция логически продолжает ряд метрик ϱ_2 – ϱ_5 на пространстве кеплеровских орбит, построенных в предыдущих работах на данную тему. Однако, как показано в разделе 5 (свойство А), для ϱ_6 не выполняется неравенство треугольника на всем пространстве \mathbb{H}_6 . В то же время построенный нами пример нарушения неравенства требует высоких значений эксцентриситетов орбит ($e > 6.3$). Вопрос о том, будет ли ϱ_6 метрикой на множестве негиперболических орбит, остается открытым. В разделе 5 (свойства Б и В) рассмотрены два частных случая, в которых неравенство справедливо: 1) одна из трех орбит круговая, 2) долготы перицентров всех трех орбит одинаковы.

Вычисление значения ϱ_6 по заданным элементам пары орбит требует применения численных методов. В разделе 4 приведено краткое описание алгоритма решения этой задачи и дана ссылка на реализующую его программу.

Литература

1. Kholshchevnikov K. V. Metric Spaces of Keplerian Orbits. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **100** (3), 169–179 (2008).
2. Холшевников К. В. О метриках в пространствах кеплеровских орбит. *Физика космоса: Труды 45-й международной студ. науч. конф.*, Екатеринбург, 1–5 февраля 2016. Екатеринбург, Изд-во УрФУ, 168–184 (2016).
3. Kholshchevnikov K. V., Kokhirova G. I., Babadzhyanov P. B., Khamroev U. H. Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin. *MNRAS* **462** (2), 2275–2283 (2016).
4. Milanov D. V. Metrics in Keplerian orbits quotient spaces. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **130**, 27 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9820-1>
5. Кузнецов Э. Д., Сафронова В. С. Приложение метрик пространства кеплеровых орбит для поиска астероидов на близких орбитах. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, (4), вып. 2, 86–92 (2017).
6. Kuznetsov E., Safronova V. Application of metrics in the space of orbits to search for asteroids on close orbits. *Planetary and Space Science* **157**, 22–27 (2018).
7. Холшевников К. В., Щепалова А. С., Джазмати М. С. Об одном фактор-пространстве кеплеровых орбит. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 1, 165–174 (2020). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.116>
8. Хаусдорф Ф. *Теория множеств*, пер. с англ. Москва, КомКнига (2006).

9. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии*, пер. с англ. Москва, Ижевск, ИКИ (2004).

10. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, пер. с англ. Москва, Наука (1984).

11. Baluev R., Mikryukov D. Fast error-controlling MOID computation for confocal elliptic orbits. *Astronomy and Computing* **27**, 11–22 (2019).

Статья поступила в редакцию 14 октября 2020 г.;

после доработки 24 ноября 2020 г.;

рекомендована в печать 17 декабря 2020 г.

Контактная информация:

Холшевников Константин Владиславович — д-р физ.-мат. наук, проф. (1939–2021)

Миланов Данила Владимирович — аспирант; danila.milanov@gmail.com

Щепалова Анастасия Сергеевна — аспирант; shepalovanastya@mail.ru

The space of Keplerian orbits and a family of its quotient spaces*

K. V. Kholshchevnikov[†], D. V. Milanov, A. S. Shchepalova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Kholshchevnikov K. V., Milanov D. V., Shchepalova A. S. The space of Keplerian orbits and a family of its quotient spaces. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 2, pp. 359–369.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.215> (In Russian)

Distance functions on the set of Keplerian orbits play an important role in solving problems of searching for parent bodies of meteoroid streams. A special kind of such functions are distances in the quotient spaces of orbits. Three metrics of this type were developed earlier. These metrics allow to disregard the longitude of ascending node or the argument of pericenter or both. Here we introduce one more quotient space, where two orbits are considered identical if they differ only in their longitudes of nodes and arguments of pericenters, but have the same sum of these elements (the longitude of pericenter). The function ϱ_6 is defined to calculate distance between two equivalence classes of orbits. The algorithm for calculation of ϱ_6 value is provided along with a reference to the corresponding program, written in C++ language. Unfortunately, ϱ_6 is not a full-fledged metric. We proved that it satisfies first two axioms of metric space, but not the third one: the triangle inequality does not hold, at least in the case of large eccentricities. However there are two important particular cases when the triangle axiom is satisfied: one of three orbits is circular, longitudes of pericenters of all three orbits coincide. Perhaps the inequality holds for all elliptic orbits, but this is a matter of future research.

Keywords: Keplerian orbit, metric, quotient space of metric space, distance between orbits.

References

1. Kholshchevnikov K. V. Metric Spaces of Keplerian Orbits. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **100** (3), 169–179 (2008).

2. Kholshchevnikov K. V. On metrics in the space of Keplerian orbits. *Physics of space: Proceedings of 45th International student scientific conference*, Ekaterinburg, 1–5 February 2016, Ekaterinburg, Ural University Press, 168–184 (2016). (In Russian)

*This work is supported by Russian Science Foundation (grant no. 18-12-00050).

3. Kholshchevnikov K. V., Kokhirova G. I., Babadzhanov P. B., Khamroev U. H. Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin. *MNRAS* **462** (2), 2275–2283 (2016).
4. Milanov D. V. Metrics in Keplerian orbits quotient spaces. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **130**, 27 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9820-1>
5. Kuznetsov E. D., Safronova V. S. Using of metrics in the space of orbits to searching for asteroids on close orbits. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, (4), iss. 2, 86–92 (2017). (In Russian)
6. Kuznetsov E., Safronova V. Application of metrics in the space of orbits to search for asteroids on close orbits. *Planetary and Space Science* **157**, 22–27 (2018).
7. Kholshchevnikov K. V., Shchepalova A. S., Jazmati M. S. On a quotient space of Keplerian orbits. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss. 1, 165–174 (2020). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.116> (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersburg Univ., Math.* **53**, iss. 1, 108–114 (2020). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.116>].
8. Hausdorff F. *Set Theory*. AMS Chelsea Publishing (2005). [Russ. ed.: Hausdorff F. *Teoriia mnozhestv*. Moscow, KomKniga (2006)].
9. Burago D. Y., Burago Y. D., Ivanov S. V. *A course in metric geometry*. In: Graduate Studies of Mathematics, vol. 33. AMS (2001). [Russ. ed.: Burago D. Y., Burago Y. D., Ivanov S. V. *Kurs metricheskoi geometrii*. Moscow, IKI Publ. (2004)].
10. Korn G., Korn T. *Mathematical handbook for scientists and engineers*. Courier Corporation (2013). [Russ. ed.: Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*. Moscow, Nauka Publ. (1984)].
11. Baluev R., Mikryukov D. Fast error-controlling MOID computation for confocal elliptic orbits. *Astronomy and Computing* **27**, 11–22 (2019).

Received: October 14, 2020
 Revised: November 24, 2020
 Accepted: December 17, 2020

Authors' information:

Konstantin V. Kholshchevnikov (1939–2021)
Danila V. Milanov — danila.milanov@gmail.com
Anastasia S. Shchepalova — shepalovanastya@mail.ru