МАТЕМАТИКА

УДК 519.21
MSC 60E05, 60E07, 60E10, 60F99

О сходимости и компактности по вариации со сдвигом дискретных вероятностных законов*

И. А. Алексеев[1], *А. А. Хартов*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Смоленский государственный университет,
Российская Федерация, 214000, Смоленск, ул. Пржевальского, 4

Для цитирования: *Алексеев И. А., Хартов А. А.* О сходимости и компактности по вариации со сдвигом дискретных вероятностных законов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 3. С. 385–393. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.301

Рассматривается класс дискретных функций распределения, чьи характеристические функции отделены от нуля, т. е. их модуль больше некой положительной константы на всей числовой оси. Данный класс достаточно широк: содержит дискретные безгранично делимые функции распределения, функции решетчатых распределений с характеристическими функциями без нулей на числовой прямой, а также функции распределения со скачком, большим 1/2. В недавней работе авторами было показано, что характеристические функции, соответствующие элементам этого класса, допускают представление типа Леви — Хинчина с немонотонной спектральной функцией, что включает данный класс в число так называемых квази-безгранично делимых функций распределения. Также для последовательностей из данного класса на основе указанных представлений были получены предельные теоремы и теоремы о компактности со сходимостью по вариации. В данной заметке получены аналогичные результаты о сходимости и компактности, но с несколько ослабленной сходимостью по вариации. Изменения типа сходимости значительно расширяют применимость этих результатов.

Ключевые слова: характеристические функции, представление типа Леви — Хинчина, квази-безгранично делимые законы, сходимость по вариации, относительная компактность, стохастическая компактность.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Немецкого научно-исследовательского общества (грант № 20-51-12004).

1. Введение. Пусть F — функция произвольного дискретного распределения на числовой прямой $\mathbb{R}$. Представим ее в следующем виде:

$$F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} p_{x_k} I_{x_k}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где x_k — это различные вещественные числа, $p_{x_k} \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$ (множество натуральных чисел) и $\sum_{k=1}^{\infty} p_{x_k} = 1$. Здесь и далее $I_c(x) = 1$ для $x \geqslant c$ и $I_c(x) = 0$ для $x < c$, где c — любое фиксированное вещественное число.

Пусть f — характеристическая функция, соответствующая F, т. е.

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{x_k} e^{itx_k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Предположим, что функция f отделена от нуля, т. е. удовлетворяет условию:

$$\textit{найдется} \quad \mu > 0 \quad \textit{такое, что} \quad |f(t)| \geqslant \mu > 0 \quad \textit{при всех} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{S}$$

Как показано в работе [1], это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы функция f имела следующее представление:

$$f(t) = \exp\Bigg\{it\gamma + \sum_{u \in \langle X \rangle \setminus \{0\}} \lambda_u (e^{itu} - 1)\Bigg\}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $X := \big\{x_k : p_{x_k} > 0,\, k \in \mathbb{N}\big\} \neq \varnothing$ — множество точек роста F, $\langle X \rangle = \big\{ \sum_{k=1}^{n} c_k x_k : c_k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\big\}$ — модуль, порожденный X, над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, $\gamma \in \langle X \rangle$, $\lambda_u \in \mathbb{R}$ при $u \in \langle X \rangle$, $u \neq 0$, и $\sum_{u \in \langle X \rangle \setminus \{0\}} |\lambda_u| < \infty$. Основная идея доказательства этого утверждения состоит в рассмотрении f как почти периодической функции на $\mathbb{R}$ и представлении ее (либо ее приближения) в качестве диагональной для некой функции нескольких переменных, которая уже будет периодической по ним. Техника рассмотрения периодического случая известна (см. [2] и [3]).

Пусть $\boldsymbol{D}_S$ — это класс дискретных функций распределения, чьи характеристические функции удовлетворяют (S). Класс $\boldsymbol{D}_S$ достаточно широк. Например, этому классу принадлежат функции распределения со скачком, бо́льшим $1/2$. Более точно, если существует такое x_{k_0}, что $p_{x_{k_0}} > 1/2$, то $F \in \boldsymbol{D}_S$. Это видно из следующей оценки:

$$|f(t)| = \Bigg| p_{x_{k_0}} e^{itx_{k_0}} + \sum_{k \in \mathbb{N}:\, k \neq k_0} p_{x_k} e^{itx_k} \Bigg| \geqslant p_{x_{k_0}} - \sum_{k \in \mathbb{N}:\, k \neq k_0} p_{x_k} =$$
$$= p_{x_{k_0}} - (1 - p_{x_{k_0}}) = 2p_{x_{k_0}} - 1 > 0.$$

Также класс $\boldsymbol{D}_S$ содержит дискретные безгранично делимые функции распределения, характеризующиеся представлением (1), но лишь с $\lambda_u \geqslant 0$, и функции решетчатых распределений с характеристическими функциями без нулей на $\mathbb{R}$ (см. [1] и [2]). При этом, однако, в общем случае (S) является более сильным условием, чем просто отсутствие нулей у функции f на $\mathbb{R}$, т. е. $f(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Существуют примеры выполнения последнего и нарушения условия (S) (см. [4]).

Благодаря представлению (1) $\boldsymbol{D}_S$ включается в семейство так называемых *квази-безгранично делимых функций распределения* (см. [2] и [5]), т. е. таких F, у которых характеристические функции f имеют представление типа Леви — Хинчина:

$$f(t) = \exp\left\{it\gamma - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) d\Lambda(x)\right\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Здесь $\gamma \in \mathbb{R}$, $\sigma \geqslant 0$, а функция Λ имеет ограниченную вариацию на каждом из интервалов $(-\infty, r]$ и $[r, \infty)$ при любом $r > 0$, а также удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to-\infty} \Lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} \Lambda(x) = 0, \qquad \int\limits_{0<|x|<\delta} x^2 d|\Lambda|(x) < \infty, \quad \delta > 0.$$

Класс квази-безгранично делимых функций распределения в настоящее время активно изучается (см. [2, 3, 6–8]) и находит применения в теории случайных процессов (см. [5] и [9]), теории чисел (см. [10]), физике (см. [11] и [12]) и финансовой математике (см. [13]).

В работе [1] для класса $\boldsymbol{D}_S$ на основе представлений (1) были получены предельные теоремы и теоремы о компактности со сходимостью по вариации. Более точно, для последовательностей функций распределения из $\boldsymbol{D}_S$ в терминах их параметров γ и чисел λ_u был найден критерий сходимости по вариации к данной функции распределения из этого же класса. Также для последовательностей из $\boldsymbol{D}_S$ был получен критерий *$\boldsymbol{D}_S$-относительной компактности по вариации*, т. е. свойства, при котором из любой подпоследовательности можно выделить новую подпоследовательность, сходящуюся по вариации к некой функции распределения из класса $\boldsymbol{D}_S$. Дополнительно для таких же последовательностей был найден критерий *$\boldsymbol{D}_S$-стохастической компактности по вариации*, т. е. свойства, при котором из любой подпоследовательности можно выделить новую подпоследовательность, сходящуюся по вариации к некой функции невырожденного распределения из класса $\boldsymbol{D}_S$. Приведенные понятия компактности являются соответствующими модификациями хорошо известных понятий относительной и стохастической компактностей, вводимых на основе слабой сходимости (см. [14] и [15]). Точные формулировки критериев сходимости и компактности будут приведены в следующем пункте.

В данной заметке мы получим аналогичные критерии сходимости и компактности, но с несколько ослабленной сходимостью по вариации. При этом небольшие изменения типа сходимости значительно расширяют применимость вышеуказанных результатов.

2. Результаты. Пусть функция распределения $F \in \boldsymbol{D}_S$ имеет характеристическую функцию f с представлением (1). Пусть $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность функций распределения из $\boldsymbol{D}_S$, а $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — соответствующая последовательность характеристических функций. Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ представление f_n имеет вид

$$f_n(t) = \exp\left\{it\gamma_n + \sum_{u\in\langle X_n\rangle\setminus\{0\}} \lambda_{n,u}(e^{itu} - 1)\right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $X_n \neq \varnothing$ — множество точек роста F_n, $\langle X_n\rangle$ — модуль, порожденный X_n, над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, $\gamma_n \in \langle X_n\rangle$, $\lambda_{n,u} \in \mathbb{R}$ при $u \in \langle X_n\rangle$, $u \neq 0$, и

$\sum_{u\in\langle X_n\rangle\setminus\{0\}} |\lambda_{n,u}| < \infty$. Здесь и далее суммы по пустым множествам полагаются равными нулю. Также мы всегда будем считать, что $\lambda_u = 0$, $u \notin \langle X\rangle$, и $\lambda_{n,u} = 0$, $u \notin \langle X_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим вопрос об условиях сходимости по вариации F_n к F при $n \to \infty$. Напомним, что по определению F_n сходятся по вариации к F (обозначаем $F_n \xrightarrow{\text{var}} F$) при $n \to \infty$, если $\|F_n - F\| \to 0$, $n \to \infty$, где для заданной на $\mathbb{R}$ функции ограниченной вариации G символом $\|G\|$ мы обозначаем ее полную вариацию на $\mathbb{R}$ (см. [16]). Приведем в терминах параметров представлений (1) и (2) критерий сходимости по вариации F_n к F при $n \to \infty$, полученный в работе [1].

Теорема 1. $F_n \xrightarrow{\text{var}} F$, $n \to \infty$, *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(i) *существует* $n_0 \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\gamma_n = \gamma$ *для всех* $n \geqslant n_0$*;*

(ii) $\sum\limits_{\substack{u\in\langle X_n\rangle\cup\langle X\rangle,\\ u\neq 0}} |\lambda_{n,u} - \lambda_u| \to 0$, $n \to \infty$.

Теперь сформулируем критерии $\boldsymbol{D}_S$-относительной и $\boldsymbol{D}_S$-стохастической компактностей по вариации последовательности $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Введем множество

$$\mathcal{U} = \langle X_1\rangle \cup \langle X_2\rangle \cup \ldots \cup \langle X_n\rangle \cup \ldots = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}.$$

Всегда $0 \in \langle X_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, поэтому положим $u_0 := 0$.

Теорема 2. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *является* $\boldsymbol{D}_S$*-относительно компактной тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(i) $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *имеет лишь конечное число значений из* $\mathcal{U}$*;*

(ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{u\in\langle X_n\rangle\setminus\{0\}} |\lambda_{n,u}| < \infty$*;*

(iii) $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{\substack{u_k\in\mathcal{U}\setminus\{0\}:\\ k>N}} |\lambda_{n,u_k}| = 0.$

Теорема 3. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *является* $\boldsymbol{D}_S$*-стохастически компактной тогда и только тогда, когда* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boldsymbol{D}_S$*-относительно компактна и дополнительно*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{u\in\langle X_n\rangle\setminus\{0\}} |\lambda_{n,u}| > 0.$$

Условия (i) из теорем 1 и 2 являются достаточно сильными. Их можно ослабить, незначительно изменив тип сходимости.

Будем говорить, что последовательность $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится по вариации со сдвигом* к F, если $F_n(\,\cdot\, + a_n) \xrightarrow{\text{var}} F$, $n \to \infty$, с некоторыми вещественными $a_n \to 0$, $n \to \infty$. В этом случае мы будем писать $F_n \xrightarrow{\overline{\text{var}}} F$, $n \to \infty$. При таком определении обычная сходимость по вариации влечет сходимость по вариации со сдвигом. Несложно видеть, что обратное утверждение неверно. Действительно, пусть $F(x) = I_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и $F_n(x) = I_{a_n}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, где $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $a_n \to 0$,

$n \to \infty$. Здесь $F_n \xrightarrow{\overline{\text{var}}} F$, $n \to \infty$, но обычной сходимости по вариации нет, так как $\|F - F_n\| = 2$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Сформулируем критерий сходимости по вариации со сдвигом. В нем помимо F и F_n, $n \in \mathbb{N}$, будут задействованы их центрированные версии $\overline{F}(x) := F(x+\gamma)$, $x \in \mathbb{R}$, и $\overline{F}_n(x) := F_n(x + \gamma_n)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $F_n \xrightarrow{\overline{\text{var}}} F$, $n \to \infty$*;*

(ii) $\gamma_n \to \gamma$, *и* $\overline{F}_n \xrightarrow{\text{var}} \overline{F}$ *при* $n \to \infty$*;*

(iii) $\gamma_n \to \gamma$, *и* $\sum\limits_{\substack{u \in \cup\langle X_n\rangle \cup \langle X\rangle,\\ u \neq 0}} |\lambda_{n,u} - \lambda_u| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Из (ii) следует (i). Действительно, $\overline{F}_n \xrightarrow{\text{var}} \overline{F}$ означает, что $F_n(\,\cdot\, + \gamma_n) \xrightarrow{\text{var}} F(\,\cdot\, + \gamma)$, $n \to \infty$, что дает $F_n(\,\cdot\, + \gamma_n - \gamma) \xrightarrow{\text{var}} F$, $n \to \infty$. Здесь по предположению имеем $\gamma_n - \gamma \to 0$, $n \to \infty$, поэтому приходим к (i).

Покажем теперь, что из (i) следует (iii). Известно, что $F_n(\,\cdot\, + a_n) \xrightarrow{\text{var}} F$ с $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Характеристические функции, соответствующие $F_n(\,\cdot\, + a_n)$, имеют представления (2) с $\gamma_n - a_n$ вместо γ_n, $n \in \mathbb{N}$. Тогда в соответствии с теоремой 1 $\sum_{u \in \cup\langle X_n\rangle \cup \langle X\rangle, u \neq 0} |\lambda_{n,u} - \lambda_u|$ стремится к нулю, и существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\gamma_n - a_n = \gamma$ для всех $n \geqslant n_0$, и, значит, $\gamma_n = \gamma + a_n \to \gamma$, $n \to \infty$.

Осталось показать, что (iii) влечет (ii). Условия на γ_n и γ в (iii) и (ii) одинаковы. Далее, характеристические функции для $\overline{F}$ и $\overline{F}_n$ имеют представления (1) и (2) без $it\gamma$ и $it\gamma_n$ соответственно. По теореме 1 последнее соотношение из (iii) дает $\overline{F}_n \xrightarrow{\text{var}} \overline{F}$ при $n \to \infty$. $\square$

Введем на основе сходимости по вариации со сдвигом аналогичные упомянутым выше понятия компактности. Последовательность $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ будем называть $\boldsymbol{D}_S$-*относительно компактной по вариации со сдвигом*, если любая ее подпоследовательность содержит свою подпоследовательность, сходящуюся по вариации со сдвигом к некой функции распределения из класса $\boldsymbol{D}_S$. Последовательность $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ будем называть $\boldsymbol{D}_S$-*стохастически компактной по вариации со сдвигом*, если любая ее подпоследовательность содержит свою подпоследовательность, сходящуюся по вариации со сдвигом к некой функции невырожденного распределения из класса $\boldsymbol{D}_S$. Сформулируем критерии для этих типов компактности.

Теорема 5. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *является* $\boldsymbol{D}_S$*-относительно компактной по вариации со сдвигом;*

(ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\gamma_n| < \infty$ *и* $(\overline{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *является* $\boldsymbol{D}_S$*-относительно компактной по вариации;*

(iii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\gamma_n| < \infty$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{u \in \langle X_n\rangle \setminus \{0\}} |\lambda_{n,u}| < \infty$, *и* $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{\substack{u_k \in \mathcal{U}\setminus\{0\},\\ k > N}} |\lambda_{n,u}| = 0$.

Доказательство. Сначала покажем, что (ii) эквивалентно (iii). Соотношения на γ_n, $n \in \mathbb{N}$, в (ii) и (iii) одинаковы. Рассмотрим функции распределения $\overline{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Характеристические функции для них имеют представления (2) без $it\gamma_n$. Поэтому по теореме 2 соотношения на $\lambda_{n,u}$ из (iii) эквивалентны $\boldsymbol{D}_S$-относительной компактности по вариации для $(\overline{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Докажем, что из (i) следует (ii). Несложно проверить, что условие $\sup_{n\in\mathbb{N}}|\gamma_n| < \infty$ эквивалентно тому, что из любой подпоследовательности из $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можно выделить свою подпоследовательность, сходящуюся к некоторому конечному пределу. Далее, выберем произвольную возрастающую последовательность $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ из натуральных чисел. В силу (i) выберем из $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ подпоследовательность $(n'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ такую, что $F_{n'_j}$ сходится по вариации со сдвигом к некоторой функции распределения $F \in \boldsymbol{D}_S$, т. е. $F_{n'_j} \xrightarrow{\overline{\mathrm{var}}} F$, $j \to \infty$. Пусть f — это характеристическая функция F с представлением (1). Пусть $\overline{F}(x) := F(x+\gamma)$, $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что $\overline{F} \in \boldsymbol{D}_S$. Тогда в соответствии с теоремой 4 имеем $\gamma_{n'_j} \to \gamma$ и $\overline{F}_{n'_j} \xrightarrow{\mathrm{var}} \overline{F}$, $j \to \infty$. Получается, что из произвольной последовательности $(\gamma_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ мы выделили сходящуюся к конечному пределу подпоследовательность, а из произвольной последовательности $(\overline{F}_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ мы выделили подпоследовательность, сходящуюся по вариации к некоторой функции распределения из $\boldsymbol{D}_S$. Это означает справедливость (ii).

Теперь покажем, что из (ii) следует (i). Рассмотрим произвольную подпоследовательность $(F_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. В соответствии с (ii) из $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ выберем подпоследовательность $(n'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ такую, что при $j \to \infty$ функции распределения $\overline{F}_{n'_j}$ сходятся по вариации к некоторой $\overline{F} \in \boldsymbol{D}_S$, а $\gamma_{n'_j}$ стремятся к некоторому $\gamma \in \mathbb{R}$. Пусть $F(x) := \overline{F}(x-\gamma)$, $x \in \mathbb{R}$, и $a_j := \gamma_{n'_j} - \gamma$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда получаем

$$F_{n'_j}(\,\cdot\, + a_j) = \overline{F}_{n'_j}(\,\cdot\, - \gamma) \xrightarrow{\mathrm{var}} \overline{F}(\,\cdot\, - \gamma) = F, \quad j \to \infty.$$

Здесь $a_j \to 0$, $j \to \infty$, поэтому $F_{n'_j} \xrightarrow{\overline{\mathrm{var}}} F$, $j \to \infty$, причем $F \in \boldsymbol{D}_S$. Итак, из произвольной подпоследовательности $(F_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ выделена подпоследовательность $(F_{n'_j})_{j\in\mathbb{N}}$, сходящаяся по вариации со сдвигом к $F \in \boldsymbol{D}_S$. Это означает выполнение (i). $\square$

Теорема 6. *$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является $\boldsymbol{D}_S$-стохастически компактной по вариации со сдвигом тогда и только тогда, когда $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boldsymbol{D}_S$-относительно компактна по вариации со сдвигом и дополнительно*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{u\in\langle X_n\rangle\setminus\{0\}} |\lambda_{n,u}| > 0. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является $\boldsymbol{D}_S$-стохастически компактной по вариации со сдвигом. Тогда по определению она $\boldsymbol{D}_S$-относительно компактна по вариации со сдвигом. Предположим, что (3) не выполнено, т. е. найдется возрастающая последовательность $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ из натуральных чисел такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{u\in\langle X_{n_j}\rangle\setminus\{0\}} |\lambda_{n_j,u}| = 0. \tag{4}$$

Выберем из $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ такую подпоследовательность $(n'_j)_{j\in\mathbb{N}}$, что $F_{n'_j}$ сходятся по вариации со сдвигом к некоторой невырожденной функции распределения $F \in \boldsymbol{D}_S$, т. е. $F_{n'_j} \xrightarrow{\mathrm{var}} F$, $j \to \infty$. Пусть f — это характеристическая функция для F с представлением (1). Характеристические функции, соответствующие $F_{n'_j}$, имеют представления (2) с $n = n'_j$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда в соответствии с теоремой 4 имеем $\gamma_{n'_j} \to \gamma$, $j \to \infty$. Это вместе с (4) по теореме 4 означает, что функции $F_{n'_j}$ сходятся к вырожденной функции распределения со скачком в точке γ. Выходит, что F вырождена. Мы пришли к противоречию.

Пусть $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\boldsymbol{D}_S$-относительно компактна по вариации со сдвигом и верно (3). Рассмотрим произвольную подпоследовательность $(F_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. В силу предполагаемой относительной компактности в ней найдется подпоследовательность $(F_{n'_j})_{j\in\mathbb{N}}$, сходящаяся по вариации со сдвигом к некоторой функции распределения $F \in \boldsymbol{D}_S$. Характеристические функции, соответствующие $F_{n'_j}$, имеют представления (2) с $n = n'_j$, $j \in \mathbb{N}$. Если F вырождена, то по теореме 4 будет верно (4) с n'_j вместо n_j, что противоречит (3). $\square$

3. Заключение. Полученные теоремы 4–6 в формулировках вполне подобны теоремам 1–3, однако условия на γ_n, $n \in \mathbb{N}$, в новых теоремах значительно слабее и кажутся вполне отвечающими большинству случаев. Заметим, что условия (ii) в теоремах 4 и 5 указывают на явное выражение для сдвига при необходимости перехода от сходимости по вариации со сдвигом к обычной сходимости по вариации.

Литература

1. Alexeev I. A., Khartov A. A. Spectral representations of characteristic functions of discrete probability laws. arXiv:2101.06038 (2021).

2. Lindner A., Pan L., Sato K. On quasi-infinitely divisible distributions. *Trans. of AMS* **370**, 8483–8520 (2018).

3. Berger D., Lindner A., A Cramér — Wold device for infinite divisibility of Z^d-valued distributions. arXiv:2011.08530 (2020).

4. Хартов А. А., Алексеев И. А. Квази-безграничная делимость и трехточечные вероятностные законы. *Записки науч. сем. ПОМИ* **495**, 305–316 (2020).

5. Lindner A., Sato K. Properties of stationary distributions of a sequence of generalized Ornstein Uhlenbeck processes. *Math. Nachr.* **284** (17–18), 2225–2248 (2011).

6. Berger D. On quasi-infinitely divisible distributions with a point mass. *Math. Nachr.* **292**, 1674–1684 (2018).

7. Khartov A. A. Compactness criteria for quasi-infinitely divisible distributions on the integers. *Stat. & Probab. Letters* **153**, 1–6 (2019).

8. Berger D., Kutlu M., Lindner A. On multivariate quasi-infinitely divisible distributions. arXiv:2101.02544 (2021).

9. Passeggeri P. Spectral representation of quasi-infinitely divisible processes. *Stoch. Process. Appl.* **130**, iss. 3, 1735–1791 (2020).

10. Nakamura T. A complete Riemann zeta distribution and the Riemann hypothesis. *Bernoulli* **21**, iss. 3, 1735–1791 (2015).

11. Chhaiba H., Demni N., Mouayn Z. Analysis of generalized negative binomial distributions attached to hyperbolic Landau levels. *J. Math. Phys.* **57**, 072103 (2016). https://doi.org/10.1063/1.4958724

12. Demni N., Mouayn Z. Analysis of generalized Poisson distributions associated with higher Landau levels. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **18** (4), 1550028 (2015).

13. Zhang H., Liu Y., Li B. Notes on discrete compound Poisson model with applications to risk theory. *Insurance Math. Econom.* **59**, 325–336 (2014).

14. Billingsley P. *Convergence of probability measures.* New York, Wiley (1999).

15. Feller W. On regular variation and local limit theorems. *Proc. V Berkeley Symp. Math. Stats. Prob.* **2**, part 1, 373–388 (1967).

16. Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной.* Москва, Наука (1974).

Статья поступила в редакцию 25 февраля 2021 г.;
после доработки 18 марта 2021 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2021 г.

К о н т а к т н а я   и н ф о р м а ц и я:

Алексеев Иван Алексеевич — студент; vanyalexeev@list.ru
Хартов Алексей Андреевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; alexeykhartov@gmail.com

On convergence and compactness in variation with shift of discrete probability laws*

I. A. Alexeev[1], *A. A. Khartov*[2]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] Smolensk State University, 4, ul. Przhevalskogo, Smolensk, 214000, Russian Federation

For citation: Alexeev I. A., Khartov A. A. On convergence and compactness in variation with shift of discrete probability laws. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 3, pp. 385–393.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.301 (In Russian)

We consider a class of discrete distribution functions, whose characteristic functions are separated from zero, i. e. their absolute values are greater than positive constant on the real line. The class is rather wide, because it contains discrete infinitely divisible distribution functions, functions of lattice distributions, whose characteristic functions have no zeroes on the real line, and also distribution functions with a jump greater than 1/2. Recently the authors showed that characteristic functions of elements of this class admit the Lévy — Khinchine type representations with non-monotonic spectral function. Thus our class is included in the set of so called quasi-infinitely divisible distribution functions. Using these representation the authors also obtained limit and compactness theorems with convergence in variation for the sequences from this class. This note is devoted to similar results concerning convergence and compactness but with weakened convergence in variation. Replacing of type of convergence notably expands applicability of the results.

Keywords: characteristic functions, Lévy — Khinchine type representations, quasi-infinitely divisible distributions, convergence in variation, relative compactness, stochastic compactness.

References

1. Alexeev I. A., Khartov A. A. Spectral representations of characteristic functions of discrete probability laws. arXiv:2101.06038 (2021).

2. Lindner A., Pan L., Sato K. On quasi-infinitely divisible distributions. *Trans. of AMS* **370**, 8483–8520 (2018).

3. Berger D., Lindner A., A Cramér — Wold device for infinite divisibility of Z^d-valued distributions. arXiv:2011.08530 (2020).

4. Khartov A. A., Alexeev I. A. Quasi-infinite divisibility and three-point probability laws. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* **495**, 305–316 (2020). (In Russian)

5. Lindner A., Sato K. Properties of stationary distributions of a sequence of generalized Ornstein Uhlenbeck processes. *Math. Nachr.* **284** (17–18), 2225–2248 (2011).

6. Berger D. On quasi-infinitely divisible distributions with a point mass. *Math. Nachr.* **292**, 1674–1684 (2018).

7. Khartov A. A. Compactness criteria for quasi-infinitely divisible distributions on the integers. *Stat. & Probab. Letters* **153**, 1–6 (2019).

8. Berger D., Kutlu M., Lindner A. On multivariate quasi-infinitely divisible distributions. arXiv:2101.02544 (2021).

*The work of A. A. Khartov was supported by the joint Russian Foundation for Basic Research and German Research Foundation (grant No. 20-51-12004).

9. Passeggeri P. Spectral representation of quasi-infinitely divisible processes. *Stoch. Process. Appl.* **130**, iss. 3, 1735–1791 (2020).

10. Nakamura T. A complete Riemann zeta distribution and the Riemann hypothesis. *Bernoulli* **21**, iss. 3, 1735–1791 (2015).

11. Chhaiba H., Demni N., Mouayn Z. Analysis of generalized negative binomial distributions attached to hyperbolic Landau levels. *J. Math. Phys.* **57**, 072103 (2016). https://doi.org/10.1063/1.4958724

12. Demni N., Mouayn Z. Analysis of generalized Poisson distributions associated with higher Landau levels. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **18** (4), 1550028 (2015).

13. Zhang H., Liu Y., Li B. Notes on discrete compound Poisson model with applications to risk theory. *Insurance Math. Econom.* **59**, 325–336 (2014).

14. Billingsley P. *Convergence of probability measures.* New York, Wiley (1999).

15. Feller W. On regular variation and local limit theorems. *Proc. V Berkeley Symp. Math. Stats. Prob.* **2**, part 1, 373–388 (1967).

16. Natanson I. P. *Theory of Functions of a Real Variable.* Moscow, Nauka Publ. (1974). (In Russian)

Received: February 25, 2021
Revised: March 18, 2021
Accepted: March 19, 2021

Authors' information:

Ivan A. Alexeev — vanyalexeev@list.ru
Alexey A. Khartov — alexeykhartov@gmail.com