Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 3
УДК 519.213 + 517.3
MSC 60E15, 60D05; 26B15

Влияние симметризации распределений на их остроконечность

М. И. Ревяков

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Российская Федерация, 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27

Для цитирования: *Ревяков М. И.* Влияние симметризации распределений на их остроконечность // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 3. С. 442–454. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.306

Предлагаются косвенные преобразования одномерной, двумерной и многомерной случайных величин посредством разного рода симметризаций функции плотности. Основное внимание уделяется изменению при этом остроконечности соответствующей случайной величины относительно начала.

Ключевые слова: остроконечность распределений, перестановка функций, непрерывная симметризация, мажоризация, лог-вогнутость, статистические выводы.

1. Введение. Мы рассматриваем некоторые виды симметризации случайных величин (с. в.)[1]. Исследуется их влияние на остроконечность с. в. относительно начала, под которым мы понимаем начало координат. В основном (за исключением раздела 5) симметризация осуществляется за счет надлежащего преобразования функции плотности распределения.

В разделе 2 нас интересует симметризация по Штейнеру одномерной случайной величины. Здесь дополнительно показано, что она уменьшает абсолютные центральные моменты распределения.

В разделе 3 для двумерного случая вводится одна разновидность известной радиальной симметризации Сегё [1]. Для того чтобы показать ее влияние на остроконечность, предварительно пришлось осуществить переход (теорема 2) от центрально симметричных выпуклых множеств в $\Re^n$ к симметричным отрезкам прямых, проходящих через начало. По существу, это означает редукцию размерности до 1.

Раздел 4 посвящен процессам непрерывной симметризации плотности (по аналогии с Приложением B3 в [2]). В п. 4.1 показано, что непрерывная радиальная симметризация монотонно увеличивает остроконечность. В п. 4.2 выявлено, что симметризация $f_\lambda(\mathbf{x}) = ((1+\lambda)g(\mathbf{x}) + (1-\lambda)g(-\mathbf{x}))/2,\ \lambda \in [0,1]$, где g — произвольная плотность n-мерного с. в., не изменяет остроконечность. Для этого понадобилась теорема 3, устанавливающая необходимое и достаточное условие для равенства остроконечности двух с. в.

Раздел 5 касается повышения достоверности статистического вывода при сравнении параметра масштаба у двух распределений с увеличением объема выборки, состоящей из независимых наблюдений над соответствующими с. в. Заключение базируется на работе [3], связанной с остроконечностью, с учетом того факта, что

[1]Это же сокращение используется в разделах 3 и 4 для случайных векторов.

разность двух независимых одинаково распределенных случайных величин является симметричной с. в.

2. Симметризация по Штейнеру. ***2.1. Перестановка плотности в симметрично убывающем порядке.*** Пусть одномерная случайная величина X имеет плотность $f(x)$, непрерывную на всей оси. Тогда кривая $y = f(x)$ вместе с осью x ограничивает некоторое открытое множество D. Будем его симметризовать по Штейнеру (см. [2, § 1.8] и [4, § 4.5]) относительно оси y. Итак, пусть $M = \max f(x)$. При всяком ζ, $0 < \zeta < M$, прямая $y = \zeta$ пересекает D по некоторому множеству непересекающихся открытых промежутков с суммой длин $\ell(\zeta)$, где $0 < \ell(\zeta) < \infty$.

Симметризованным множеством называется множество

$$D^* = \left\{(x, y) : \ |x| < \frac{1}{2}\ell(y)\right\}.$$

Известно, что D^* — открытое множество. В нашем случае оно ограничено осью x и некоторой кривой. Поскольку $\ell(y)$ строго возрастает с уменьшением y, то эта кривая является однозначной функцией от x, причем непрерывной, четной и унимодальной. Обозначим ее $f^*(x)$. В силу того, что штейнерова симметризация сохраняет площадь, $f^*(x)$ есть плотность некоторой с. в. X^*.

Такого рода преобразование функций известно как перестановка функций в симметрично убывающем порядке [5, § 10.12]. Ее связь с симметризацией по Штейнеру отмечена, например, в [6] без привлечения вероятностных аспектов.

Определение 1. С. в. X^* с плотностью $f^*(x)$, полученной перестановкой непрерывной плотности $f(x)$ в симметрично убывающем порядке, будем называть *симметризованной* (по Штейнеру) по отношению к с. в. X.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что для с. в. $Z = dX + e$ имеем $Z^* = dX^*$, принимая во внимание одинаковую распределенность X^* и $-X^*$.

В дальнейшем нам понадобится следующее известное неравенство.

Неотрицательная измеримая функция h обнуляется в бесконечности, если все ее множества положительного уровня имеют конечную меру Лебега:

$$\mathcal{L}\{x | h(x) > t\} < \infty \qquad \text{для всех } t > 0.$$

Неравенство Харди — Литтлвуда. Пусть f и g — неотрицательные измеримые функции, которые обнуляются в бесконечности. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \le \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g^*(x)dx,$$

где f^* и g^* — соответственно перестановки функций f и g в симметрично убывающем порядке.

2.2. Остроконечность. По определению З. В. Бирнбаума (см. [7]) одномерная с. в. U_1 *более остроконечна* относительно a, чем с. в. U_2 относительно b, если

$$\mathbf{P}\{|U_1 - a| \le t\} \ge \mathbf{P}\{|U_2 - b| \le t\} \qquad \text{для всех } \ t \ge 0.$$

Предложение. *Случайная величина X^*, симметризованная по отношению к случайной величине X, более остроконечна относительно нуля, чем X относительно любого b.*

Это утверждение непосредственно следует из неравенства Харди — Литтлвуда, если положить (с учетом замечания 1) функцию $g(x)$ равной единице в интервале $[-t, t]$ и равной нулю в остальной части оси x. □

2.3. Моменты.

Теорема 1. *Если с. в. X с непрерывной плотностью $f(x)$ имеет первый момент, то его имеет и симметризованная с. в. X^*. Если, кроме того, X имеет абсолютный центральный момент s-го порядка, $s > 0$, то его имеет и X^*, причем этот момент у X^* не больше, чем у X.*

Доказательство. Сдвинем $f(x)$ так, чтобы математическое ожидание с. в. X оказалось равным нулю. Это не повлияет на центральные моменты X и не изменит $f^*(x)$. Тогда нужно установить, что для любого положительного s выполняется

$$I_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x|^s f(x) dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^s f^*(x) dx \equiv I_2,$$

если интеграл I_1 существует. Имеем для любого $c > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (c^s - |x|^s)^+ (f^*(x) - f(x)) dx = \int_{-c}^{c} (c^s - |x|^s)(f^*(x) - f(x)) dx.$$

Поскольку $|x|^s$ возрастает по $|x|$, то функция $g(x) = (c^s - |x|^s)^+$ обнуляется в бесконечности и $g^*(x) = g(x)$. Тогда согласно неравенству Харди — Литтлвуда получим, что левая часть равенства неотрицательна. Такова же и правая часть, и остается доказать, что

$$c^s \int_{-c}^{c} (f^*(x) - f(x)) dx \to 0 \quad \text{при } c \to \infty,$$

если I_1 существует, то есть надо доказать, что к нулю стремится выражение

$$c^s \int_{-\infty}^{\infty} (f^*(x) - f(x)) dx - c^s \int_{|x|>c} f^*(x) dx + c^s \int_{|x|>c} f(x) dx \equiv I - II + III.$$

Имеем $I = 0$; $III < \int_{|x|>c} |x|^s f(x) dx \to 0$, так как I_1 существует, а $|x|^s$ возрастает по $|x|$. Наконец, по предложению получаем $II \ (\leq III) \to 0$. □

3. Радиальная симметризация. В [1] Г. Сегё ввел следующий вид радиальной симметризации.

Пусть C — кривая на плоскости, которая ограничивает компактное множество, звездообразное относительно внутренней точки $\mathbf{0}$. Представим C в полярных координатах: $r = r(\varphi)$, где r — расстояние от $\mathbf{0}$. Пусть m обозначает целое число, $m \geq 2$. Симметризация, примененная к C и $\mathbf{0}$, заменяет C кривой C^* с полярным уравнением

$$r = \rho(\varphi) = \{r(\varphi) r(\varphi + 2\pi/m) \cdots r(\varphi + (m-1)2\pi/m)\}^{1/m},$$

то есть $\rho(\varphi)$ — среднее геометрическое радиусов на m равноотстоящих лучах.

В [1], в частности, показано, что при симметризации Сегё площадь фигуры, заключенной внутри кривой C, уменьшается (не увеличивается). Это установлено путем сравнения с радиальной симметризацией следующего вида, сохраняющей площадь фигуры:

$$r = \rho(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{\nu=0}^{m-1}\left[r\Big(\varphi + \frac{2\pi\nu}{m}\Big)\right]^2}.$$

В дальнейшем нам понадобится именно эта симметризация. Дело в том, что сохранение площади фигур в одноуровневых параллельных сечениях обеспечивает по принципу Кавальери сохранение объема рассекаемого тела. Если это тело заключено между плоскостью декартовых координат и функцией плотности двумерного случайного вектора, то отсюда вытекает, что такая симметризация порождает плотность нового двумерного с. в.

Нас будет интересовать случай $m = 2$, то есть случай, когда звездообразная кривая $r = r(\varphi)$ заменяется звездообразной кривой $r = \rho(\varphi)$, где

$$\rho(\varphi) = \rho(\varphi + \pi) = \sqrt{(r^2(\varphi) + r^2(\varphi + \pi))/2}, \qquad \varphi \in [0, \pi). \tag{1}$$

Мы хотим показать, что симметризация, осуществленная на основании (1), увеличивает остроконечность относительно начала. Но прежде обсудим распространение ряда положений с одномерного случая на многомерный.

Согласно определению С. Шермана (см. [8]), n-мерный случайный вектор Y *более остроконечен*, чем с. в. X (относительно начала), $X \prec_{peak} Y$, если они оба имеют плотности и если выполняется неравенство

$$P\{Y \in A\} \geq P\{X \in A\}$$

для всех $A \in \mathbb{S}_n$, класс компактных, выпуклых, симметричных (относительно начала) множеств в n-мерном пространстве.

Введем в $\Re^n,\ n \geq 2$, декартовы координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и полярные координаты $r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, где

$$x_1 = r\cos(\varphi_1),\ x_2 = r\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2),\ x_3 = r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_3), \ldots,$$

$$x_{n-1} = r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-2})\cos(\varphi_{n-1}),$$

$$x_n = r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-2})\sin(\varphi_{n-1}).$$

Имеем $r \geq 0$ и все $\varphi_i,\ i \leq n-2$, пробегают интервал $[0, \pi]$, а φ_{n-1} пробегает интервал $[0, 2\pi)$.

Пусть L — произвольная прямая в $\Re^n$, проходящая через $\mathbf{0}$. Обозначим через L_R ее отрезок с центром в точке $\mathbf{0}$ и длиной $2R$. Примем прямую L за ось Z с 0 в точке $\mathbf{0}$. Введем на оси Z естественную параметризацию: $z = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \|\, \mathbf{x} \,\|$ «справа» от нуля и $z = -\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = -\,\|\, \mathbf{x} \,\|$ «слева» от нуля. Возьмем X и Y — случайные векторы в $\Re^n$ с непрерывными плотностями h_1 и h_2 соответственно. Положим $h_j(z) = h_j(x_1, \ldots, x_n),\ j = 1, 2$, на оси Z.

Теорема 2. *Для того чтобы случайный вектор Y был более остроконечен, чем случайный вектор X,* *(i) достаточно, чтобы для любого L_R*

$$\int_{L_R} |z|^{n-1} h_2(z)dz \geq \int_{L_R} |z|^{n-1} h_1(z)dz,$$

(ii) необходимо, чтобы для любого L_R

$$\int_{L_R} h_2(z)dz \geq \int_{L_R} h_1(z)dz.$$

Доказательство.

(i) Пусть A — произвольное компактное, выпуклое и симметричное (относительно $\mathbf{0}$) множество в $\Re^n$ и (Δ) — множество в пространстве $r\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$, связанное с A вышеуказанными соотношениями между декартовыми и полярными координатами. Имеем для $j = 1, 2$ соотношение

$$\begin{aligned}
\int_A h_j(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n = \\
&= \int_{(\Delta)} h_j(x_1(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \dots, x_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}))\times \\
&\qquad \times |J(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})| dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} = \\
&= \int_{(\Delta)} h_j(r\cos(\varphi_1), \dots, r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-1}))\times \\
&\qquad \times r^{n-1}\sin(\varphi_1)^{n-2}\sin(\varphi_2)^{n-1}\cdots\sin(\varphi_{n-2}) dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Заметим, что перебор всех сочетаний $\varphi_i,\ i = 1, \dots, n-2$, по одному в интервалах $[0, \pi]$ и φ_{n-1} в интервале $[0, 2\pi)$ дает всевозможные лучи в $\Re^n$, исходящие из $\mathbf{0}$. А если φ_{n-1} в интервале $[0, \pi)$ брать только вместе с $\varphi_{n-1} + \pi$, то образуются всевозможные прямые L, проходящие через $\mathbf{0}$.

Теперь введем функции

$$f_j(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = h_j(r\cos(\varphi_1), \dots, r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-1})),\ j = 1, 2,$$

и положим $P_1(A) = \mathbf{P}\{X \in A\}$ и $P_2(A) = \mathbf{P}\{Y \in A\}$. Пусть $R = R(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ — уравнение границы множества A. Тогда, учитывая, что в силу симметричности A оказывается верным $R(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}) = R(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1} + \pi)$, можем записать

$$\begin{aligned}
P_j(A) &= \int_A h_j(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n = \\
&= \underbrace{\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}}_{n-2} \Big[\prod_{i=1}^{n-2} \sin(\varphi_i)^{n-1-i} \int_0^{\pi - 0} \int_0^{R(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} r^{n-1} (f_j(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}) + \\
&\qquad + f_j(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1} + \pi)) dr d\varphi_{n-1} \Big] d\varphi_{n-2} \dots d\varphi_1.
\end{aligned}$$

Сопоставляя подынтегральные выражения здесь и в (2), легко приходим к справедливости утверждения (i).

(ii) Предположим, что для некоторого отрезка L_R оказалось, напротив, справедливо неравенство

$$\int_{L_R} h_2(z)dz < \int_{L_R} h_1(z)dz.$$

Тогда в силу непрерывности h_1 и h_2 найдется ϵ-окрестность отрезка L_R (обозначим ее $L_R(\epsilon)$) такая, что

$$\int_{L_R(\epsilon)} h_2(x_1 \dots x_n)dx_1, \dots, dx_n < \int_{L_R(\epsilon)} h_1(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n.$$

Поскольку множество $A \equiv L_R(\epsilon) \subset \Re^n$, очевидно, является выпуклым и симметричным, то Y не может быть более остроконечен, чем X. Это противоречие доказывает (ii) и теорему. □

Теперь вернемся к радиальной симметризации на секущих плоскостях, базирующейся на (1). Рассмотрим двумерный с. в. X с непрерывной плотностью h. Допустим, что для любого ℓ, $0 < \ell < \max\limits_{(x_1,x_2)\in\Re^2} h(x_1, x_2) = M$, линия уровня $R_\ell = \{(x_1, x_2)|\ h(x_1, x_2) = \ell\}$ представляет собой звездообразную кривую, то есть ограничивает звездообразную фигуру (в частности, это условие выполняется, когда h является непрерывной логарифмически вогнутой функцией). Обозначим последнюю через S_ℓ и будем предполагать, что точка $\mathbf{0}$ является модой функции h, и тем самым $\mathbf{0}$ оказывается внутри всех ее линий уровня.

Пусть для каждого ℓ (звездообразное) множество S_ℓ^* — результат симметризации фигуры S_ℓ. Обозначим через $h^*(x_1, x_2)$ функцию, для которой линиями уровня являются границы соответствующих фигур S_ℓ^* (ср. Приложение A2 в [2]). Как отмечено в начале этого параграфа, h^* оказывается плотностью распределения некоторого случайного вектора.

Наша цель — установить, что новый с. в. более остроконечен, чем исходный. Для этого воспользуемся утверждением (i) теоремы 2 и покажем, что для любого отрезка L_R в плоскости выполняется

$$\int_{L_R} |z|h(z)dz \le \int_{L_R} |z|h^*(z)dz.$$

Имеем

$$\int_{-R}^{R} |z|h(z)dz = -\int_{-R}^{0} zh(z)dz + \int_{0}^{R} zh(z)dz.$$

Сделаем замены: $z = -\sqrt{-2t}$ в первом интеграле правой части равенства, $z = \sqrt{2t}$ во втором интеграле той же части равенства. Тогда получим

$$\int_{-R}^{R} |z|h(z)dz = \int_{-R^2/2}^{0} h(-\sqrt{-2t})dt + \int_{0}^{R^2/2} h(\sqrt{2}t)dt.$$

Для произвольного фиксированного ℓ, $0 < \ell < M$, обозначим через z_1 и z_2, $z_1 < 0 < z_2$, точки пересечения линии уровня R_ℓ плотности h с осью Z, то есть $h(z_1) = h(z_2) = \ell$. Отсюда, согласно (1), будем иметь

$$h^*\left(-\sqrt{\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}}\right) = h^*\left(\sqrt{\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}}\right) = \ell.$$

Введем функцию

$$g(t) = \begin{cases} h(-\sqrt{-2t}) \ , & t \leq 0 \\ h(\sqrt{2}t) \ , & t \geq 0 \end{cases}$$

и обозначим $t_1 = -z_1^2/2$ и $t_2 = z_2^2/2$. Тогда получим

$$g(t_1) = h(-\sqrt{-2t_1}) = h(\sqrt{2}t_2) = g(t_2) = \ell.$$

Поступая аналогично с h^*, приходим к функции

$$g^*(t) = \begin{cases} h^*(-\sqrt{-2t}) \ , & t \leq 0 \\ h^*(\sqrt{2}t) \ , & t \geq 0, \end{cases}$$

для которой

$$g^*\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) = h^*(-\sqrt{-t_1 + t_2}) = h^*(\sqrt{-t_1 + t_2}) = g^*\left(\frac{-t_1 + t_2}{2}\right) = \ell.$$

Это означает, что функция $g^*(t)$ является перестановкой $g(t)$ в симметрично убывающем порядке. Рассуждая далее, как в п. 2.2, приходим к требуемому результату:

$$\int_{-R}^{R} |z| h(z) dz = \int_{-R^2/2}^{R^2/2} g(t) dt \leq \int_{-R^2/2}^{R^2/2} g^*(t) dt = \int_{-R}^{R} |z| h^*(z) dz.$$

4. Непрерывная симметризация. ***4.1. Непрерывная радиальная симметризация.*** Будем осуществлять преобразование, введенное в § 3, постепенно, за счет включения параметра $\lambda \in [0, 1]$. Точнее, вместо (1) рассмотрим соотношения

$$\rho_\lambda(\varphi; \ell) = \sqrt{((1+\lambda) r^2(\varphi; \ell) + (1-\lambda) r^2(\varphi + \pi; \ell))/2},$$
$$\rho_\lambda(\varphi + \pi; \ell) = \sqrt{((1-\lambda) r^2(\varphi; \ell) + (1+\lambda) r^2(\varphi + \pi; \ell))/2}, \qquad \varphi \in [0, \pi),$$

полагая значение λ одним и тем же для всех φ и ℓ. Обозначим такое преобразование через T_λ (ср. Приложение B3 в [2]). Поскольку $\rho_\lambda^2(\varphi; \ell) + \rho_\lambda^2(\varphi + \pi; \ell) = \rho^2(\varphi; \ell) + \rho^2(\varphi + \pi; \ell)$, то площадь в каждом сечении на уровне ℓ, $0 < \ell < M$, сохраняется.

По аналогии с § 3, пусть (звездообразное) множество S_ℓ^λ — результат T_λ-преобразования фигуры S_ℓ. Остается показать, что при $\ell_1 < \ell_2$ линия уровня $R_{\ell_2}^\lambda$ лежит строго внутри линии уровня $R_{\ell_1}^\lambda$. Действительно, в силу того, что $r(\varphi; \ell_1) > r(\varphi; \ell_2)$ и $r(\varphi + \pi; \ell_1) > r(\varphi + \pi; \ell_2)$, имеем $\rho_\lambda(\varphi; \ell_1) > \rho_\lambda(\varphi; \ell_2)$ и $\rho_\lambda(\varphi + \pi; \ell_1) > \rho_\lambda(\varphi + \pi; \ell_2)$. Следовательно, линии уровня R_ℓ^λ предопределяют (однозначную) функцию $h_\lambda(x_1, x_2)$, которая является плотностью некоторого с. в. X_λ. Тем самым, формируется спектр плотностей: от исходной (при $\lambda = 1$) до симметричной (при $\lambda = 0$).

Покажем, что при $\lambda_1 < \lambda_2$ выполняется

$$\int_{L_R} |z| h_{\lambda_2}(z) dz \leq \int_{L_R} |z| h_{\lambda_1}(z) dz. \tag{3}$$

Для этого нужно снова, как в конце § 3, изменить параметризацию с z на t. Тогда окажется, что при фиксированных φ и ℓ убыванию λ от 1 до 0 соответствует перемещение отрезка длиной $-t_1 + t_2$ в направлении к 0, вплоть до совмещения центра отрезка с точкой 0.

Нетрудно усмотреть, что в процессе этого перемещения мера пересечения данного отрезка с вертикальной полосой, заключенной между прямыми $t = -R^2/2$ и $t = R^2/2$, не уменьшается. Тогда из аналога принципа Кавальери следует (3). Согласно утверждению (i) теоремы 2 это означает, что $X_{\lambda_1} \prec_{peak} X_{\lambda_2}$.

4.2. Непрерывная симметризация в $\Re^n$. Вид приведенной ниже непрерывной симметризации подсказан работой [9, § 1.2], в которой фигурируют симметричные плотности $f(\mathbf{x}) = (g(\mathbf{x}) + g(-\mathbf{x}))/2$, где $g(\mathbf{x})$ — произвольная плотность n-мерного с. в., $n \geq 1$. Предварительно остановимся на некоторых обстоятельствах общего характера. Введем

Определение 2. Будем говорить, что n-мерные случайные векторы X и Y *одинаково остроконечны*, $X \overset{peak}{=} Y$, если $X \prec_{peak} Y$ и $Y \prec_{peak} X$, то есть если

$$\mathbf{P}\{X \in A\} = \mathbf{P}\{Y \in A\}$$

для всех $A \in \mathbb{S}_n$.

Нам понадобится следующее утверждение, легко доказываемое за счет редукции, закрепленной в теореме 2.

Теорема 3. *Для того чтобы X и Y с непрерывными плотностями $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ были одинаково остроконечны, необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\omega(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})$$

обладала свойством

$$\omega(\mathbf{x}) = -\omega(-\mathbf{x}), \tag{4}$$

то есть была нечетной.

Доказательство. *Необходимость.* Согласно утверждению (ii) теоремы 2, достаточно проверить, что из условия

$$\int_{L_R} f(z)dz = \int_{L_R} g(z)dz$$

следует (4). Фиксируем произвольное $\mathbf{x}$ и возьмем прямую L, проходящую через $\mathbf{0}$ и $\mathbf{x}$, и $R_0 = ||\mathbf{x}||$. Имеем для любого $R \geq 0$

$$\int_0^R (f(z) + f(-z))dz = \int_0^R (g(z) + g(-z))dz.$$

Рассмотрим обе части равенства как функции переменной R и возьмем производные. Поскольку f и g непрерывны, то получим $f(R) + f(-R) = g(R) + g(-R)$. Отсюда $\omega(R_0) = -\omega(-R_0)$, то есть $\omega(\mathbf{x}) = -\omega(-\mathbf{x})$.

Достаточность. Следует непосредственно из предложения 1.12 в [9, § 1.4]. □

Из теоремы 3 и предложения 1.12 в [9, § 1.4] легко вытекает

Следствие 1. *Если для случайных векторов X и Y с непрерывными плотностями оказывается*

$$\mathbf{P}\{X \in A\} = \mathbf{P}\{Y \in A\}$$

для всех компактных, выпуклых и симметричных множеств $A \in \Re^n$, то равенство справедливо для всех симметричных множеств $A \in \Re^n$.

Рассмотрим теперь любую непрерывную плотность $g(\mathbf{x})$ в n-мерном пространстве и построим спектр плотностей

$$f_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{(1+\lambda)g(\mathbf{x}) + (1-\lambda)g(-\mathbf{x})}{2} \tag{5}$$

для $\lambda \in [0,1]$. При этом $f_1(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ — исходная плотность, а $f_0(\mathbf{x}) = (g(\mathbf{x}) + g(-\mathbf{x}))/2$ — плотность симметричного с. в. Теперь возьмем разность

$$\omega_\lambda(\mathbf{x}) = f_\lambda(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x}) = \frac{\lambda}{2}(g(\mathbf{x}) - g(-\mathbf{x})).$$

Следовательно $\omega_\lambda(\mathbf{x})$ — нечетная функция. По теореме 3 это означает, что случайные векторы с плотностями (5) обладают одинаковой остроконечностью (относительно начала). В таком случае будем «ранжировать» $f_\lambda(\mathbf{x})$ по их отклонению от симметричной плотности $f_0(\mathbf{x})$. При этом отклонение будем характеризовать разностью вероятностей попадания с. в. в полупространства, разделенные гиперплоскостями, содержащими точку $\mathbf{0}$. Точнее, будем считать, что $f_{\lambda_1}(\mathbf{x})$ более симметрична, чем $f_{\lambda_2}(\mathbf{x})$, если для каждого вышеупомянутого разбиения n-мерного пространства на полупространства G_1 и G_2 оказывается верным

$$I_{\lambda_1} \equiv \Big|\int\limits_{G_1} f_{\lambda_1}(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int\limits_{G_2} f_{\lambda_1}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big| \le \Big|\int\limits_{G_1} f_{\lambda_2}(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int\limits_{G_2} f_{\lambda_2}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big| \equiv I_{\lambda_2}.$$

Имеем

$$I_\lambda = \Big|\int\limits_{G_1} (f_\lambda(\mathbf{x}) - f_\lambda(-\mathbf{x}))d\mathbf{x}\Big| = \lambda \Big|\int\limits_{G_1} (g(\mathbf{x}) - g(-\mathbf{x}))d\mathbf{x}\Big|$$

и, значит, I_λ возрастает по λ.

5. Статистическая симметризация. До сих пор мы занимались косвенной симметризацией случайных величин (или векторов) посредством преобразований их плотностей. В этом разделе мы будем оперировать самими наблюдениями над одномерными случайными величинами и воспользуемся тем, что разность двух независимых одинаково распределенных случайных величин является симметричной случайной величиной.

Мы будем интересоваться положительными с. в. с наблюдениями X_i из R^+. Это позволит, в частности, привлечь ситуации из сферы надежности, что проиллюстрировано примером. Наши рассуждения во многом повторяют рассуждения в п. 2.1 работы [10], но здесь мы уделяем внимание семейству плотностей с параметром масштаба вместо семейства плотностей с параметром сдвига. Такому переходу способствуют соображения в [11, § 8.2.2].

Замечание 2. Надо учесть, что в [11, § 8.2.2] рассуждения проводятся для семейств симметричных плотностей, но в случае с параметром масштаба они сохраняются и для случайных величин с наблюдениями X_i из R^+. Следует лишь потребовать, чтобы плотность f была убывающей функцией на $[0, \infty)$. Дело в том, что это свойство, важное в данном контексте, присуще любой симметричной лог-вогнутой плотности. Пусть $f_\theta(x) = (1/\theta)h(x/\theta)$ — семейство плотностей распределения X_i с параметром масштаба θ, где h убывает и лог-вогнута. Обозначим $Z_i = \ln X_i$ и $\eta = \ln\theta$. Тогда $\tilde{h}(z-\eta) = h(\exp(z-\eta))\exp(z-\eta)$ — семейство лог-вогнутых плотностей для Z_i и таково же семейство $\tilde h_N(z-\eta)$ для средневыборочного $\overline{Z}_N = \sum_{i=1}^N Z_i/\mathrm{N}$. Тем самым оно обладает монотонным отношением правдоподобия [11, § 8.2.1]. Для инвариантных статистических процедур это означает (см. [12]), что при сравнении значений θ ошибка вывода оказывается меньше, если делается «естественный» вывод, то есть когда повторяется знак неравенства между соответствующими средневыборочными значениями.

Наша цель — показать, что с увеличением объема выборки ошибка такого вывода монотонно убывает. Последующие рассуждения опираются на работу [3], в связи с чем мы обсудим некоторые аспекты мажоризации [13].

Говорят, что вектор $b = (b_1, \dots, b_N)$ *мажорируется* вектором $a = (a_1, \dots, a_N)$, $a \succ b$, если $\sum_{i=1}^N a_i = \sum_{i=1}^N b_i$ и $\sum_{i=1}^k a_{[i]} \ge \sum_{i=1}^k b_{[i]}$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, где $a_{[1]} \ge \dots \ge a_{[N]}$, $b_{[1]} \ge \dots \ge b_{[N]}$ — упорядоченные по убыванию (невозрастанию) компоненты векторов a и b соответственно.

Введем формальные обозначения:

$$P_1 = \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^N p_i' \ln X_i^{(1)} < \sum_{i=1}^N p_i' \ln X_i^{(2)}\right], \quad P_2 = \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^N p_i \ln X_i^{(1)} < \sum_{i=1}^N p_i \ln X_i^{(2)}\right].$$

Теорема 4. *Пусть $X_1^{(j)}, \dots, X_N^{(j)}$, $j = 1, 2$, — две независимые выборки, составленные из независимых наблюдений над положительными с. в. с плотностями $(1/\theta_j)h(x/\theta_j)$, где h — убывающая лог-вогнутая плотность. Предположим, что $\theta_1 < \theta_2$ и $p \succ p'$, $p_i, p_i' \ge 0$, $i = 1, \dots, N$, $\sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N p_i' = 1$. Тогда $P_1 \ge P_2$.*

Доказательство. Обозначим

$$F_1(t) = \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^N p_i' \overset{o}{Z}_i \le t\right], \quad F_2(t) = \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^N p_i \overset{o}{Z}_i \le t\right],$$

$$f_1(t) = F_1'(t), \quad f_2(t) = F_2'(t),$$

где $\overset{o}{Z}_1, \dots, \overset{o}{Z}_N$ — независимые с. в. с одинаковой лог-вогнутой плотностью $\tilde h(z) = h(\exp z)\exp z$. Пусть $\eta_1 = \ln\theta_1$, $\eta_2 = \ln\theta_2$. Тогда для $k = 1, 2$ получаем

$$P_k = \int_{-\infty}^{\infty} F_k(t-\eta_1)\, f_k(t-\eta_2)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} F_k(\vartheta + t)\, f_k(t)\, dt = \mathbf{P}\left[\chi_{1k} - \chi_{2k} \le \vartheta\right],$$

где $\vartheta = \eta_2 - \eta_1 > 0$, $\chi_{j1} = \sum_{i=1}^N p_i' \overset{o}{Z}{}_i^{(j)}$ и $\chi_{j2} = \sum_{i=1}^N p_i \overset{o}{Z}{}_i^{(j)}$, $j = 1, 2$, причем $\overset{o}{Z}{}_i^{(1)}$, $\overset{o}{Z}{}_i^{(2)}$ имеют ту же плотность, что и $\overset{o}{Z}_i$. Отсюда получаем $\chi_{11} - \chi_{21} = \sum_{i=1}^N p_i' \left(\overset{o}{Z}{}_i^{(1)} - \overset{o}{Z}{}_i^{(2)}\right)$ и $\chi_{12} - \chi_{22} = \sum_{i=1}^N p_i \left(\overset{o}{Z}{}_i^{(1)} - \overset{o}{Z}{}_i^{(2)}\right)$.

Полагаем $Y_i = \overset{o}{Z}{}_i^{(1)} - \overset{o}{Z}{}_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, N$. Согласно [13, § 18.B.1] плотность Y_i лог-вогнута; она симметрична как плотность разности независимых одинаково распределенных случайных величин. Поскольку, в свою очередь, Y_i — независимые одинаково распределенные с. в., а $\vartheta > 0$, то теорема 2.3 в [3] означает, что $\mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^N p_i' Y_i \le \vartheta\right] \ge \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^N p_i Y_i \le \vartheta\right]$, т. е. $P_1 \ge P_2$. □

Следствие 2. *Пусть* $X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \ldots,\ j = 1, 2,$ *— независимые положительные случайные величины с убывающими лог-вогнутыми плотностями* $(1/\theta_j)h(x/\theta_j)$, *причем* $\theta_1 < \theta_2$. *Тогда* $\mathbf{P}\left[\prod_1^N X_i^{(1)} < \prod_1^N X_i^{(2)}\right]$ *не убывает по* N.

Доказательство. Имеем $p = (1/N, \ldots, 1/N, 0) \succ (1/(N+1), \ldots, 1/(N+1)) = p'$, где каждый вектор состоит из $N + 1$ компонент. Теперь требуемый результат легко вытекает из теоремы 4 ввиду того, что $Z_i = \ln X_i$. □

Пример. Имеется два изделия таких, что плотность случайного времени их безотказной работы принадлежит семейству плотностей Гомперца:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\exp(x/\theta + 1 - e^{x/\theta}), \qquad x > 0.$$

При этом масштабные параметры θ_1 и θ_2 соответственно первого и второго изделий неизвестны.

Требуется на основании статистических данных по надежности изделий сделать вывод относительно того, у какого из них математическое ожидание времени до отказа больше.

Решение. Убедившись, что $f_\theta(x)$ — убывающая лог-вогнутая плотность, следует взять независимые выборки моментов отказа $\{X_i\}_1^N$, $\{Y_i\}_1^N$ одинакового объема первого и второго изделий. По ним составляются статистики $\prod_1^N X_i$ и $\prod_1^N Y_i$. Если $\prod_1^N X_i > \prod_1^N Y_i$, делается вывод о том, что у первого изделия среднее время безотказной работы больше, а если $\prod_1^N X_i < \prod_1^N Y_i$, делается обратный вывод.

По замечанию 2 ошибка такого «естественного» вывода меньше ошибки при альтернативном выводе. Здесь учтено, что математическое ожидание положительной случайной величины, если оно существует, пропорционально масштабному параметру. В нашем случае существование всех моментов обеспечивается лог-вогнутостью плотности $f_\theta(x)$ [14].

По следствию 2 эта ошибка монотонно убывает с ростом N. Рассуждая, как в п. 2.1 работы [10], легко заключить, что ошибка стремится к 0 при $N \to \infty$.

Замечание 3. Следует признать, что распределения, используемые в теории надежности, довольно редко удовлетворяют условиям теоремы 4 (прежде всего это относится к монотонности h). Однако из доказательства теоремы нетрудно усмотреть, что на самом деле эти условия нужны лишь для того, чтобы плотность с. в. $Z = \ln X$ оказалась лог-вогнутой. Это эквивалентно требованию лог-вогнутости для функции $h(\exp(z))$, что расширяет область применения теоремы 4 (и следствия 2). Примером такой функции h могут служить плотности Г-распределения, распределения Вейбулла, степенного (Парето II) распределения и, конечно, лог-нормального распределения.

Автор выражает свою искреннюю признательность рецензентам за их полезные замечания и советы.

Литература

1. Szego G. On a certain kind of symmetrization and its applications. *Ann. Mat. Pura Appl.* **40**, 113–119 (1955).

2. Polya G., Szego G. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Princeton, Princeton University Press (1951).

3. Proschan F. Peakedness of distributions of convex combinations. *Ann. Math. Statist.* **36**, 1703–1706 (1965).

4. Hayman W. K. *Multivalent Functions.* Cambridge, Cambridge University Press (1958).

5. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities.* 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press (1952).

6. Lieb E. H., Loss M. *Analysis.* 2nd ed. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society (2001).

7. Birnbaum Z. W. On random variables with comparable peakedness. *Ann. Math. Statist.* **19**, 76–81 (1948).

8. Sherman S. A theorem on convex sets with applications. *Ann. Math. Statist.* **26**, 763–767 (1955).

9. Azzalini A., Capitanio A. *The Skew-normal and Related Families.* Cambridge, Cambridge University Press (2014).

10. Ревяков М. Ранжирование и селекция популяций по выборочным средним. *Зап. научн. сем. ПОМИ* **454**, 238–253 (2016).

11. Lehmann E. L., Romano J. P. *Testing Statistical Hypotheses.* 3rd ed. New York, Springer (2005).

12. Eaton M. L. Some optimum properties of ranking procedures. *Ann. Math. Statist.* **38**, 124–137 (1967).

13. Marshall A., Olkin I., Arnold B. *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications.* 2nd ed. New York, Springer (2011).

14. An M. Y. Logconcavity versus logconvexity: a complete characterization. *J. Economic Theory* **80**, 350–369 (1998).

Статья поступила в редакцию 7 ноября 2020 г.;
после доработки 12 января 2021 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2021 г.

Контактная информация:

Ревяков Михаил Ильич — канд. физ.-мат наук, ст. науч. сотр.; revyakov.m@gmail.com

The effect of distributions symmetrization on their peakedness

M. I. Revyakov

St. Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute,
27, nab. r. Fontanki, St. Petersburg, 191023, Russian Federation

For citation: Revyakov M. I. The effect of distributions symmetrization on their peakedness. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 3, pp. 442–454. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.306 (In Russian)

Indirect transformations of a one-dimensional, two-dimensional, and multidimensional random variable are proposed. They are based on various symmetrizations of the density function. The focus is on changing peakedness of a distribution about the origin.

Keywords: peakedness, function rearrangement, continuous symmetrization, log-concave density, majorization, statistical inference.

References

1. Szego G. On a certain kind of symmetrization and its applications. *Ann. Mat. Pura Appl.* **40**, 113–119 (1955).

2. Polya G., Szego G. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics.* Princeton, Princeton University Press (1951).

3. Proschan F. Peakedness of distributions of convex combinations. *Ann. Math. Statist.* **36**, 1703–1706 (1965).

4. Hayman W. K. *Multivalent Functions.* Cambridge, Cambridge University Press (1958).

5. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities*. 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press (1952).
6. Lieb E. H., Loss M. *Analysis*. 2nd ed. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society (2001).
7. Birnbaum Z. W. On random variables with comparable peakedness. *Ann. Math. Statist.* **19**, 76–81 (1948).
8. Sherman S. A theorem on convex sets with applications. *Ann. Math. Statist.* **26**, 763–767 (1955).
9. Azzalini A., Capitanio A. *The Skew-normal and Related Families*. Cambridge, Cambridge University Press (2014).
10. Revyakov M. Ranking and selection of populations on the base of sample means. *Zap. Nauchn. Sem. POMI* **454**, 238–253 (2016). (In Russian) [Engl. transl.: *J. Math. Sci.* **229**, 756–766 (2018). https://doi.org/10.1007/s10958-018-3715-2].
11. Lehmann E. L., Romano J. P. *Testing Statistical Hypotheses*. 3rd ed. New York, Springer (2005).
12. Eaton M. L. Some optimum properties of ranking procedures. *Ann. Math. Statist.* **38**, 124–137 (1967).
13. Marshall A., Olkin I., Arnold B. *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*. 2nd ed. New York, Springer (2011).
14. An M. Y. Logconcavity versus logconvexity: a complete characterization. *J. Economic Theory* **80**, 350–369 (1998).

Received: November 7, 2020
Revised: January 12, 2021
Accepted: March 19, 2021

Author's information:

Mikhail I. Revyakov — revyakov.m@gmail.com