

## МЕХАНИКА

УДК 517.93:531.391.3

MSC 70J25, 70K40

**Области притяжения маятника  
под действием косо́й вибрации точки подвеса\****А. Г. Петров*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,  
Российская Федерация, 119526, Москва, пр. Вернадского, 101

**Для цитирования:** *Петров А. Г.* Области притяжения маятника под действием косо́й вибрации точки подвеса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 3. С. 511–522.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.312>

Ставится обратная задача о стабилизации сферического маятника в заданном положении с помощью высокочастотной вибрации точки подвеса. Положение маятника определяется углом между стержнем маятника и вертикалью. Для любого заданного положения маятника найдена однопараметрическая серия характеристик косо́й вибрации (амплитуда скорости вибрации и угол между вектором скорости вибрации и вертикалью), стабилизирующих маятник в этом положении. Для полученных серий определены области притяжения — начальные точки, из которых под действием вибрации установится заданное устойчивое положение маятника.

*Ключевые слова:* сферический маятник, устойчивость, вибрация точки подвеса, обратная задача, область притяжения.

**1. Введение.** Первое исследование возможности стабилизации одинарного математического маятника в верхней точке за счет вертикальных высокочастотных вибраций точки подвеса было приведено Стефенсоном [1].

Более подробно колебания маятника с различными видами вибраций изучались Боголюбовым, Капицей и вслед за ними другими авторами [2–4].

Одной из проблем, стимулировавшей немало публикаций, была сформулированная в 1999 г. Р. Брокеттом проблема стабилизации линейной стационарной системы

\*Работа выполнена в рамках госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2021

с помощью линейной нестационарной обратной связи [5]. Решение этой проблемы в ряде важных для практики случаев дано в работах Г. А. Леонова [6–8], Л. Моро (L. Moreau) и Д. Аэлса (D. Aeyels) [9–11], где с помощью стабилизирующих матриц и функций из определенных классов построены соответственно алгоритмы низкочастотной и высокочастотной стабилизаций линейных систем.

В [12] определяется не только уровень вибраций опоры, обеспечивающий устойчивость вертикального положения маятника, но и область его притяжения, то есть область начальных положений маятника из которых маятник переходит в устойчивое вертикальное положение.

В работе [13] рассматривалась обратная задача стабилизации сферического маятника в заданном положении с помощью высокочастотной косої вибрации точки подвеса, вектор скорости которой направлен под одним и тем же углом  $\psi$  к вектору ускорения силы тяжести. Положение маятника определяется углом  $\theta_e$  между стержнем маятника и вектором ускорения силы тяжести. Методом осреднения задача равновесия и устойчивости свелась к исследованию минимума эффективной потенциальной энергии. Для заданной точки минимума  $\theta_e$ , определяющей устойчивое положение маятника, найдены уравнения для серии характеристик косої вибрации, стабилизирующей маятник в этом положении. Из полученной серии для каждого угла  $\theta_e$  выделены характеристики вибрации (безразмерная амплитуда  $C(\theta_e)$  и угол  $\psi(\theta_e)$  с минимальной безразмерной амплитудой  $C = C_{\min}$ ).

Для такой вибрации определена нижняя граница области притяжения  $\theta_{\min}$  такая, что для каждого начального положения  $\theta_0 > \theta_{\min}$  маятник под ее действием перейдет через некоторое время в заданное устойчивое положение  $\theta_e$ . При  $\theta_e \in (0, \pi/4)$  нижняя граница области притяжения  $\theta_{\min}$  равна нулю, то есть областью притяжения являются все начальные положения маятника.

При возрастании  $\theta_e$  на отрезке  $(\pi/4, \pi/2)$  нижняя граница  $\theta_{\min}$  монотонно растет от нуля до  $\pi/2$ , а длина интервала  $\theta_e - \theta_{\min}$  монотонно убывает от  $\pi/4$  до нуля. При  $\theta_e \in (\pi/2, \pi)$  длина интервала притяжения  $\theta_e - \theta_{\min}$  равна нулю и точка  $\theta_e$  находится на границе области устойчивости. Она становится устойчивой при любом малом увеличении амплитуды вибрации.

Данная работа является продолжением исследований статьи [13], в которой рассматриваются вопросы о том, как при заданном значении  $\theta_e$  зависят границы области притяжения от амплитуды вибрации и какой может быть максимальная длина области притяжения.

**2. Постановка задачи.** Рассматривается сферический маятник: материальная точка массы  $m$ , качающаяся на невесомом нерастяжимом стержне длины  $l$ . Точка подвеса стержня с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  движется по заданному периодическому закону с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$  вдоль единичного вектора  $\mathbf{e}(\sin \psi, 0, \cos \psi)$ , лежащего в плоскости  $x_1, x_3$  под углом  $\psi$  к вертикальной оси  $x_3$ . На противоположном конце стержня с радиус-вектором  $\mathbf{r} + \mathbf{R}$  находится материальная точка, к которой приложены сила тяжести  $m\mathbf{g}$ , сила натяжения стержня. В точке закрепления учитывается диссипативный момент.

При малых параметрах  $\delta = a/l$  и  $\varepsilon = \omega/\omega_0$  под действием этих сил материальная точка будет двигаться по некоторой, вообще говоря, а-периодической траектории до тех пор, пока не установится периодическое движение в некоторой малой окрестности вектора  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_e(\sin \theta_e, 0, \cos \theta_e)$ . С учетом демпфирующего момента с коэффициентом  $\alpha$  уравнения плоского движения маятника и начальные условия в

переменных  $(\theta, P_\theta)$ , где  $\theta$  — координата,  $P_\theta$  — импульс, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\theta}, & \frac{dP_\theta}{d\tau} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} - \alpha P_\theta, \\ \tilde{H} &= \varepsilon \left( \frac{P_\theta^2}{2} - \frac{\delta}{\varepsilon} b'_1 P_\theta \cos \tau + \Phi - \frac{1}{4} C^2 \cos 2(\theta - \psi) \cos 2\tau \right), \\ \Phi &= -\frac{1}{4} C^2 \cos(2\theta - 2\theta_e) - \cos \theta, & b'_1 &= \sin(\psi - \theta_e), \\ & \theta(0) = \theta_0, & P_\theta(0) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Равенство нулю импульса  $P_\theta$  означает равенство нулю кинетического момента:  $\mathbf{R} \times (\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}}) = 0$ . Показано, что уравнения переходного процесса приближаются уравнением второго порядка для угла  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + \varepsilon^2 \frac{d\Phi}{d\theta} &= 0, \\ \Phi &= -\frac{1}{4} C^2 \cos 2(\theta - \psi) - \cos \theta, & C^2 &= \frac{\delta^2}{2\varepsilon^2} = \frac{(a\omega)^2}{2gl} \end{aligned} \quad (2)$$

с начальными условиями

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0. \quad (3)$$

В [13] показано, что точка устойчивого равновесия маятника  $\theta_e$  является точкой минимума функции  $\Phi$ . Она находится из условий экстремума

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right|_{\theta_e} = \frac{1}{2} C^2 \sin 2(\theta_e - \psi) + \sin \theta_e = 0, \quad (4)$$

а условие устойчивости вытекает из условия минимума в точке  $\theta_e$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_e} = C^2 \cos 2(\psi - \theta_e) + \cos \theta_e > 0. \quad (5)$$

Перейдем к анализу уравнений устойчивого положения равновесия (4), (5).

**3. Общее решение обратной задачи в параметрической форме.** Покажем, что уравнение равновесия (4) можно заменить на уравнение на комплексной плоскости

$$C e^{i\psi} = \frac{\beta e^{i\theta_e} - 1}{\sqrt{\beta - \cos \theta_e}}, \quad (6)$$

где  $\beta$  — вспомогательный параметр.

Действительно, уравнение (6) можно записать в следующем виде:

$$C e^{i(\psi - \theta_e)} = \frac{\beta - e^{-i\theta_e}}{\sqrt{\beta - \cos \theta_e}}.$$

После возведения его в квадрат получим уравнение

$$C^2 e^{2i(\psi - \theta_e)} = \frac{\beta^2 - 2\beta e^{-i\theta_e} + e^{2i\theta_e}}{\beta - \cos \theta_e}.$$

Отсюда следуют два уравнения для действительной и мнимой частей:

$$\begin{aligned} C^2 \cos(2(\psi - \theta_e)) &= \frac{(\beta - \cos \theta_e)^2 - \sin^2 \theta_e}{\beta - \cos \theta_e}, \\ C^2 \sin(2(\psi - \theta_e)) &= \frac{2\beta \sin \theta_e - \sin 2\theta_e}{\beta - \cos \theta_e} = 2 \sin \theta_e. \end{aligned} \quad (7)$$

Как видно, второе уравнение совпадает с исходным уравнением равновесия (4), первое — устанавливает связь параметра  $\beta$  с характеристиками вибрации  $C$  и  $\psi$ .

Уравнение (6) удобнее уравнения равновесия (4), так как из него при заданном угле  $\theta_e$  получаем зависимости характеристик вибрации  $C$  и  $\psi$  от параметра  $\beta$ :

$$B = \frac{\beta e^{i\theta_e} - 1}{\sqrt{\beta - \cos \theta_e}}, \quad C = |B|, \quad \psi = \arg(B). \quad (8)$$

Здесь  $B$  — комплексное число, а  $C$  и  $\psi$  — его модуль и аргумент соответственно. При заданном значении  $\theta_e$  формулы (8) определяют однопараметрическое семейство характеристик вибрации  $C(\theta_e, \beta)$  и  $\psi(\theta_e, \beta)$ . Для них из формулы (8) следуют простые зависимости:

$$C^2 = \frac{(\beta - \cos \theta_e)^2 + \sin^2 \theta_e}{\beta - \cos \theta_e} = \beta - \cos \theta_e + \frac{\sin^2 \theta_e}{\beta - \cos \theta_e}, \quad \operatorname{tg}(\psi - \theta_e) = \frac{\sin \theta_e}{\beta - \cos \theta_e}. \quad (9)$$

С помощью первого уравнения (7) условие устойчивости (5) выражается через параметр  $\beta$ :

$$(\beta - \cos \theta_e) - \frac{\sin^2 \theta_e}{\beta - \cos \theta_e} + \cos \theta_e > 0. \quad (10)$$

Отсюда получим ограничение на параметр  $\beta$  для устойчивой однопараметрической серии равновесий маятника (9):

$$\beta > \beta_{\min} = \frac{1}{2} \left( \cos \theta_e + \sqrt{\cos^2 \theta_e + 4 \sin^2 \theta_e} \right). \quad (11)$$

Сформулируем окончательный результат.

**Утверждение.** Для того чтобы маятник, помещенный в точку  $\mathbf{R}_e$  под углом  $\theta_e$  к вертикали, оставался там в состоянии устойчивого равновесия, точка подвеса должна совершать колебания с вектором скорости  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \omega \mathbf{e} \cos \omega t = C\sqrt{2g/l} \mathbf{e} \cos \omega t$ .

Угол наклона единичного вектора  $\mathbf{e}$  к вертикали  $\psi$  и амплитуда  $C$  косоугольной вибрации, стабилизирующие положение маятника в точке  $\theta_e$ , образуют однопараметрическое семейство  $C(\beta, \theta_e)$ ,  $\psi(\beta, \theta_e)$ , определяемое формулами (8) с параметром  $\beta$ , изменяющимся в интервале  $(\beta_{\min}, \infty)$ .

В [13] найдены характеристики вибрации с минимальной амплитудой  $C_{\min}$ . Зависимости  $C_{\min}$  от  $\theta_e$  и соответствующие ей зависимости  $\beta_0(\theta_e)$  и  $\psi_0(\theta_e)$  легко находятся из формул (9):

$$\begin{aligned} \theta_e \in (0, \pi/2) : \quad & \beta_0 = \cos \theta_e + \sin \theta_e, \quad C_{\min}^2 = 2 \sin \theta_e, \quad \psi_0 = \theta_e + \pi/4, \\ \theta_e \in (\pi/2, \pi) : \quad & \beta_0 = \beta_{\min}, \quad C_{\min}^2 = \sqrt{\cos^2 \theta_e + 4 \sin^2 \theta_e}, \quad \psi_0 - \theta_e = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} \theta_e). \end{aligned} \quad (12)$$

По формулам (9) находятся также  $C_0$  и  $\psi_0$  при минимальном значении параметра  $\beta = \beta_{\min}$ :

$$C_0^2 = \sqrt{\cos^2 \theta_e + 4 \sin^2 \theta_e}, \quad \psi_0 - \theta_e = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \theta_e}{\beta - \cos \theta_e} \right). \quad (13)$$

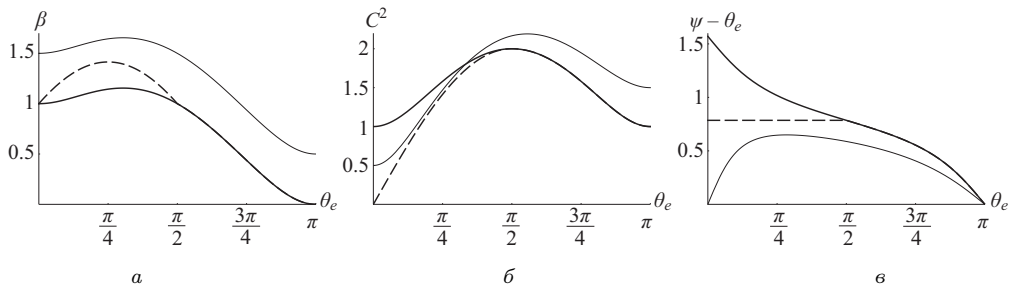


Рис. 1. Зависимость от заданного положения  $\theta_e$  характеристик вибрации с минимальным значением параметра  $\beta$  (жирная линия); с увеличенным на величину 0.5 значением параметра  $\beta$  (тонкая линия); с минимальной амплитудой (штриховая линия): а — параметр  $\beta$ , б — квадрат амплитуды вибрации  $C^2$ , в — угол  $\psi - \theta_e$ .

Характеристики вибрации  $\beta$ ,  $C^2$  и  $\psi - \theta_e$  с минимальным значением параметра  $\beta = \beta_{\min}$  в зависимости от  $\theta_e$  изображены жирной линией на рис. 1. В этом случае положение маятника неустойчиво, но становится устойчивым при любом малом увеличении параметра  $\beta = \beta_{\min}$ .

Для вибрации с минимальной амплитудой при  $\theta \in (0, \pi/2)$  выполнено условие устойчивости  $\beta_0 > \beta_{\min}$ . Характеристики такой вибрации изображены на рис. 1 штриховой линией. При  $\theta_e \in (\pi/2, \pi)$  характеристики вибрации с минимальной амплитудой и с минимальным значением параметра  $\beta$  совпадают.

Характеристики вибрации с увеличенным значением параметра  $\beta = \beta_{\min} + 0.5$  изображены тонкой линией.

Интересно, что при  $\theta \in (0, \pi/2)$  характеристики вибрации с минимальной амплитудой (штриховая линия) не совпадают с характеристиками вибрации с минимальным значением параметра  $\beta$  (жирная линия).

**4. Неограниченная область притяжения при  $\theta_e \in (0, \pi/4)$ .** Поставим задачу определения начальных условий, из которых маятник под действием вибрации с минимальной амплитудой перейдет в заданное устойчивое положение  $\theta_e$ . Область таких начальных значений назовем областью притяжения. Область притяжения зависит от свойств функции  $\Phi(\theta)$  (2) и ее производной:

$$\Phi(\theta) = -\frac{1}{4}C^2 \cos 2(\theta - \psi) - \cos \theta, \quad \Phi'(\theta) = \frac{1}{2}C^2 \sin 2(\theta - \psi) + \sin \theta, \quad (14)$$

где характеристики вибрации  $C$  и  $\psi$  удовлетворяют уравнению равновесия (6) и условиям устойчивости (11) или (10).

Частный случай вертикальных вибраций изучен в [12].

В данном исследовании под областью притяжения понимается область начальных точек  $\theta(0)$  уравнения (2), для которых траектория заканчивается в заданной устойчивой точке равновесия  $\theta_e$ . Эта область, вообще говоря, зависит еще и от другого начального значения  $\dot{\theta}(0)$ . Ограничимся случаем  $\dot{\theta}(0) = 0$ , что эквивалентно равенству нулю начального кинетического момента. Если же диссипативный коэффициент  $\alpha$  достаточно большой, то зависимость области притяжения от  $\dot{\theta}(0)$  не существенна.

Поставим задачу: найти такую косую вибрацию, которая переведет маятник из любого начального положения  $\theta(0) = \theta_0 \geq 0$  в заданное положение  $\theta_e$ . Такую область притяжения будем называть неограниченной. В [13] показано, что при

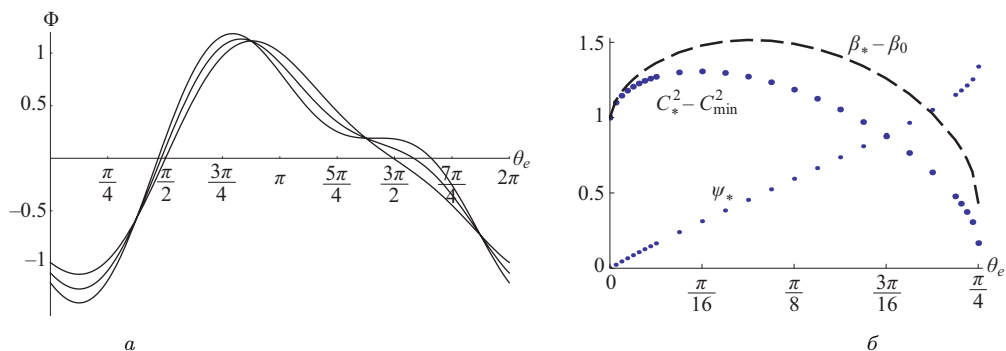


Рис. 2. Функция  $\Phi(\theta)$  при различных амплитудах (а); критические функции  $\beta_*$ , амплитуды  $C_*$  и угла  $\psi_*$  (б).

$\theta_e \in (0, \pi/4)$  для косой вибрации с амплитудой  $C(\theta_e, \beta)$  и углом  $\psi(\theta_e, \beta)$  с параметром  $\beta = \beta_0 = \cos \theta_e + \sin \theta_e$ , соответствующим минимальной амплитуде, область притяжения не ограничена. Функция  $\Phi(\theta)$  в этом случае имеет один минимум. При увеличении параметра  $\beta$  область притяжения остается неограниченной до тех пор, пока не появится вторая точка минимума у функции  $\Phi(\theta)$ . Это критическое значение  $\beta_*$ , зависящее от  $\theta_e$ , удовлетворяет двум уравнениям:

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = 0, \quad \frac{d^2\Phi}{d\theta^2} = 0. \quad (15)$$

Пояснение этой системы уравнений представлено на рис. 2, а. На ней изображены функции  $\Phi(\theta)$ , имеющие период  $2\pi$ , при  $\theta_e = \pi/16$  и трех значениях параметра  $\beta$ :

$$\beta_i = \cos \theta_e + \sin \theta_e + 0.5i, \quad i = 1, 2, 3.$$

При  $i = 1$  функция  $\Phi(\theta)$  имеет на периоде только одну точку минимума  $\theta = \theta_e$  и одну точку максимума  $\theta_{\max}$ . Начальная точка  $\theta(0) < \theta_{\max}$  притянется к точке минимума  $\theta_e$  по ближайшей траектории, а при  $\theta(0) > \theta_{\max}$  движется по окружности в противоположном направлении и все равно притянется к единственной точке минимума.

При  $i = 3$  у функции  $\Phi(\theta)$  на периоде имеется вторая точка минимума. Точка  $\theta(0) < \theta_{\max}$  притянется к точке минимума  $\theta_e$ , а при  $\theta(0) > \theta_{\max}$  притянется ко второй точке минимума. В этом случае точка максимума разделяет две области притяжения. Значение  $\beta = \beta_2$  разделяет характеристики вибрации на два случая. При  $\beta < \beta_2$  вибрации имеют неограниченную область притяжения, а при  $\beta > \beta_2$  область притяжения ограничена.

Таким образом, существует критическое значение  $\beta_*$ , зависящее от  $\theta_e$ , которое отделяет вибрации  $\beta < \beta_*$  с неограниченной областью притяжения от вибраций, у которых область притяжения ограничена. Для критического случая, как видно из рис. 2, а, функция  $\Phi(\theta)$  в критической точке  $\theta_*$  удовлетворяет двум уравнениям (15). Из этой системы для каждого заданного значения  $\theta_e$  определяются две граничные характеристики:  $\theta_*(\theta_e)$  и  $\beta_*(\theta_e)$ . По формулам (9) находятся граничные значения амплитуды  $C_*(\theta_e)$  и угла  $\psi_*(\theta_e)$ . Значения  $\beta_*(\theta_e) - \beta_0$ ,  $C_*(\theta_e)^2 - C_{\min}^2$ ,  $\psi_*(\theta_e)$  при различных  $\theta_e$  на основе численного решения уравнений (15) приведены на рис. 2, б.

Например, для  $\theta_e = \pi/8$  получаем следующие граничные значения:

$$\begin{aligned} \beta_* - \beta_0 = 1.49, \quad C_*^2 - C_{\min}^2 = 1.186, \quad \psi_* = 0.594, \\ \beta_0 = \cos \theta_e + \sin \theta_e = 1.306, \quad C_{\min}^2 = 2 \sin \theta_e = 0.76537. \end{aligned} \quad (16)$$

Сформулируем окончательный результат.

**Утверждение.** Вибрация с амплитудой  $2 \sin \theta_e < C^2(\theta_e, \beta) < C_*^2(\theta_e)$  и углом  $\psi_*(\theta_e) < \psi(\theta_e, \beta) < \theta_e + \pi/4$  с параметром  $\beta \in (\beta_0, \beta_*)$  переводит маятник из любого начального положения в заданное устойчивое положение  $\theta_e \in (0, \pi/4)$ . Граничная функция  $\beta_*(\theta_e)$  находится из системы уравнений (15), а предельные значения  $C_*(\theta_e) = C(\theta_e, \beta_*)$  и  $\psi_*(\theta_e) = \psi(\theta_e, \beta_*)$  определяются подстановкой  $\beta = \beta_*(\theta_e)$  в соотношении (9).

**5. Неограниченная область притяжения при  $\theta_e \in (0, \pi/2)$ .** Вторым результатом о вибрации с неограниченной областью притяжения при  $\theta_e \in (0, \pi/2)$  формулируется таким образом.

**Утверждение.** Неограниченную область притяжения при  $\theta_e \in (0, \pi/2)$  обеспечивает косяк вибрации для  $\beta = \frac{1}{\cos \theta_e}$  со следующими характеристиками:

$$C^2 = \frac{1}{\cos \theta_e}, \quad \psi = \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Для вибрации (17) проверяем выполнение условий равновесия (6). Числитель правой части имеет вид  $\beta e^{i\theta_e} - 1 = i \sin \theta_e / \cos \theta_e$ , знаменатель правой части —  $\sqrt{\beta - \cos \theta_e} = \sin \theta_e / \sqrt{\cos \theta_e}$ . Вся правая часть  $i/\sqrt{\cos \theta_e}$  оказалась в точности равной левой части  $C e^{i\psi}$ . Проверка закончилась.

2. Проверяем условие устойчивости (10):

$$(\beta_* - \cos \theta_e) - \frac{\sin^2 \theta_e}{\beta_* - \cos \theta_e} + \cos \theta_e = \frac{1}{\cos \theta_e} - \cos \theta_e = \frac{\sin^2 \theta_e}{\cos \theta_e} > 0.$$

Это условие выполнено при  $\theta_e \in (0, \pi/2)$ .

Для вибрации с неограниченной областью притяжения на материальную точку маятника действует сила  $-\Phi' = -d\Phi/d\theta$ . При вибрации с характеристиками (17) функция (4) принимает вид

$$\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{1}{2} C^2 \sin 2(\theta - \psi) + \sin \theta = \sin \theta \frac{\cos \theta_e - \cos \theta}{\cos \theta_e} \quad (18)$$

и для  $\theta_e < \pi/2$  обладает следующим свойством: при  $\theta < \theta_e$  сила  $-d\Phi/d\theta$  положительна и при  $\theta > \theta_e$  сила  $-d\Phi/d\theta$  отрицательна, то есть всегда направлена к точке  $\theta_e$  минимума функции  $\Phi(\theta)$ . Это означает, что область притяжения не ограничена, что и требовалось показать.

Функция  $\Phi'(\theta)$  обращается в ноль только в трех точках:  $\theta = 0$ ,  $\theta = \theta_e$  и  $\theta = \pi$ . Графики функций (18) при  $\theta_e = i\pi/16$ ,  $i = 1, 2, \dots, 7$ , изображены на рис. 3.

На этом рассмотрение специальных вибраций с неограниченной областью притяжения закончено. Перейдем к исследованию границ области притяжения.

**6. Границы области притяжения.** Для начала найдем зависимость от амплитуды  $C$  границы  $\theta_1$  области притяжения  $(0, \theta_1)$  к точке устойчивого равновесия

в нижнем  $\theta_e = 0$  и верхнем  $\theta_e = \pi$  положениях маятника. В этом случае имеем  $\psi = 0$  или  $\psi = \pi$ , и функция  $\Phi$  и ее производная (14) имеют вид

$$\Phi(\theta) = -\frac{1}{4}C^2 \cos 2\theta - \cos \theta, \quad \Phi'(\theta) = \frac{1}{2}C^2 \sin 2\theta + \sin \theta = \sin \theta (C^2 \cos \theta + 1).$$

Точка  $\theta_e = 0$  является точкой минимума функции  $\Phi$  при любых значения  $C^2$ , а точка  $\theta_e = \pi$  является точкой минимума функции  $\Phi$  при  $C^2 > 1$ . Точки максимума  $\theta_1(C^2)$  этой функции в зависимости от квадрата амплитуды находятся из уравнения  $\Phi'(\theta) = 0$ :

$$\theta_1(C^2) = \begin{cases} \pi, & 0 < C^2 \leq 1, \\ \pi - \arccos(1/C^2), & C^2 > 1. \end{cases}$$

На рис. 4,а приведены функции  $\Phi(\theta)$  при  $C^2 = 1/2, 1, 3/2, 2$ . Области притяжения находятся между точками минимума и максимума функции  $\Phi(\theta)$ .

Отсюда находим область притяжения  $(0, \theta_1(C^2))$  к точке устойчивого равновесия в нижнем положении маятника  $\theta_e = 0$  при любых значениях  $C^2$ . Оставшаяся область  $(\theta_1(C^2), \pi)$  является областью притяжения к верхнему положению маятника  $\theta_e = \pi$  при  $C^2 > 1$ . Обе области изображены на рис. 4. Из графиков легко определяются интервалы притяжения для любого значения  $C^2$ . Например, при  $C^2 < 1$  все точки  $\theta$  интервала  $(0, \pi)$  притягиваются к нижнему положению маятника, при  $C^2 = 2$  к нижнему положению маятника притягиваются точки  $\theta$  из интервала  $(0, 2\pi/3)$ , а точки  $\theta$  из оставшейся области  $(\theta_1(C^2), \pi)$  притягиваются к верхнему положению маятника  $\theta_e = \pi$ .

Рассмотрим границы области притяжения для  $\theta_e = \pi/8$ . При изменении параметра  $\beta$  в интервале  $(\beta_0 = \cos \theta_e + \sin \theta_e, \infty)$  квадрат амплитуды  $C^2$  монотонно растет от значения  $C_{\min}^2 = 2 \sin \theta_e$  до бесконечности. На интервале  $(\beta_0 = 1.3, \beta_* \approx 2.8)$  функция  $\Phi(\theta)$  имеет только один минимум в точке  $\theta = \theta_e$ . Квадрат амплитуды  $C^2$  и угол  $\psi$  соответствующие этому интервалу параметра  $\beta$  меняются в следующих интервалах  $C^2 \in (0.765, 1.95)$  и  $\psi \in (0.594, 3\pi/8)$ .

Критическому значению амплитуды  $C_*$  соответствует изображенный на рисунке отрезок прямой, параллельный оси абсцисс. При амплитуде меньше критической, т. е. при  $C < C_*$ , область притяжения не ограничена. Если амплитуда вибрации превышает критическое значение  $C_*$ , то у функции  $\Phi(\theta)$  появляется вторая точка минимума. В этом случае, т. е. при  $C > C_*$ , будут две области притяжения, в первой области точки  $0 < \theta < \theta_1$  притянутся к первой точке минимума  $\theta_e$ , а во второй области точки  $\theta_1 < \theta < \pi$  притянутся ко второй точке минимума. Зависимость  $\theta_1$  от  $\theta_e$  будет верхней границей области притяжения к точке минимума  $\theta_e$ . Верхняя граница является точкой максимума функции  $\Phi(\theta)$  и может быть представлена

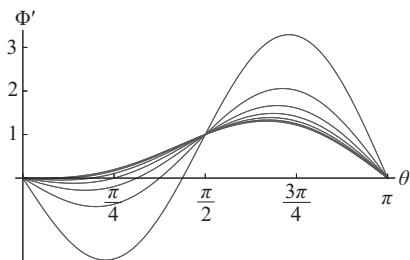


Рис. 3. Зависимости производной  $\Phi'(\theta)$  при различных значениях угла  $\theta_e = i\pi/16$ ,  $i = 1, 2, \dots, 7$ , с неограниченной областью притяжения.



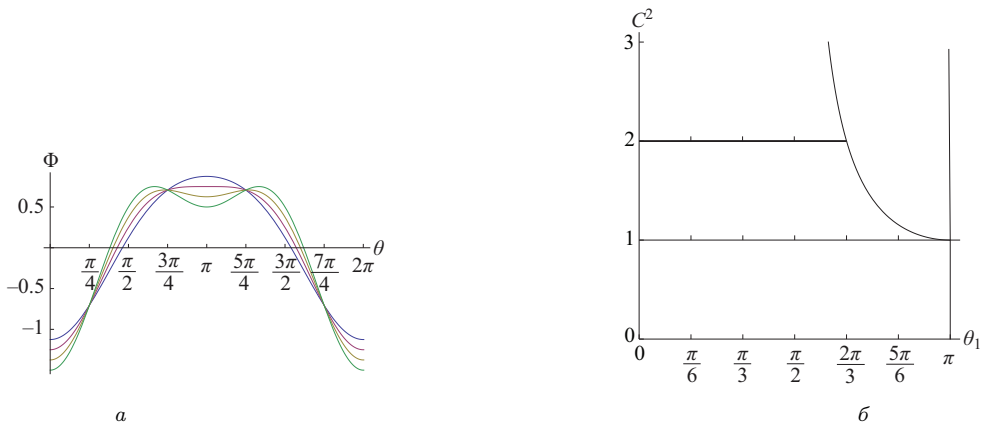


Рис. 4. Области притяжения при вертикальной вибрации: а — функция  $\Phi(\theta)$  при различных амплитудах; б — граница областей притяжения к точкам  $\theta_e = 0$  и  $\theta_e = \pi$ .

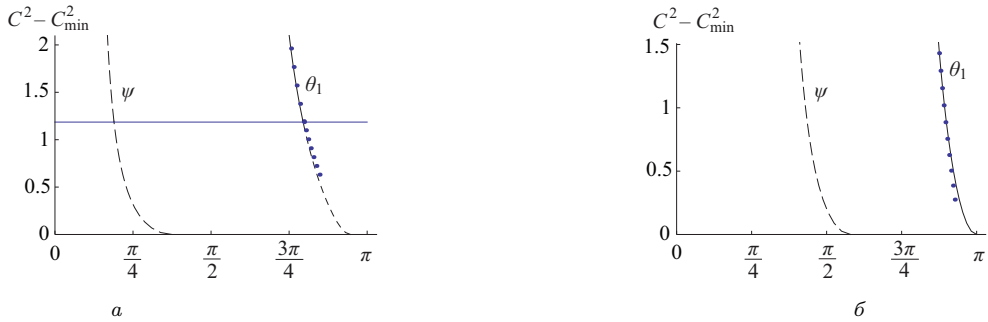


Рис. 5. Области притяжения при  $\theta_e = \pi/8$  (а) и  $\theta_e = \pi/4$  (б).

асимптотическим разложением

$$\theta_1 = \theta_e + \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{\beta} + \frac{b_1}{\beta^2} + \frac{b_2}{\beta^3} + \frac{b_3}{\beta^4} + O(1/\beta^5),$$

$$b_0 = \cos \theta_e + \sin \theta_e, \quad b_1 = \cos 2\theta_e, \quad b_2 = \frac{1}{4} \cos \theta_e + \frac{11}{12} \cos 3\theta_e - \frac{2}{3} \sin 3\theta_e, \quad (19)$$

$$b_3 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_e - \frac{1}{4} \sin 2\theta_e + \frac{5}{8} \cos 4\theta_e - \frac{11}{8} \sin 4\theta_e.$$

На рис. 5, а изображена зависимость  $\theta_1$  от амплитуды при  $\theta_e = \pi/8$ : сплошной линией, если амплитуда больше критической, и штриховой линией, если амплитуда меньше критической амплитуды. Точками обозначено асимптотическое разложение (19) зависимости  $\theta_1$ .

Область притяжения для  $\theta_e = \pi/4$  изображена на рис. 5, б. Она при любых амплитудах имеет верхнюю границу  $\theta_1$ , представленную сплошной линией. Отрезок области притяжения убывает с ростом амплитуды от значения  $\pi$  при минимальной амплитуде и стремится к значению  $3\pi/4$  при бесконечном увеличении амплитуды.

При каждом значении  $\theta_e$  угол вибрации  $\psi$  зависит от амплитуды и изображен на рис. 5 штриховыми линиями.

Для значений  $\theta_e > \pi/4$  появляется нижняя граница области притяжения  $\theta_0(C)$ , а верхняя граница исчезает. Нижние границы областей притяжения при

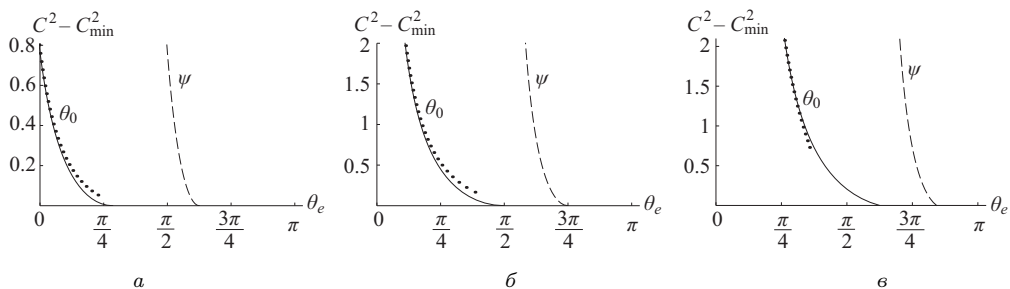


Рис. 6. Области притяжения при  $\theta_e = 3\pi/8$  (а),  $\theta_e = \pi/2$  (б) и  $\theta_e = 5\pi/8$  (в).

$\theta_e = 3\pi/8$ ,  $\pi/2$  и  $\theta_e = 5\pi/8$  изображены сплошными линиями на рис. 6, а, б и в соответственно, при  $\theta_e = 3\pi/4$ ,  $7\pi/8$  — на рис. 7, а и б соответственно. Нижнюю границу  $\theta_0$  можно представить асимптотическим разложением, аналогичным разложению для верхней границы (19):

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \theta_e - \frac{\pi}{2} + \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \frac{a_2}{\beta^3} + \frac{a_3}{\beta^4} + O(1/\beta^5), \\ a_0 &= -\cos \theta_e + \sin \theta_e, \quad a_1 = -\cos 2\theta_e, \quad a_2 = -\frac{1}{4} \cos \theta_e - \frac{11}{12} \cos 3\theta_e - \frac{2}{3} \sin 3\theta_e, \\ a_3 &= -\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\theta_e - \frac{1}{4} \sin 2\theta_e - \frac{5}{8} \cos 4\theta_e - \frac{11}{8} \sin 4\theta_e. \end{aligned} \tag{20}$$

На рисунках асимптотические разложения представлены точками. Как видно, точность разложений быстро растет при увеличении амплитуды.

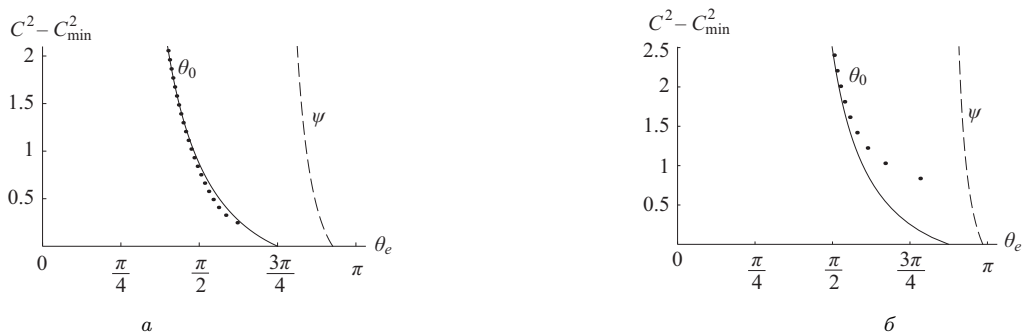


Рис. 7. Области притяжения при  $\theta_e = 3\pi/4$  (а) и  $\theta_e = 7\pi/8$  (б).

**7. Заключение.** Найдены формулы (9), определяющие характеристики кривой вибрации: амплитуду  $C(\beta, \theta_e)$  и угол  $\psi(\beta, \theta_e)$ , стабилизирующие маятник в заданном положении маятника  $\theta_e$ . Полученные характеристики вибрации образуют однопараметрическое семейство, параметр  $\beta$  которого меняется от минимального значения  $\beta_{\min}$  (11) до бесконечности. Амплитуда вибрации при росте параметра  $\beta$  меняется не монотонно. На отрезке  $(\beta_{\min}, \beta_0)$  амплитуда убывает до своего минимального значения  $C_{\min}$  (12), а при  $(\beta_0, \infty)$  амплитуда монотонно растет неограниченно. На участке монотонного роста амплитуды дан полный анализ областей притяжения к заданной точке устойчивого равновесия  $\theta_e$ . Показано, что при  $\theta_e \in (0, \pi/4)$  область притяжения ограничена сверху, при больших значениях  $\theta_e$  — снизу. Для зависимо-

стей нижней  $\theta_0$  и верхней  $\theta_1$  границ от  $\theta_e$  и параметра  $\beta$  получены асимптотические разложения (19) и (20). Отдельно найдены характеристики вибрации, для которых область притяжения не ограничена. При таких вибрациях маятник перейдет в заданное устойчивое равновесие из любой начальной точки.

Автор благодарит проф. А. А. Тихонова за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

## Литература

1. Stephenson A. On a new type of dynamical stability. *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society* **52** (8), 1–10 (1908).
2. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике. В: *Сб. тр. Ин-та строят. механики АН УССР*. Вып. 14, 9–34 (1950).
3. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. *Журн. эксперим. и теорет. физики* **21**, вып. 5, 588–598 (1951).
4. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом. *Успехи физических наук* **44**, вып. 1, 7–20 (1951).
5. Brockett R. *A stabilization problem*. In: *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*. London, Springer (1999).
6. Леонов Г. А. Проблема Брокетта в теории устойчивости линейных дифференциальных уравнений. *Алгебра и анализ* **13** (4), 134–155 (2001).
7. Leonov G. A. The Brockett Problem in the Theory of Nonstationary Stabilization of Linear Differential Equations. *Amer. Math. Soc. Transl.* **205** (2), 163–173 (2002).
8. Леонов Г. А. Проблема Брокетта для линейных дискретных систем управления. *Автоматика и телемеханика*, (5), 92–96 (2002).
9. Moreau L., Aeyels D. Stabilization by means of periodic output feedback. *Proc. of Conference of Decision and Control (CDC)* **1**, 108–109 (1999). <https://doi.org/10.1109/CDC.1999.832758>
10. Moreau L., Aeyels D. A note on stabilization by periodic output feedback for third-order systems. *Proc. of the 14th International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, June 19–23, 2000, Perpignan (2000).
11. Moreau L., Aeyels D. Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree. *Systems & Control Letters* **51** (5), 395–406 (2004).
12. Морозов Н. Ф., Беляев А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Области притяжения в обобщенной задаче Капицы. *Доклады Академии наук* **487** (5), 502–506 (2019). <https://doi.org/10.31857/S0869-56524875502-506>
13. Петров А. Г. Обратная задача стабилизации сферического маятника в заданном положении под действием косої вибрации. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8** (66), вып. 2, 000–000 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.206>

Статья поступила в редакцию 12 сентября 2020 г.;  
после доработки 16 марта 2021 г.;  
рекомендована в печать 19 марта 2021 г.

Контактная информация:

Петров Александр Георгиевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; [petrovipmech@gmail.com](mailto:petrovipmech@gmail.com)

## Areas of attraction of the pendulum under the influence of oblique vibration of the suspension point\*

A. G. Petrov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

\*The work was carried out within the framework of the state task (state registration number AAAA-A20-120011690138-6).

**For citation:** Petrov A. G. Areas of attraction of the pendulum under the influence of oblique vibration of the suspension point. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 3, pp. 511–522.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.312> (In Russian)

The inverse problem of stabilizing a spherical pendulum in a given position by means of high-frequency vibration of the suspension point is posed. The position of the pendulum is determined by the angle between the pendulum rod and the vertical. For any given position of the pendulum, a one-parameter series of oblique vibration characteristics (the amplitude of the vibration velocity and the angle between the vibration velocity vector and the vertical) is found to stabilize the pendulum in this position. For the obtained series, the regions of attraction are determined (the initial points from which a given stable position of the pendulum will be established under the influence of vibration).

*Keywords:* spherical pendulum, stability, vibration of the suspension point, inverse problem, region of attraction.

## References

1. Stephenson A. On a new type of dynamical stability. *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society* **52** (8), 1–10 (1908).
2. Bogolyubov N. N. Perturbation theory in non-linear mechanics. In: *Sbornik Trudov Inst. Stroit. Mekh. Akad. Nauk UkSSR*. Iss. 14, 9–34 (1950). (In Russian)
3. Kapitsa P. L. Dynamic stability of a pendulum with an oscillating suspension point. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **21** (5), 588–598 (1951). (In Russian)
4. Kapitsa P. L. The pendulum in vibrating support. *Uspekhi fizicheskikh nauk* **44** (1), 7–20 (1951). (In Russian)
5. Brockett R. *A stabilization problem*. In: *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*. London, Springer (1999).
6. Leonov G. A. The Brockett problem in the stability theory for linear differential equations. *Algebra i Analiz* **13** (4), 134–155 (2001). (In Russian) [Engl. transl.: *St. Petersburg Math. J.* **13** (4), 613–628 (2002)].
7. Leonov G. A. The Brockett Problem in the Theory of Nonstationary Stabilization of Linear Differential Equations. *Amer. Math. Soc. Transl.* **205** (2), 163–173 (2002).
8. Leonov G. A. The Brockett Problem for Linear Discrete Control Systems. *Avtomat. i Telemekh.*, iss. 5, 92–96 (2002). (In Russian) [Engl. transl.: *Automation and Remote Control* **63**, 777–781 (2002). <https://doi.org/10.1023/A:1015497921140>].
9. Moreau L., Aeyels D. Stabilization by means of periodic output feedback. *Proc. of Conference of Decision and Control (CDC)* **1**, 108–109 (1999). <https://doi.org/10.1109/CDC.1999.832758>
10. Moreau L., Aeyels D. A note on stabilization by periodic output feedback for third-order systems. *Proc. of the 14th International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, June 19–23, 2000, Perpignan (2000).
11. Moreau L., Aeyels D. Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree. *Systems & Control Letters* **51** (5), 395–406 (2004).
12. Morozov N. F., Belyaev A. K., Tovstik P. E., Tovstik T. M., Tovstik T. P. Attraction basins in the generalized Kapitsa's problem. *Doklady Akademii nauk* **487** (5), 502–506 (2019). <https://doi.org/10.31857/S0869-56524875502-506> (In Russian)
13. Petrov A. G. The inverse problem of stabilization of a spherical pendulum in a given position under oblique vibration. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **8** (66), iss. 2, 000–000 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.206> (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **54**, iss. 2, 000–000 (2021)].

Received: September 12, 2020

Revised: March 16, 2021

Accepted: March 19, 2021

Author's information:

Alexander G. Petrov — [petrovimech@gmail.com](mailto:petrovimech@gmail.com)