МАТЕМАТИКА

УДК 517.938
MSC 39A30

Стабилизация некоторого класса неопределенных систем управления с оценкой допустимого возмущения матрицы объекта

И. Е. Зубер

Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Для цитирования: *Зубер И. Е.* Стабилизация некоторого класса неопределенных систем управления с оценкой допустимого возмущения матрицы объекта // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 1. С. 3–10. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.101

Рассматривается система $\dot{x} = M(\cdot)x + e_n u$, $u = s^T x$, где $M(\cdot) \in R^{n\times n}$, $s \in R^n$, пара $(M(\cdot), e_n)$ вполне управляема. Элементы матрицы $M(\cdot)$ являются неупреждающими фукционалами произвольной природы: $M(\cdot) = A(\cdot) + D(\cdot)$, где $A(\cdot)$ является обобщенной матрицей Фробениуса, а $M(\cdot)$ — матрица возмущения. В рассмотрение вводится функция Ляпунова в виде квадратичной формы с постоянной матрицей специального вида и положительное число α, являющееся оценкой $\dot{V}$ при условии, что $D(\cdot) = 0$. Для произвольно задаваемого положительного α определяются такой вектор s и такая оценка нормы матрицы $D(\cdot)$, что рассматриваемая система становится глобально экспоненциально устойчивой.

Ключевые слова: неопределенные системы, квадратичные функции Ляпунова, глобальная экспоненциальная устойчивость.

1. Введение. Стабилизация неопределенных систем с матрицей объекта специального вида рассматривалась в работах [1–3]. В настоящей статье предложен новый подход к решению этой задачи. Этот подход использует методику, разработанную в [4], которая позволяет получить в явном виде решение задачи стабилизации неопределенных непрерывных систем управления с матрицей объекта, являющейся обобщенной матрицей Фробениуса. По этой методике формируются функция Ляпунова в виде квадратичной формы с постоянной матрицей специального вида и стабилизирующий вектор обратной связи по состоянию, при которых обеспечивается произвольно задаваемая скорость убывания функции Ляпунова на траектории замкнутой системы.

В предлагаемой статье рассматривается непрерывная неопределенная система, матрица объекта которой является суммой обобщенной матрицы Фробениуса и матрицы возмущения, задаваемой только своей нормой. При решении задачи стабилизации этой системы формирование функции Ляпунова производится согласно развитой в [4] методике, но скорость убывания этой функции Ляпунова на траектории замкнутой системы определяется нормой матрицы возмущения. В предлагаемой статье исследуется также частный случай стабилизации при управлении по выходу. Отметим, что в работах [1–3] рассматривалась задача стабилизации систем управления с более простой структурой матрицы объекта и значительно более сложной структурой функции Ляпунова. В [4] решение задачи стабилизации проводилось без учета возмущения матрицы объекта.

2. Стабилизация по состоянию. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = M(\cdot)x + bu, \quad u = s^T x, \tag{1}$$

где $M(\cdot) \in R^{n\times n}, b \in R^n, s \in R^n$. Элементы матрицы $M(\cdot)$ являются ограниченными неупреждающими функционалами произвольной природы. Предполагается, что для системы (1) справедлива теорема существования решения и продолжимости при $t > 0$ любого решения, остающегося в ограниченной области. Ставится задача определения такого вектора s, при котором замкнутая система (1) становится глобально экспоненциально устойчивой.

Предполагается, что выполнено условие равномерной управляемости:

$$\inf_{(\cdot)}|\det(b, M(\cdot)b, ..., M(\cdot)^{n-1}b)| > 0. \tag{2}$$

Полагаем

$$b^T = e_n^T = (0, ..., 0, 1) \tag{3}$$

и представим матрицу $M(\cdot)$ в виде

$$M(\cdot) = A(\cdot) + D(\cdot), \tag{4}$$

где $A(\cdot)$ — обобщенная матрица Фробениуса, у которой на первой наддиагонали стоят единицы, а выше нее все элементы нулевые, $D(\cdot)$ — матрица возмущения. Будем называть возмущение допустимым, если из глобальной экспоненциальной устойчивости системы без возмущения следует глобальная экспоненциальная устойчивость системы с этим возмущением и функции Ляпунова обеих систем совпадают.

Решение задачи стабилизации системы (1), (3), (4) производится в два этапа. Сначала при $D(\cdot) = 0$ формируется квадратичная функция Ляпунова и стабилизирующий вектор обратной связи, обеспечивающие убывание функции Ляпунова на траекториях системы без возмущения с произвольно задаваемой скоростью $\alpha > 0$. Затем определяется связь между нормой матрицы возмущения $D(\cdot)$ и числом α, выполнение которой обеспечивает отрицательную определенность производной функции Ляпунова для замкнутой системы (1), (3), (4).

Рассмотрим сначала систему (1), (4) при отсутствии возмущения $D(\cdot)$ и введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V(x) = x^T H^{-1} x. \tag{5}$$

Здесь H — трехполосная матрица с элементами $h_{i,j}$, где $h_{i,i} = h_i > 0, h_{i,i+1} = h_{i+1,i} = -0.5\sqrt{h_i h_{i+1}}, h_{i,j} = 0$ при $j > i+1$ и $j < i-1$. Матрица H положительно определена при всех $h_i > 0$ [4].

Производная от функции (5) в силу системы (1) имеет следующий вид:

$$\dot{V} = x^T L(\cdot)x,$$

где, ввиду (4),

$$L(\cdot) = A^T(\cdot)H^{-1} + H^{-1}A(\cdot) + se_n^T H^{-1} + H^{-1}e_n s^T + D^T(\cdot)H^{-1} + H^{-1}D(\cdot).$$

Введем в рассмотрение произвольное число $\alpha > 0$, зависящие от α величины $h_1, ..., h_n$ и вектор s, при которых справедливо неравенство

$$A^T(\cdot)H^{-1} + H^{-1}A(\cdot) + se_n^T H^{-1} + H^{-1}e_n s^T < -\alpha H^{-1}, \tag{6}$$

а затем определим условия на матрицу $D(\cdot)$, при которых выполнено неравенство

$$D^T(\cdot)H + HD(\cdot) < (\alpha - \delta)H, \tag{7}$$

где $\delta < \alpha$.

Займемся сначала неравенством (6). Положим

$$s = \lambda H^{-1}e_n, \tag{8}$$

где параметр λ будет выбран ниже.

Ввиду (8) неравенство (6) примет следующий вид:

$$A^T(\cdot)H^{-1} + H^{-1}A(\cdot) + 2\lambda H^{-1}e_n e_n^T H^{-1} < -\alpha H^{-1}.$$

Умножив это соотношение слева и справа на H, приходим к неравенству

$$R(\cdot) < 0, \tag{9}$$

где

$$R(\cdot) = HA^T(\cdot) + A(\cdot)H + 2\lambda e_n e_n^T + \alpha H.$$

Структура матрицы $A(\cdot)$ с элементами $a(\cdot)_{i,j}$ позволяет записать матрицу $R(\cdot)$ в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} K_{n-1}(\cdot) & q(\cdot) \\ q^T(\cdot) & \varkappa(\cdot) \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\varkappa(\cdot) = 2\lambda + 2(a_{n-1,n}(\cdot)h_{n-1,n} + a_{n,n}(\cdot)h_n) + \alpha h_n,$$

а все элементы $(n-1)$-мерного вектора $q(\cdot)$ являются линейными комбинациями элементов матрицы $A(\cdot)$, причем предпоследний элемент имеет еще слагаемое $\alpha h_{n-1,n}$.

Обозначим через Δ_i главные диагональные миноры матрицы R, отсчитываемые от верхнего левого угла, и будем добиваться выполнения равенства

$$\mathrm{sign}\Delta_i = (-1)^i.$$

Имеем

$$\Delta_1 = -\sqrt{h_1 h_2} + 2h_1 a_{11}(\cdot) + \alpha h_1.$$

Предположим, что при всех i, j справедлива оценка

$$|a_{i,j}| \leq \alpha_0. \tag{10}$$

Тогда $\Delta_1 < O$, если $\sqrt{h_2} > \sqrt{h_1}(2\alpha_0 + \alpha)$.

Согласно [4], можем записать $\Delta_i = 2\Delta_{i-1} h_{i,i+1} + \gamma_i(\cdot)$, где $\gamma_i(\cdot)$ зависит только от h_j при $j \leq i$.

Это обстоятельство позволяет выбирать последовательно параметры h_i, обеспечивающие выполнение свойства

$$\mathrm{sign}\Delta_k = (-1)^k.$$

Перейдем к выбору параметра λ в (8). Согласно лемме Шура имеем

$$\det R(\cdot) = \det K_{n-1}(\cdot)(\varkappa(\cdot) - q^T(\cdot)K_{n-1}(\cdot)^{-1}q(\cdot)).$$

Поэтому при

$$\lambda < \inf(0.5q^T(\cdot)K_{n-1}(\cdot)q(\cdot) - a_{n-1,n}(\cdot)h_{n-1,n} - a_{n,n}(\cdot)h_1 - 0.5\alpha h_n) \tag{11}$$

$\det R(\cdot)$ имеет требуемый знак и матрица $R(\cdot)$ отрицательно определена, что означает выполнение неравенства (6) при произвольном $\alpha > 0$.

Перейдем к определению условий на матрицу $D(\cdot)$, при которых выполняется неравенство (7), т. е. условий допустимости заданного возмущения матрицы объекта системы (1). Заниженная оценка евклидовой нормы матрицы $D(\cdot)$:

$$|D(\cdot)| < \frac{\alpha}{2|H||H^{-1}|} \tag{12}$$

вытекает из очевидного требования

$$D(\cdot)^T H + HD(\cdot) < \alpha\lambda_{\min}(H)I$$

и соотношений

$$D(\cdot)^T H + HD(\cdot) < 2|D(\cdot)||H|I,$$

$$\lambda_{\min}(H) = \frac{1}{\lambda_{\max}(H^{-1})} > \frac{1}{|H^{-1}|}.$$

Однако эта оценка неудобна, так как согласно [4] матрица H конструируется сформированным там алгоритмом при заданном числе α. Для получения более удобной оценки допустимого возмущения поступим следующим образом. Полагаем

$$z = H^{0.5}x.$$

Тогда система (1) примет следующий вид:

$$\dot{z} = N_1(\cdot)z,$$

$$N_1(\cdot) = H^{-0.5}N(\cdot)H^{0.5},$$

где

$$N(\cdot) = M(\cdot) + e_n s^T.$$

Поэтому справедливо соотношение

$$N_1(\cdot) = A_1(\cdot) + H^{-0.5} e_n s^T H^{0.5} + D_1,$$

где

$$A_1(\cdot) = H^{-0.5} A(\cdot) H^{0.5},$$
$$D_1(\cdot) = H^{-0.5} D(\cdot) H^{0.5}.$$

Отметим, что

$$V(x) = V_1(z) = z^T H^{0.5} H^{-1} H^{0.5} z = z^T I z.$$

Тогда неравенство (6) заменится эквивалентным неравенством

$$A_1^T(\cdot) + A_1(\cdot) + 2\lambda H^{-0.5} e_n e_n^T H^{-0.5} < -\alpha I.$$

При этом (7) примет эквивалентную форму

$$D_1^T(\cdot) + D_1(\cdot) < (\alpha - \delta) I.$$

Поэтому связь между матрицами $A_1(\cdot), D_1(\cdot)$ и положительным числом α задается соотношением

$$|D_1^T(\cdot) + D_1(\cdot)| < \alpha < |A_1^T(\cdot) + A_1(\cdot) + 2\lambda H^{-0.5} e_n e_n^T H^{-0.5}|. \qquad (13)$$

Отметим, что априорное задание скорости убывания функции Ляпунова на траекториях системы без возмущения, т. е. положительное число α, соответствует верхней границе нормы матрицы допустимого возмущения, определяемой формулой (12), в которой матрица H формируется описанным в [4] алгоритмом. Однако априорное задание нормы матрицы $D(\cdot)$ и требуемое значение положительного α связаны громоздким степенным неравенством, получаемым из соотношения (13) с учетом условий (10) и (11).

Рассмотрим в качестве примера полученное соотношение при $n = 2$. Согласно [4] элементы матрицы H имеют следующий вид:

$$h_{11} = 1, \quad h_{12} = h_{21} = -0.5\sqrt{h_{22}}, \quad h_{22} = (2\alpha_0 + \alpha)^2 + \epsilon.$$

При $n = 2$ удобнее пользоваться оценкой

$$2|D(\cdot)||H| I < \alpha H,$$

т. е. требовать выполнения неравенства

$$2|D(\cdot)||H| < \lambda_{\min}(H)\alpha.$$

Поскольку $\lambda_{\min}(H) = 1$, имеем $|H| = \sqrt{1 + 0.5h_{22} + h_{22}^2}$.

Итак, норма матрицы возмущения $D(\cdot)$ и скорость убывания функции Ляпунова на траекториях системы без возмущения α должны удовлетворять соотношению

$$\alpha > 2|D(\cdot)|\sqrt{1 + 0.5[(2\alpha_0 + \alpha)^2 + \epsilon] + [(2\alpha_0 + \alpha)^2 + \epsilon]^2}.$$

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (2), (3), (10), *вектор* $s(\cdot)$ *определен формулами* (9), (11).

Тогда при выполнении неравенства (13) *система* (1), (3) *глобально экспоненциально устойчива.*

Замечание. Недостатком предложенного алгоритма является задание вектора распределения управления в виде (3). Отметим, что согласно [4] решение неравенства (6) может быть получено для произвольного вектора $b^T = (\beta_1, ..., \beta_n)$ при $\beta_n \neq 0$, если обобщенную матрицу Фробениуса $A(\cdot)$ заменить матрицей Фробениуса.

3. Стабилизация при управлении по выходу. Перейдем к решению задачи стабилизации системы

$$\dot{x} = M(\cdot)x + b_1 u, \quad u = u(y), \tag{14}$$

$$y = Px. \tag{15}$$

Матрица $M(\cdot)$ задана в системе (14) в виде (4), P — постоянная квадратная матрица ранга 1, функция $u(y)$ и вектор b_1 подлежат определению.

Предположим сначала, что P — матрица, у которой в правом нижнем углу стоит 1, а остальные элементы нулевые, т. е. $y = x_n$, и будем рассматривать

$$u = s_1^T Px.$$

Тогда решение задачи стабилизации системы (14), (15) обратной связью по выходу сведется к решению задачи стабилизации обратной связью по состоянию при заданной структуре вектора обратной связи $s_1 = \lambda e_n$, где λ задается соотношением (11). Согласно формуле (8), связывающей вектор распределения управления и вектор обратной связи системы (1), стабилизация системы (13), (14) осуществляется при $b_1 = Hb = He_n$.

Рассмотрим более общий случай замены матрицы P матрицей C, у которой нижняя строка состоит из элементов $\nu_1, ..., \nu_n$, а остальные элементы нулевые, т. е. полагаем $y = \nu_1 x_1 + ... + \nu_n x_n$.

Введем в рассмотрение преобразование подобия $x = Qz$ и рассмотрим преобразованную систему (14), (15). Легко видеть, что решение задачи стабилизации преобразованной системы дословно повторяет решение задачи стабилизации системы (14), (15) при выполнении условия $C^T Q = P^T$.

4. Заключение. Решение задачи стабилизации рассматриваемого класса нелинейных непрерывных систем с возмущением матрицы объекта проведено в два этапа. На первом этапе производится стабилизация рассматриваемой системы при отсутствии возмущения и для нее формируется функция Ляпунова с произвольно задаваемой скоростью убывания $\alpha > 0$. На втором этапе определяется связь между числом α и верхней границей нормы матрицы допустимого возмущения. Получены соотношения, позволяющие по заданному априори числу α оценить норму матрицы возмущения и по заданной априори норме матрицы возмущения определить положительное число α. Рассмотрена задача стабилизации при управлении по выходу y для случаев $y = x_n$ и $y = \gamma_1 x_1 + ... + \gamma_n x_n$, решение которой сводится к решению задачи стабилизации по состоянию при фиксированной структуре вектора обратной связи.

Литература

1. Jia R., Qian C., Zhai J. Semi-Global Stabilization on Uncertain Nonlinear Systems by Homogeneous Output Feedback Controllers. *IET Control Theory and Application* **6** (1), 165–172 (2012). https://doi.org/10.1049/iet-cta.2010.0503

2. Zhai Jun-Yong, Li Wei-Ging, Fei Shu-min. Global Output Feedback Stabilization for a Class of Uncertain Non-linear Systems. *IET Control Theory and Application* **7** (2), 305–313 (2013). https://doi.org/10.1049/iet-cta.2011.0505

3. Man Yongchao, Liu Yungang. Global Output-Feedback Stabilization for a Class of Uncertain Time-varying Nonlinear Systems. *Syst. Control Let.* **90**, 20–30 (2016). https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2015.09.014

4. Гелиг А. Х., Зубер И. Е., Чурилов А. Н. *Устойчивость и стабилизация нелинейных систем.* Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2006).

Статья поступила в редакцию 23 марта 2021 г.;
доработана 31 июля 2021 г.;
рекомендована к печати 2 сентября 2021 г.

Контактная информация:

Зубер Ирина Ефремовна — д-р техн. наук; zuber.yanikum@gmail.com

Stabilization of some classes of uncertain control systems with evaluation of admissible disturation for object matrix

I. E. Zuber

Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
61, Bolshoy pr. V. O., St Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Zuber I. E. Stabilization of some classes of uncertain control systems with evaluation of admissible disturation for object matrix. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 1, pp. 3–10. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.101 (In Russian)

Consider the system $\dot{x} = M(\cdot)x + e_n u$, $u = s^T x$, where $M(\cdot) \in R^{n\times n}$, $s \in R^n$, the pair $(M\cdot), e_n$ is uniformly controlable. The elements of $M(\cdot)$ are nonlook-ahead functionals of arbitrary nature. The object matrix is considering in form $M(\cdot) = A(\cdot) + D(\cdot)$, where $A(\cdot)$ has a form of globalized Frobenious matrix, $D(\cdot)$ is a matrix of disturbation. Consider the square Lyapunov function $V(x)$ with constant matrix of special form and number $\alpha > 0$ as estimate for $\dot{V}$ for case $D(\cdot) = 0$. The definition of such vector s and such estimate of norm matrix $D(\cdot)$ that system is globally and exponentially stable are performed for every $\alpha > 0$.

Keywords: uncertain systems, global and exponential stability, the square Lyapunov function.

References

1. Jia R., Qian C., Zhai J. Semi-Global Stabilization on Uncertain Nonlinear Systems by Homogeneous Output Feedback Controllers. *IET Control Theory and Application* **6** (1), 165–172 (2012). https://doi.org/10.1049/iet-cta.2010.0503

2. Zhai Jun-Yong, Li Wei-Ging, Fei Shu-min. Global Output Feedback Stabilization for a Class of Uncertain Non-linear Systems. *IET Control Theory and Application* **7** (2), 305–313 (2013). https://doi.org/10.1049/iet-cta.2011.0505

3. Man Yongchao, Liu Yungang. Global Output-Feedback Stabilization for a Class of Uncertain Time-varying Nonlinear Systems. *Syst. Control Let.* **90**, 20–30 (2016). https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2015.09.014

4. Gelig A. Kh., Zuber I. E., Churilov A. N. *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems.* St Petersburg, St Petersburg University Press (2006). (In Russian)

Received: March 23, 2021
Revised: July 31, 2021
Accepted: September 2, 2021

Author's information:

Irina E. Zuber — zuber.yanikum@gmail.com