УДК 519.61 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 1
MSC 65F22

Метод моментов в задаче обращения преобразования Лапласа и его регуляризация*

А. В. Лебедева, В. М. Рябов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Лебедева А. В., Рябов В. М.* Метод моментов в задаче обращения преобразования Лапласа и его регуляризация // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 1. С. 46–52.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.105

Рассматриваются интегральные уравнения первого рода, относящиеся к классу некорректных задач. Сюда же относится задача обращения интегрального преобразования Лапласа, применяемого для решения широкого класса математических задач. Интегральные уравнения сводятся к плохо обусловленным системам линейных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются коэффициенты разложения в ряд по смещенным многочленам Лежандра некоторой функции, просто выражающейся через искомый оригинал. Эта функция находится как решение некоторой конечной проблемы моментов в гильбертовом пространстве. Для получения надежного решения системы используют методы регуляризации. Общей стратегией является использование стабилизатора Тихонова или его модификаций. Указан конкретный вид стабилизатора в методе регуляризации, ориентированный на априорно невысокую степень гладкости искомого оригинала. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие эффективность предлагаемого алгоритма обращения.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений, интегральные уравнения первого рода, некорректные задачи, плохо обусловленные задачи, число обусловленности, метод регуляризации.

1. Применение интегрального преобразования Лапласа приводит к более простому уравнению относительно изображения искомого оригинала. На следующем шаге возникает задача обращения, т. е. нахождения оригинала $f(t)$ по его изображению $F(p)$ из уравнения

$$\int_0^\infty e^{-p\,t} f(t)\,dt = F(p). \tag{1}$$

Теория преобразования Лапласа и аналитические методы его обращения содержатся в классических работах [1, 2].

Формула обращения задается интегралом Римана — Меллина:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p\,t} F(p)\,dp, \quad c > \gamma, \tag{2}$$

где γ — абсцисса сходимости интеграла Лапласа (1).

*Статья подготовлена при поддержке гранта Санкт-Петербургского государственного университета (Мероприятие 3, Pure ID 75207094). Исследование выполнено с использованием оборудования ресурсного центра «Вычислительный центр СПбГУ» (http://cc.spbu.ru).

К сожалению, формула (2) мало пригодна для вычислений, и потому возникает необходимость в разработке и использовании приближенных методов обращения.

Методам обращения посвящены книги [3, 4]. Выбор метода обращения определяется той априорной информацией об оригинале и его образе, которой мы располагаем. Известно, что образ $F(p)$, как функция комплексной переменной p, регулярна в полуплоскости $\mathrm{Re}\,(p) > \gamma$, так что мы можем при построении метода обращения использовать значения образа либо в окрестности начала координат, либо в окрестности бесконечно удаленной точки, либо на вещественной оси, либо во всей полуплоскости регулярности и т. д.

Частные случаи реализации возможных ситуаций и аналитический вид приближений подробно описаны в книге [4]. С целью указания особенностей задачи обращения остановимся на одном методе — квадратурных формулах наивысшей алгебраической степени точности, имеющих следующий вид [4]:

$$f(t) \approx t^{s-1} \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_s(p_k/t), \quad \varphi_s(p) = p^s F(p), \quad s > 0. \tag{3}$$

Функция $\varphi_s(p)$ предполагается регулярной в полуплоскости $\mathrm{Re}\,(p) > 0$. Узлы p_k и коэффициенты A_k формулы (3) комплексны и таковы, что она точна для функций $\varphi_s(p) = p^{-j}, j = 0, 1, \ldots, 2n-1$. Узлы p_k попарно различны, расположены в полуплоскости $\mathrm{Re}\,(p) > 0$ и являются корнями специальных ортогональных многочленов [4], обладающих теми же свойствами, что и классические ортогональные многочлены [5]. Скорость сходимости формул (3) такая же, как у классических формул Гаусса, и характеризуется величиной [4]

$$B_{2n} = O\left(n^{1-s}\left(\frac{3.764}{n^2}\right)^n\right).$$

Существенное отличие формулы (3) от классических квадратур типа Гаусса состоит в характеристике ее устойчивости относительно погрешности в интегрируемой функции $\varphi_s(p)$: допущенная ошибка может возрасти в $M_n = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$ раз. В работе [4] доказано, что $M_n = O(n^{1-s} 3.764^n)$. Следовательно, вычислительный процесс по формуле (3) с ростом n становится неустойчивым.

Отметим, что задача обращения, т. е. решения интегрального уравнения первого рода (1), некорректна [6], что, в частности, проявляется в указанной неустойчивости вычислительного процесса, а также в том, что правая часть формулы (3) есть гладкая функция, а левая часть, как и функция-оригинал, даже может иметь разрывы.

В книге [4] предложен способ определения точек разрыва оригинала и величины скачка оригинала в них.

Заметим, что в названных книгах [1–4] проблема некорректности задачи обращения не рассматривалась.

Как правило, любой приближенный метод обращения приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) либо относительно значений оригинала в некоторых точках, либо коэффициентов разложения оригинала в ряд по некоторой системе функций. Из-за некорректности задачи обращения получаемая СЛАУ плохо обусловлена. В случае применения квадратурных формул исследование числа обусловленности в зависимости от выбора узлов квадратуры было проведено в работе [7].

Общая теория решения некорректных и плохо обусловленных уравнений изложена в фундаментальных работах [6, 8], вопросы реализации общей теории применительно к конкретным прикладным задачам изложены в книге [9] и многочисленных статьях.

По сути, процедура регуляризации некорректно поставленной задачи для уравнения

$$Az = u \tag{4}$$

состоит из двух шагов: сначала переходим к уравнению

$$A^*Az = A^*u,$$

которое всегда разрешимо, в отличие от исходного уравнения, а затем осуществляем сдвиг

$$(A^*A + \alpha L)z = A^*u, \quad \alpha > 0, \tag{5}$$

где L — некоторый симметричный положительно определенный оператор, содержащий в себе априорную информацию об искомом решении. Фактически эти переходы осуществляются путем минимизации функционала вида

$$M_\alpha(A, u, z) = ||Az - u||^2 + \alpha\Omega(z), \tag{6}$$

где Ω — неотрицательный функционал, производная которого порождает оператор L.

Уравнение (5) относительно точки минимума функционала (6) стандартными приемами сводится к СЛАУ относительно каркасов приближенных решений [10].

Методы регуляризации СЛАУ и интегральных уравнений первого рода изучались нами в работах [11, 12].

2. Следуя работам [13, 14], положим в уравнении (1)

$$p_k = a + rk, \quad b_k = F(p_k), \quad k = 1, \dots, m, \tag{7}$$

сделаем замену $x = \exp(-rt)$ и введем функцию

$$h(x) = \frac{x^{a/r}}{r} f\left(-\frac{\ln(x)}{r}\right). \tag{8}$$

В результате из уравнения (1) получаем соотношения

$$\int_0^1 x^{k-1} h(x)\, dx = b_k, \quad k = 1, \dots, m. \tag{9}$$

Напомним, что значения оригинала $f(+0)$, $f(+\infty)$, если они существуют, можно вычислить по формулам

$$f(+0) = \lim_{p\to+\infty} pF(p), \quad f(+\infty) = \lim_{p\to+0} pF(p).$$

Нахождение функции $h(x)$, удовлетворяющей условиям (9), можно рассматривать как частный случай полной проблемы моментов [15].

Приближение к функции (8) будем разыскивать в виде разложения по смещенным многочленам Лежандра:

$$h(x) \approx \sum_{j=1}^{m} c_j P_{j-1}(2x-1). \tag{10}$$

Из формул (8) и (10) при $x \to 1$ получаем равенство

$$\frac{f(+0)}{r} \approx \sum_{j=1}^{m} c_j.$$

Подстановка представления (10) в уравнения (9) приводит к СЛАУ вида (4) с матрицей

$$A = (a_{kj})_{k,j=1}^{m}, \quad a_{kj} = \int_0^1 x^{k-1} P_{j-1}(2x-1)\, dx,$$

правой частью $u = (b_1, b_2, \dots, b_m)'$ и неизвестным вектором $z = (c_1, c_2, \dots, c_m)'$.

Требовать от функции $h(x)$ априорно какой-либо степени гладкости, накладывая некоторые условия на коэффициенты представления (10), не стоит, учитывая связь (8) функции $h(x)$ с искомым оригиналом, необязательно гладким. В таком случае полагаем

$$\Omega(z) = \sum_{j=1}^{m} z_j^2, \quad L = E,$$

и уравнение Эйлера (5) принимает вид

$$(A^*A + \alpha E)z = A^*u, \quad \alpha > 0. \tag{11}$$

Для решения этой системы можно применять описанные в работе [11] методы регуляризации. Разумный выбор значений входящих в (7) параметров a, r описан в работе [14].

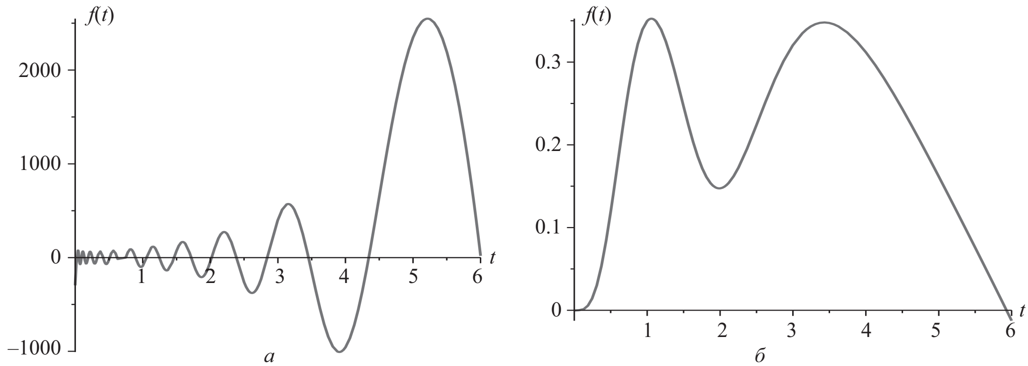
В общем случае матрица A и правая часть u известны приближенно с погрешностью δ, и выбор параметра регуляризации α зависит от этой погрешности [6, 11]. В приводимых далее примерах матрица A и правая часть u известны практически точно, т. е. δ — это погрешность представления чисел в компьютере, и параметр α имеет тот же порядок.

В приведенных ниже примерах вычисления проводились с помощью пакета Maple 15 с использованием оборудования Ресурсного центра «Вычислительный центр СПбГУ» (http://www.cc.spbu.ru/), где параметр Digits задает число десятичных знаков, с которым проводятся вычисления. На рис. 1, 2 представлены решения системы (11) с регуляризацией и без нее, а также значения всех использованных параметров.

Пример 1. Дано изображение

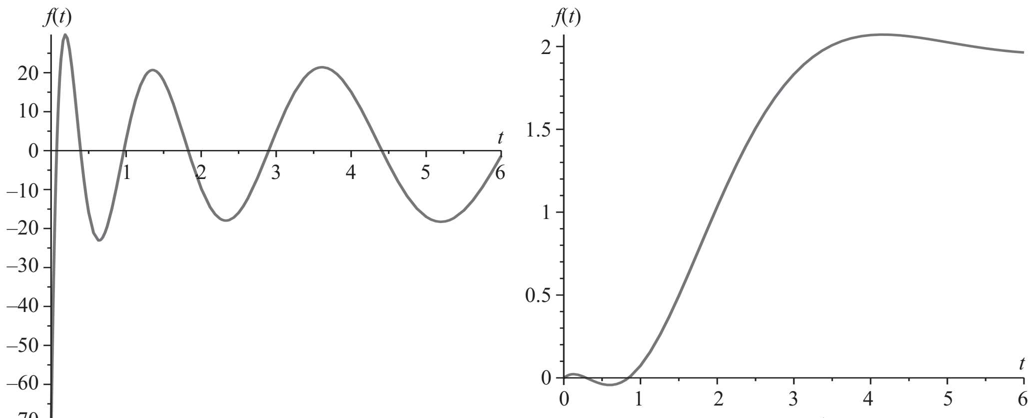
$$F(p) = \frac{168}{(p+2)^5} - \frac{8640}{(p+3)^7}.$$

Результаты вычислений см. на рис. 1.



а *б*

Рис. 1. Решение примера 1 при $a = 0.5$, $r = 1$, $m = 25$, $Digits = 20$: *а* — $\alpha = 0$, *б* — $\alpha = 10^{-20}$.



а *б*

Рис. 2. Решение примера 2 при $a = 0.05$, $r = 0.05$, $m = 20$, $Digits = 15$: *а* — $\alpha = 0$, *б* — $\alpha = 10^{-15}$.

Пример 2. Дано изображение

$$F(p) = \frac{\exp(-p) - \exp(-3p)}{p^2}.$$

Результаты вычислений см. на рис. 2.

Заметим, что при отсутствии регуляризации ($\alpha = 0$) получаемые приближения совершенно не похожи на искомые оригиналы, в то время как регуляризация приводит ко вполне удовлетворительным результатам.

Литература

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* Москва, Лань (2002).

2. Крылов В. И., Скобля Н. С. *Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа.* Москва, Наука (1974).

3. Cohen A. M. *Numerical methods for Laplace transform inversion.* New York, Springer (2007).

4. Рябов В. М. *Численное обращение преобразования Лапласа.* Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2013).

5. Суетин П. К. *Классические ортогональные многочлены.* Москва, Наука (1976).

6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач.* Москва, Наука (1979).

7. Gautschi W. On the condition of a matrix arising in the numerical inversion of the Laplace transform. *Mathematics of computation* **23** (105), 109–118 (1969).

8. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* Москва, Наука (1978).

9. Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи.* Новосибирск, Сибирское научное изд-во (2009).

10. Даугавет И. К. *Теория приближенных методов. Линейные уравнения.* Санкт-Петербург, БХВ-Петербург (2006).

11. Лебедева А. В., Рябов В. М. О численном решении систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленными матрицами. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6 (64)**, вып. 4, 619–626 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.407

12. Лебедева А. В., Рябов В. М. О регуляризации решения интегральных уравнений первого рода с помощью квадратурных формул. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8 (66)**, вып. 4, 593–599 (2021). https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.404

13. Papoulis A. A new method of inversion of the Laplace transform. *Quarterly of applied mathematics* **14** (4), 405–414 (1967).

14. Brianzi P., Frontini M. On the regularized inversion of Laplace transform. *Inverse problems* **7**, 355–368 (1991).

15. Крейн М. Г., Нудельман А. А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* Москва, Наука (1973).

Статья поступила в редакцию 17 июля 2021 г.;
доработана 25 августа 2021 г.;
рекомендована к печати 2 сентября 2021 г.

Контактная информация:

Лебедева Анастасия Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доц.; a.v.lebedeva@spbu.ru
Рябов Виктор Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.ryabov@spbu.ru

Method of moments in the problem of inversion of the Laplace transform and its regularization*

A. V. Lebedeva, V. M. Ryabov

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Lebedeva A. V., Ryabov V. M. Method of moments in the problem of inversion of the Laplace transform and its regularization. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 1, pp. 46–52.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.105 (In Russian)

Integral equations of the first kind are considered, which belong to the class of ill-posed problems. This also includes the problem of inverting the integral Laplace transform, which is used to solve a wide class of mathematical problems. Integral equations are reduced to ill-conditioned systems of linear algebraic equations, in which the unknowns are the coefficients of the expansion in a series in the shifted Legendre polynomials of some function that simply expresses in terms of the sought original. This function is found as a solution to a certain finite moment problem in a Hilbert space. To obtain a reliable solution to the system, regularization methods are used. The general strategy is to use the Tikhonov stabilizer or its modifications. A specific type of stabilizer in the regularization method is indicated,

*This paper was prepared with the support by a grant from St Petersburg State University (Event 3, Pure ID 75207094). Research was carried out using computational resources provided by Resource Center “Computer Center of SPbU” (http://www.cc.spbu.ru/en).

focused on a priori low degree of smoothness of the desired original. The results of numerical experiments are presented, confirming the effectiveness of the proposed inversion algorithm.

Keywords: system of linear algebraic equations, integral equations of the first kind, ill-posed problems, ill-conditioned problems, condition number, regularization method.

References

1. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. *Methods of the theory of functions of a complex variable.* Moscow, Lan' Publ. (2002). (In Russian)

2. Krylov V. I., Skoblya N. S. *Methods of the approximate Fourier transform and the inversion of the Laplace transform.* Moscow, Nauka Publ. (1974). (In Russian)

3. Cohen A. M. *Numerical methods for Laplace transform inversion.* New York, Springer (2007).

4. Ryabov V. M. *Numerical inversion of the Laplace transform.* St Petersburg, St Petersburg Univ. Press (2013). (In Russian)

5. Suetin P. K. *Classical orthogonal polynomials.* Moscow, Nauka Publ. (1976). (In Russian)

6. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniia nekorrektnykh zadach.* Moscow, Nauka Publ. (1979). (In Russian) [Eng. transl.: Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Solutions of Ill-Posed Problems.* Winston (1977)].

7. Gautschi W. On the condition of a matrix arising in the numerical inversion of the Laplace transform. *Mathematics of computation* **23** (105), 109–118 (1969).

8. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* Moscow, Nauka Publ. (1978). (In Russian)

9. Kabanikhin S. I. *Inverse and ill-posed problems.* Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo Publ. (2009). (In Russian)

10. Daugavet I. K. *The theory of approximate methods. Linear equations.* St Petersburg, BHV-Petersburg Publ. (2006). (In Russian)

11. Lebedeva A. V., Ryabov V. M. Numerical solution of systems of linear algebraic equations with ill-conditioned matrices. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6 (64)**, iss. 4, 619–626 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.407 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **52** (4), 388–393 (2019). https://doi.org/10.1134/S1063454119040058].

12. Lebedeva A. V., Ryabov V. M. On the regularization of the solution of integral equations of the first kind using quadrature formulas. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **8 (66)**, iss. 4, 593–599 (2021). https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.404 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **54** (4), 361–365 (2021). https://doi.org/10.1134/S1063454121040129].

13. Papoulis A. A new method of inversion of the Laplace transform. *Quarterly of applied mathematics* **14** (4), 405–414 (1967).

14. Brianzi P., Frontini M. On the regularized inversion of Laplace transform. *Inverse problems* **7**, 355–368 (1991).

15. Krein M. G., Nudel'man A. A. *Problema momentov Markova i ekstremal'nye zadachi.* Moscow, Nauka Publ. (1973). (In Russian) [Eng. transl.: Krein M. G., Nudel'man A. A. *The Markov moment problem and extremal problems.* In Ser.: Translations of Mathematical Monographs, vol. 50. AMS (1977)].

Received: July 17, 2021
Revised: August 25, 2021
Accepted: September 2, 2021

Authors' information:

Anastasia V. Lebedeva — a.v.lebedeva@spbu.ru
Victor M. Ryabov — v.ryabov@spbu.ru