УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 1
MSC 60F15

# Об усиленной форме леммы Бореля — Кантелли

*А. Н. Фролов*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Фролов А. Н.* Об усиленной форме леммы Бореля — Кантелли // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 1. С. 85–93. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.109

Усиленная форма леммы Бореля — Кантелли представляет собой вариант усиленного закона больших чисел для сумм индикаторов событий. Центрирование в нем осуществляется средними, а нормирование — некоторой функцией от суммы вероятностей событий. Предполагается, что ряд из этих вероятностей расходится. В настоящей работе получены новые варианты усиленной леммы Бореля — Кантелли с меньшими нормирующими последовательностями, чем в более ранних работах. При этом становятся более жесткими ограничения на дисперсии приращений сумм индикаторов событий. Приведены примеры, в которых эти ограничения выполняются.

*Ключевые слова*: лемма Бореля — Кантелли, количественная лемма Бореля — Кантелли, усиленная форма леммы Бореля — Кантелли, суммы индикаторов событий, усиленный закон больших чисел, сходимость почти наверное.

**1. Введение.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, а $E\xi$ и $D\xi$ обозначают среднее и дисперсию случайной величины $\xi$ соответственно. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность событий. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}(A_k), \quad E_n = \sum_{k=1}^{n} P(A_k), \tag{1}$$

где $\mathbb{I}_{A_n}$ — индикатор события $A_n$, $n \geqslant 1$. Обозначим

$$P_\infty = P(A_n \text{ б. ч.}) = P(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty).$$

Хорошо известен следующий вариант леммы Бореля — Кантелли.

**Лемма 1.** *1) Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, *то* $P_\infty = 0$.

*2) Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$ *и события* $\{A_n\}$ *попарно независимы, то* $P_\infty = 1$.

Лемма Бореля — Кантелли широко применяется в теории вероятностей, математической статистике и их приложениях. К настоящему моменту имеется большое число работ, посвященных ее обобщению и усилению (см., например, [1–7] и библиографию из этих работ). Значительное число ее обобщений связано с ослаблением условия попарной независимости событий $\{A_n\}$ во второй части. Обычно предлагаются условия, позволяющие оценить $P_\infty$ снизу. Однако имеются и другие возможности обобщений, которые мы обсудим в этой статье.

Случайная величина $S_n$ представляет собой сумму случайных величин. Если события $\{A_n\}$ независимы и равновероятны, то мы фактически имеем дело с числом успехов в последовательности независимых испытаний Бернулли. Следовательно, изучая поведение $S_n$, мы исследуем свойства обобщений схемы Бернулли на зависимые испытания с меняющейся вероятностью успеха. Поэтому естественной является задача об отыскании условий, достаточных для существования последовательности положительных постоянных $\{B_n\}$ такой, что

$$\frac{S_n - E_n}{B_n} \to 0 \quad \text{п. н.} \tag{2}$$

при $n \to \infty$. Таким образом, речь идет о применимости усиленного закона больших чисел (УЗБЧ) к $S_n$. При этом мы будем предполагать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ расходится, так как только в этом случае $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$ п. н. Мы будем брать в качестве нормирующих постоянных некоторые функции от $E_n$.

Отметим, что нормировка в рассматриваемых нами результатах часто имеет вид $\sqrt{E_n}h(E_n)$ с медленно меняющейся на бесконечности функцией $h(x)$, а $E_n$ и $DS_n$ сравнимы друг с другом. В силу закона повторного логарифма нормировка, включающая $\sqrt{DS_n}$ в качестве главного члена асимптотики, является наилучшей возможной для независимых событий. Мы, конечно, рассматриваем зависимые события, но независимый случай выступает некоторым показателем качества получаемых результатов.

По аналогии с УЗБЧ соответствующие результаты мы будем называть усиленной формой леммы Бореля — Кантелли. В англоязычной литературе встречается также название the quantitative Borel — Cantelli lemma.

Отметим, что подобные результаты имеют широкое применение за пределами теории вероятностей. Например, при исследовании статистических свойств динамических систем рассматривают п. н. поведение сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{A_k} \circ T^k,$$

где $T$ — сохраняющее меру преобразование вероятностного пространства.

В. Филипп (W. Phillipp) [8] показал, что соотношение (2) выполнено с $B_n = \sqrt{E_n}(\ln E_n)^{3/2+\varepsilon}$, если справедливо неравенство

$$P(A_i A_j) \leqslant P(A_i)P(A_j) + b_{j-i}P(A_i) \tag{3}$$

для всех $i > j$. Здесь $\{b_n\}$ — последовательность чисел такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

В. В. Петров [9] обобщил этот результат, заменив условие (3) следующим более слабым условием:

$$D(S_m - S_n) \leqslant C_0(E_m - E_n) \tag{4}$$

для всех $m > n$ и всех достаточно больших $n$, где $C_0$ — положительная постоянная. Кроме того, в результате В. В. Петрова [9] нормирующая последовательность

$$B_n = \sqrt{E_n \psi(\ln E_n)}(\ln E_n)^{3/2} \tag{5}$$

меньше нормировки В. Филиппа при подходящем выборе функции $\psi(x)$. Здесь $\psi(x)$ — произвольная функция такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\psi(n))$ сходится.

А. Н. Фролов [10] доказал, что соотношение (2) может иметь место и при более слабых условиях, чем условие (4). Если

$$D(S_m - S_n) \leqslant g(E_m - E_n) \tag{6}$$

для всех $m > n$ и всех достаточно больших $n$, то соотношение (2) выполнено с

$$B_n = \sqrt{g(E_n)\psi(\ln E_n)}(\ln E_n)^{3/2}.$$

Здесь $g(x)$ — функция такая, что $g(x)/x$ и $x^{2-\delta}/g(x)$ не убывают для некоторого $\delta \in (0,1)$, а функция $\psi(x)$ такая же, как в (5). В работе А. Н. Фролова [10] можно найти обобщение условия (3), достаточное для (6), а также примеры, в которых условие (6) выполнено, а условия В. Филиппа и В. В. Петрова нарушаются. Там же содержатся применения к некоторым динамическим системам.

Ясно, что важным примером функции $g(x)$ в условии (6) является $x^{1+\gamma}$, $\gamma \in [0,1)$. Случай $\gamma = 0$ соответствует результату В. В. Петрова. При $\gamma > 0$ условие (6) слабее условия (4), но нормировка становится более тяжелой, чем (5). Естественно теперь взять $\gamma \in (-1,0)$ и посмотреть, как уменьшится нормировка $B_n$ в этом случае по сравнению с нормировкой (5). Решению этой задачи и посвящена настоящая статья. Разумеется, мы не ограничимся степенной функцией $g(x)$, а будем рассматривать некоторый класс функций, растущих медленнее, чем $x$.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. Во втором параграфе мы сформулируем наши результаты, обсудим их и приведем соответствующие примеры. Доказательства мы вынесем в третий параграф.

**2. Результаты и примеры.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $E\xi$ и $D\xi$ обозначают соответственно среднее и дисперсию случайной величины $\xi$. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность событий, а $S_n$ и $E_n$ определены соотношением (1).

Сформулируем наш первый результат.

**Теорема 1.** *Пусть $\psi(x)$ и $g(x)$, $x \geqslant 0$, — неубывающие положительные функции такие, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/(n\psi(n))$ сходится, $g(0) = 0$, $g(x)$ выпукла вверх и $g(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Положим*

$$b(x) = x \int\limits_1^x \frac{g(u)}{u^2} du$$

*для всех $x > 1$.*

*Пусть $E_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и неравенства*

$$D(S_m - S_n) \leqslant g\left(E_m - E_n\right) \tag{7}$$

*выполнены для всех $m > n$ и всех достаточно больших $n$.*

*Тогда*

$$S_n = E_n + o\left(B_n\right) \quad \textit{п. н.} \tag{8}$$

*при $n \to \infty$, где $B_n = \sqrt{b(E_n)\psi(\ln E_n)}\ln E_n$.*

Если $g(x) = x$, то $b(x) = x\ln x$ и теорема 1 превращается в результат В. В. Петрова, приведенный выше. При выполнении условия (7), более жесткого, чем условие (4), нормировка в (8) может быть меньше, чем нормировка (5). Действительно, если $g(x) = x^\tau$, $\tau \in (0,1)$, то $b(x) \sim C_1 x$ при $x \to \infty$ и можно положить

$$B_n = \sqrt{E_n \psi(\ln E_n)} \ln E_n. \tag{9}$$

Так как мы рассматриваем сходимость к нулю, мы, естественно, отбрасываем постоянные множители в нормировках. Далее мы это специально оговаривать не будем.

Другой интересный частный случай соответствует $g(x) \sim x/\ln x$ при $x \to \infty$. (Функция $x/\ln x$ не удовлетворяет условию теоремы 1, но ниже мы приведем функцию, соответствующую этому случаю.) Здесь $b(x) \sim x \ln\ln x$ при $x \to \infty$ и

$$B_n = \sqrt{E_n \ln\ln E_n \psi(\ln E_n)} \ln E_n. \tag{10}$$

Эта нормировка тяжелее, чем (9), но она все равно лучше, чем (5).

Следующий результат позволяет строить примеры последовательностей событий, удовлетворяющих условиям теоремы 1. В частности, с его помощью мы покажем, что нормировки (9) и (10) действительно могут появляться.

**Лемма 2.** *Пусть функция $f(x)$ определена, выпукла вверх и дважды непрерывно дифференцируема для всех $x \geqslant 0$. Пусть $f(0) = 0$, $f(x) \to \infty$ и $f(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Предположим, что $f'(1) \leqslant 1$ и $\int\limits_0^1 f'(x)dx < \infty$.*

*Пусть $\{A_n\}$ — последовательность попарно независимых событий таких, что $p_n = P(A_n) = 1 - f'(n)$ для всех $n$.*

*Тогда условие (7) выполнено с $g(x) = C_2 f(x)$, где $C_2$ — некоторая положительная постоянная.*

Используя лемму 2, построим два примера, соответствующих двум упомянутым выше случаям $g(x)$.

**Пример 1.** В лемме 2 положим $f(x) = x^{1-\beta}$, $\beta \in (0,1)$. Тогда $p_n = 1-(1-\beta)n^{-\beta}$, $DS_n \sim C_3 n^{1-\beta}$ и $E_n \sim n$ при $n \to \infty$. В этом случае $b(x) \sim C_4 x$ при $x \to \infty$ и $B_n$ можно определить соотношением (9).

**Пример 2.** В лемме 2 положим $f(x) = \frac{x+e^2}{\ln(x+e^2)} - \frac{e^2}{2} \sim x/\ln x$ при $x \to \infty$. Тогда $p_n = 1 - \frac{\ln(n+e^2)-1}{\ln^2(n+e^2)}$, $DS_n \sim C_5 n/\ln n$ и $E_n \sim n$ при $n \to \infty$. Здесь $b(x) \sim C_6 x \ln\ln x$ при $x \to \infty$ и $B_n$ можно задать формулой (10).

Если предположить дополнительно, что события $\{A_n\}$ независимы, то в силу теоремы Колмогорова о законе повторного логарифма имеем

$$S_n - E_n = O(\sqrt{DS_n \ln\ln DS_n}) \quad \text{п. н.}$$

при $n \to \infty$. При этом для $B_n$ из (9) и (10) выполняются соответственно соотношения

$$B_n \sim C_7 \sqrt{(DS_n)^{1/(1-\beta)} \psi(\ln DS_n)} \ln DS_n$$

и

$$B_n \sim C_8 \sqrt{DS_n (\ln\ln DS_n) \psi(\ln DS_n)} (\ln DS_n)^{3/2}$$

при $n \to \infty$. Мы видим, что степень дисперсии в $B_n$ соответствует закону повторного логарифма во втором случае. В первом случае результат хуже. Однако в теореме 1 независимость не предполагается и нормировки лучше, чем в более ранних результатах.

Сформулируем теперь результат, в котором условия накладываются не на дисперсии сумм индикаторов, а на сами вероятности рассматриваемых событий.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условия* (7). *Пусть*

$$P(A_iA_j) \leqslant P(A_i)P(A_j) + b_{j-i}P(A_i)(1-P(A_i)) \tag{11}$$

*для всех* $i > j$, *где* $\{b_n\}$ *— последовательность чисел такая, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

*Пусть* $\sum\limits_{i=n+1}^{m} P(A_i)(1-P(A_i)) \leqslant g(E_m - E_n)$ *для всех* $m > n$ *и всех достаточно больших* $n$.

*Тогда выполняется соотношение* (8) *с* $B_n$ *из теоремы 1.*

Условие (11) является более жестким аналогом условия В. Филиппа (3), но и соотношение (8) лучше результата В. Филиппа, приведенного выше. Условие (11), разумеется, выполнено для попарно независимых событий. Фактически условие (11) представляет собой ограничение сверху на скорость роста ковариаций индикаторов событий по мере увеличения разницы их номеров. Подобные условия естественны для последовательностей зависимых событий.

**3. Доказательства.** В доказательстве теоремы 1 используется метод из работы В. Филиппа [8], основанный на предложенной В. Шмидтом (W. Schmidt) [11] модификации метода Радемахера. Этот же метод использовали В. В. Петров [9] и А. Н. Фролов [10]. Приводимое ниже доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из работы автора [10].

Доказательство теоремы 1. Для всех $m > n$ обозначим

$$S(n,m) = S_m - S_n, \quad E(n,m) = E_m - E_n, \quad \tilde{S}(n,m) = S(n,m) - E(n,m). \tag{12}$$

Положим $n_k = \max\{n : E_n < k\}$ для всех целых $k \geqslant 0$.

Пусть $r$ и $s$ — целые числа такие, что $r \geqslant 1$ и $0 \leqslant s \leqslant r$. Тогда для любого фиксированного $s$ мы имеем

$$\sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} E\left(n_{t2^s}, n_{(t+1)2^s}\right) \leqslant E_{n_{2^r}} < 2^r. \tag{13}$$

Обозначим

$$T_r = \sum_{s=0}^{r} \sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} \left(\tilde{S}\left(n_{t2^s}, n_{(t+1)2^s}\right)\right)^2.$$

Используя неравенства (7), мы получим

$$ET_r = \sum_{s=0}^{r} \sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} ES^2\left(n_{t2^s}, n_{(t+1)2^s}\right) \leqslant \sum_{s=0}^{r} \sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} g\left(E\left(n_{t2^s}, n_{(t+1)2^s}\right)\right).$$

В силу выпуклости вверх функции $g(x)$ и (13) выполняются неравенства

$$\sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} g\left(E\left(n_{t2^s}, n_{(t+1)2^s}\right)\right) \leqslant 2^{r-s} g\left(2^{-r+s} \sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} E\left(n_{t2^s}, n_{(t+1)2^s}\right)\right) \leqslant 2^{r-s} g\left(2^s\right).$$

Следовательно,

$$ET_r \leqslant \sum_{s=0}^{r} 2^{r-s} g(2^s) \leqslant 2^{r+1} \sum_{s=0}^{r} \int\limits_{s}^{s+1} 2^{-x} g(2^x) dx = 2^{r+1} \int\limits_{0}^{r+1} 2^{-x} g(2^x) dx =$$

$$= \frac{2^{r+1}}{\ln 2} \int\limits_{1}^{2^{r+1}} \frac{g(u)}{u^2} du = \frac{b(2^{r+1})}{\ln 2}.$$

Используя интегральный критерий сходимости рядов, несложно проверить, что $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\psi(cn)) < \infty$ для любого фиксированного $c > 0$. Возьмем $c = (\ln 2)/2$.

Мы имеем

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{ET_r}{rb(2^{r+1})\psi(cr)} \leqslant C_9 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r\psi(cr)} < \infty.$$

Поэтому

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{T_r}{rb(2^{r+1})\psi(cr)} < \infty \quad \text{и} \quad \frac{T_r}{rb(2^{r+1})\psi(cr)} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty \quad \text{п. н.}$$

Возьмем целое $k$ такое, что $2^{r-1} < k \leqslant 2^r$. По неравенству Коши — Буняковского из последнего соотношения следует, что

$$(S_{n_k} - E_{n_k})^2 \leqslant (r+1) \left(\sum_{j=0}^{r-1} \left(\tilde{S}(n_{2^{j-1}}, n_{2^j})\right)^2 + \left(\tilde{S}(n_{2^{r-1}}, n_k)\right)^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant (r+1)T_r = o\left(r^2 b(2^{r+1})\psi(cr)\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty \quad \text{п. н.}$$

Мы имеем $2^{r-1} \leqslant k-1 \leqslant E_{n_k+1} - 1 = E_{n_k} + P(A_{n_k+1}) - 1 \leqslant E_{n_k}$. Следовательно,

$$r^2 b(2^{r+1})\psi(cr) \leqslant \left(\frac{\ln E_{n_k}}{\ln 2}\right)^2 b\left(4E_{n_k}\right) \psi\left(\frac{\ln E_{n_k}}{2}\right).$$

Если интеграл в определении функции $b(x)$ стремится к конечному пределу при $x \to \infty$, то $b\left(4E_{n_k}\right) \leqslant 5b\left(E_{n_k}\right)$ для всех достаточно больших $r$. Если вышеупомянутый интеграл стремится к бесконечности при $x \to \infty$, то, делая замену $u = 4v$, мы получим

$$b(4x) = 4x \int\limits_{1}^{4x} \frac{g(u)}{u^2} du = x \int\limits_{1/4}^{x} \frac{g(4v)}{v^2} dv \leqslant 4x \int\limits_{1/4}^{x} \frac{g(v)}{v^2} dv = 4b(x)(1 + o(1))$$

при $x \to \infty$. В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что для выпуклой вверх функции $g(x)$, удовлетворяющей условию $g(x) = 0$, неравенство $g(cx) \leqslant cg(x)$ выполнено для любого $c > 1$. Следовательно, $b\left(4E_{n_k}\right) \leqslant 5b\left(E_{n_k}\right)$ для всех достаточно больших $r$. Поэтому

$$r^2 b(2^{r+1})\psi(cr) \leqslant 5\left(\frac{\ln E_{n_k}}{\ln 2}\right)^2 b\left(E_{n_k}\right)\psi\left(\frac{\ln E_{n_k}}{2}\right)$$

для всех достаточно больших $r$. Отсюда следует соотношение (8) для $n = n_k$.

Определим $B'_n$ по формуле для $B_n$ с заменой $\psi(x)$ на $\psi(x/2)$. Выше мы доказали, что соотношение (8) выполнено также с $B'_n$ вместо $B_n$ для $n = n_k$. Ниже мы этим воспользуемся.

Для $n$ таких, что $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, мы имеем $S_{n_k} \leqslant S_n < S_{n_{k+1}}$ и $E_{n_k} \leqslant E_n < E_{n_{k+1}}$. По определению $n_k$ мы получим $E_{n_{k+1}} < k+1 \leqslant E_{n_k} + 2$. Следовательно, $b(E_{n_{k+1}}) \leqslant b(E_n + 2) \leqslant b(4E_n) \leqslant 5b(E_n)$ для всех достаточно больших $k$. Кроме того, $\psi((\ln E_{n_{k+1}})/2) \leqslant \psi((\ln(E_n+2)/2) \leqslant \psi(\ln E_n)$ для всех достаточно больших $k$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ неравенства

$$S_n - E_n \leqslant S_{n_{k+1}} - E_{n_k} \leqslant S_{n_{k+1}} - E_{n_{k+1}} + 2 \leqslant \varepsilon B'_{n_{k+1}} \leqslant \sqrt{5}\varepsilon B_n \quad \text{п. н.}$$

и

$$S_n - E_n \geqslant S_{n_k} - E_{n_{k+1}} \geqslant S_{n_k} - E_{n_k} - 2 \geqslant -\varepsilon B'_{n_k} \geqslant -\varepsilon B_n \quad \text{п. н.}$$

выполнены для всех достаточно больших $n$. Отсюда следует соотношение (8). $\square$

Перейдем к доказательству леммы 2.

Доказательство леммы 2. Так как $f'(x)$ не возрастает, мы имеем

$$D(S_m - S_n) = \sum_{k=n+1}^{m} p_k(1-p_k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} f'(k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \int_{k-1}^{k} f'(x)dx = \int_{n}^{m} f'(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{m-n} f'(x+n)dx \leqslant \int_{0}^{m-n} f'(x)dx = f(n-m).$$

Здесь мы также воспользовались тем, что последний интеграл сходится. Кроме того, из последней оценки мы получим

$$E_m - E_n = \sum_{k=n+1}^{m} p_k \geqslant m - n - f(n-m).$$

Из условия $f(x) = o(x)$ при $x \to \infty$ вытекает существование натурального $N$ такого, что $f(m-n) \leqslant (n-m)/2$ при $n - m \geqslant N$. Следовательно, $E_m - E_n \geqslant (m-n)/2$ при $n - m \geqslant N$. Учитывая выпуклость вверх функции $f(x)$ и $f(x) = 0$, мы заключаем, что неравенство $f(cx) \leqslant cf(x)$ выполнено для всех $c > 1$. Поэтому

$$D(S_m - S_n) \leqslant f\left(2(E_m - E_n)\right) \leqslant 2f\left(E_m - E_n\right)$$

при $n - m \geqslant N$.

Если $m-n<N$, то $D(S_m-S_n)\leqslant f(N)$. Если $n>1$, то $f(E_m-E_n)\geqslant f(p_{n+1})\geqslant f(p_2)>0$. Следовательно, $D(S_m-S_n)\leqslant f(N)f(E_m-E_n)/f(p_2)$. Поэтому условие (7) выполнено с $g(x)=C_{10}f(x)$, где $C_{10}=\max\{2,f(N)/f(p_2)\}$. □

Докажем теперь теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Мы имеем

$$D(S_m-S_n)=\sum_{i=n+1}^{m}P(A_i)(1-P(A_i))+2\sum_{n<i<j\leqslant m}(P(A_iA_j)-P(A_i)P(A_j))\leqslant$$

$$\leqslant g(E_m-E_n)+2\sum_{n<i<j\leqslant m}b_{j-i}P(A_i)(1-P(A_i))\leqslant$$

$$\leqslant g(E_m-E_n)+2\sum_{i=n+1}^{m}P(A_i)(1-P(A_i))\sum_{j=i+1}^{m}b_{j-i}\leqslant g(E_m-E_n)\left(1+2\sum_{j=1}^{\infty}b_j\right).$$

Следовательно, выполнено условие (7). По теореме 1 мы получаем требуемое. □

**Литература**


1. Chung K. L., Erdős P. On the application of the Borel — Cantelli lemma. *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**, 179–186 (1952).

2. Erdős P., Rényi A. On Cantor's series with convergent $\sum 1/q$. *Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Math.* **2**, 93–109 (1959).

3. Spitzer F. *Principles of random walk*. Princeton, Van Nostrand (1964).

4. Móri T. F., Székely G. J. On the Erdős — Rényi generalization of the Borel — Cantelli lemma. *Studia Sci. Math. Hungar.* **18**, 173–182 (1983).

5. Petrov V. V. A note on the Borel — Cantelli lemma. *Statist. Probab. Lett.* **58**, 283–286 (2002). https://doi.org/10.1016/S0167-7152(02)00113-X

6. Frolov A. N. Bounds for probabilities of unions of events and the Borel — Cantelli lemma. *Statist. Probab. Lett.* **82**, 2189–2197 (2012). https://doi.org/10.1016/j.spl.2012.08.002

7. Frolov A. N. On lower and upper bounds for probabilities of unions and the Borel — Cantelli lemma. *Studia Sci. Math. Hungarica* **52** (1), 102–128 (2015). https://doi.org/10.1556/SScMath.52.2015.1.1304

8. Phillipp W. Some metrical theorems in number theory. *Pacific J. Math.* **20**, 109–127 (1967).

9. Петров В. В. О росте сумм индикаторов событий. *Записки научных семинаров ПОМИ* **298**, 150–154 (2003).

10. Frolov A. N. On strong forms of the Borel — Cantelli lemma and intermittent interval maps. *J. Math. Analysis Appl.* **504** (2), 125425 (2021). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125425

11. Schmidt W. Metrical theorems on fractional parts of sequences. *Trans. Amer. Math. Soc.* **110**, 493–518 (1964).



Статья поступила в редакцию 18 июля 2021 г.;
доработана 8 августа 2021 г.;
рекомендована к печати 2 сентября 2021 г.



Контактная информация:

*Фролов Андрей Николаевич* — д-р физ.-мат. наук, проф.; Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

## On a strong form of the Borel — Cantelli lemma

*A. N. Frolov*

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Frolov A. N. On a strong form of the Borel — Cantelli lemma. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 1, pp. 85–93. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.109 (In Russian)

The strong form of the Borel — Cantelli lemma is a variant of the strong law of large numbers for sums of the indicators of events. These sums are centered at the mean and normalized by some function from sums of probabilities of events. The series from probabilities is assumed to be divergent. In this paper, we derive new strong forms of the Borel — Cantelli lemma with smaller normalizing sequences than it was before. Conditions on variations of increments of indicators become stronger. We give examples in which these conditions hold.

*Keywords*: the Borel — Cantelli lemma, the quantitative Borel — Cantelli lemma, strong forms of the Borel — Cantelli lemma, suns of indicators of events, strong law of large numbers, almost surely convergence.

### References

1. Chung K. L., Erdős P. On the application of the Borel — Cantelli lemma. *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**, 179–186 (1952).

2. Erdős P., Rényi A. On Cantor's series with convergent $\sum 1/q$. *Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Math.* **2**, 93–109 (1959).

3. Spitzer F. *Principles of random walk*. Princeton, Van Nostrand (1964).

4. Móri T. F., Székely G. J. On the Erdős — Rényi generalization of the Borel — Cantelli lemma. *Studia Sci. Math. Hungar.* **18**, 173–182 (1983).

5. Petrov V. V. A note on the Borel — Cantelli lemma. *Statist. Probab. Lett.* **58**, 283–286 (2002). https://doi.org/10.1016/S0167-7152(02)00113-X

6. Frolov A. N. Bounds for probabilities of unions of events and the Borel — Cantelli lemma. *Statist. Probab. Lett.* **82**, 2189–2197 (2012). https://doi.org/10.1016/j.spl.2012.08.002

7. Frolov A. N. On lower and upper bounds for probabilities of unions and the Borel — Cantelli lemma. *Studia Sci. Math. Hungarica* **52** (1), 102–128 (2015). https://doi.org/10.1556/SScMath.52.2015.1.1304

8. Phillipp W. Some metrical theorems in number theory. *Pacific J. Math.* **20**, 109–127 (1967).

9. Petrov V. V. On the growth of sums of the indicators of events. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* **298**, 150–154 (2003). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **128**, 2578–2580 (2005). https://doi.org/10.1007/s10958-005-0205-0].

10. Frolov A. N. On strong forms of the Borel — Cantelli lemma and intermittent interval maps. *J. Math. Analysis Appl.* **504** (2), 125425 (2021). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125425

11. Schmidt W. Metrical theorems on fractional parts of sequences. *Trans. Amer. Math. Soc.* **110**, 493–518 (1964).

Received: July 18, 2021
Revised: August 8, 2021
Accepted: September 2, 2021

Author's information:

*Andrei N. Frolov* — Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru