

## Об одном способе построения компьютерной модели динамики систем твердых тел\*

*И. И. Косенко*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4

**Для цитирования:** *Косенко И. И.* Об одном способе построения компьютерной модели динамики систем твердых тел // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 1. С. 126–134.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.112>

Рассматривается технология объектно-ориентированного моделирования, применяемая в случае создания динамических виртуальных прототипов систем тел. Описывается общий подход создания модели, основанный на мультипортовом представлении моделируемой механической системы. Объектно-ориентированная парадигма при этом оказалась идеальным инструментом при построении сложных моделей, отличающихся, в частности, большой или очень большой размерностью. Рассмотрены примеры реализации компьютерных моделей динамики систем тел из различных разделов динамики машин.

*Ключевые слова:* объектно-ориентированное моделирование, динамика экипажа, динамика качения диска на плоскости, динамика колесной пары, шарнирные связи, сервосвязи, скейтборд, неголономные связи, модели контактирования, динамическая верификация.

**1. Введение.** Инженерный анализ динамики сложных механических систем, состоящих, в общем случае, из большого числа твердых и/или упругих тел, требует эффективных методов построения виртуальных прототипов таких систем. Для этого можно использовать различные подходы аналитического построения систем динамических уравнений, учитывающих специфику формализуемых процессов. Наиболее общий подход, как известно, основан на применении систем дифференциальных уравнений Ньютона — Эйлера и различных их модификаций, отражающих особенности связей и/или контроллеров, включенных в модель динамики системы.

В последнем случае мы имеем дело с так называемым физически-ориентированным подходом к построению виртуальных прототипов инженерных систем [1, 2]. При этом в случае построения моделей динамики механических систем основными абстракциями, соответствующими физическим сущностям моделей динамики систем тел, являются: а) «твердое тело»; б) «механическая связь». Случаю а) соответствует базовый класс, включающий в себя описание динамики твердого тела при помощи уже упоминавшейся системы обыкновенных дифференциальных уравнений Ньютона — Эйлера. В случае б) базовый класс абстракции механической связи содержит только уравнения, задающие третий закон динамики для пары взаимодей-

---

\*Работа выполнена в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

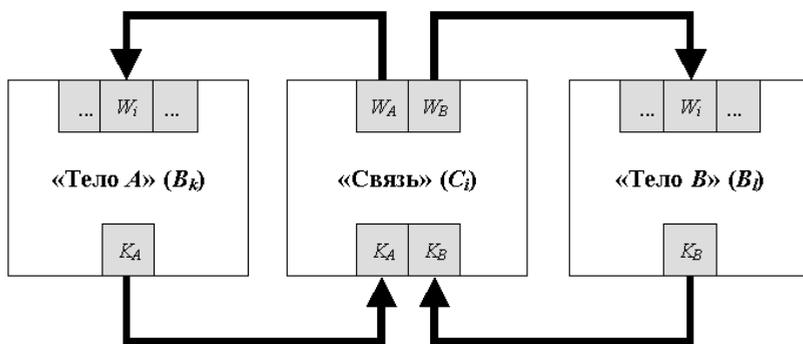
© Санкт-Петербургский государственный университет, 2022

ствующих тел. Другие методики инженерной интерпретации динамики систем тел можно найти, например, в [3, 4].

**2. Общее описание.** Итак, любая модель динамики системы тел должна включать в себя «население» из объектов только двух классов: моделей тел и моделей связей. Общий формализм обычно отображается в виде неориентированного графа следующего вида. Пусть механическая система составлена из  $m + 1$  тела  $B_0, \dots, B_m$ . Представим ее в виде набора  $\mathcal{B} = \{B_0, \dots, B_m\}$ . Здесь  $B_0$  считается базовым телом, с которым связана инерциальная система координат или движение которого по отношению к инерциальной системе известно. Это может быть, например, вращающаяся платформа или корпус экипажа, движущегося по заданному закону.

Тела считаются связанными механически, хотя в общем случае это необязательно. Все имеющиеся связи образуют набор  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ . Допускаются голономные/неголономные, склерономные/реономные, удерживающие/неудерживающие связи. Таким образом, структуру механической системы можно однозначно представить в виде неориентированного графа  $G = (\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{I})$ , где  $\mathcal{I} \subset \mathcal{C} \times \mathcal{B}$  — отношение инцидентности, ставящее в соответствие каждому ребру графа  $C_i \in \mathcal{C}$  инцидентную ему вершину. Ясно, что таких вершин, соответствующих твердым телам, связанных между собой при помощи механического ограничения  $C_i$ , будет в точности две:  $B_k, B_l \in \mathcal{B}$ . Отношение инцидентности порождает в графе отношение смежности  $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}^2$  на множестве вершин.

При рассмотренном подходе следующим естественным шагом является формирование на основе графа инцидентности при помощи абстракций «твердое тело» и «механическая связь» коммуникационной сети с использованием формализмов мультипортового представления системы обмена сигналами между объектами модели. Объект порта обеспечивает импорт/экспорт сигналов в объект/из объекта динамической модели. Коммуникационная сеть, соответствующая отдельному объекту связи и двум объектам взаимодействующих при помощи этой связи тел, показана на рисунке.



Механическая связь как коммуникационная сеть.

Таких «контуров» взаимодействия объектов тел и связей должно быть во всей модели столько, сколько механических связей предусматривается в моделируемой механической системе. Таким образом, весь виртуальный прототип представляется в виде коммуникационной сети достаточно большого размера. На самом деле термин «коммуникационная сеть» является здесь метафорой. Рассмотрим в том же, ме-

тафорическом, смысле характер взаимодействия объектов, формирующих модель отдельной механической связи.

Соединительные информационные каналы между объектами упомянутых классов «твердое тело» и «механическая связь» также могут быть типизированы при помощи (информационных) портов двух классов: «силовой порт», «кинематический порт». «Силовой порт» предназначен для передачи вектора силы и вектора момента пары сил. Кроме этого, через такой порт следует также передавать информацию о текущем положении точки приложения силы. В нашей идеализированной модели силовое взаимодействие между телами происходит в геометрической точке, координаты которой передаются в коммуникационную сеть через силовой порт.

«Кинематический порт» предназначен для передачи данных о кинематике твердого тела: конфигурации (положение центра масс, ориентация тела), скорости (скорость центра масс, угловая скорость), ускорении (ускорение центра масс, угловое ускорение).

Объекты класса «твердое тело», получая силовую информацию, передаваемую в них через силовые порты  $W_i$  от соответствующих объектов класса «механическая связь», вырабатывают (при помощи интегратора) кинематическую информацию, подаваемую на свои выходные порты  $K_A, K_B$ . С другой стороны, каждый объект класса «механическая связь» получает через два своих входных порта  $K_A, K_B$  кинематические данные от связанных тел (см. рисунок). Одновременно этот объект при помощи системы алгебраических уравнений вырабатывает силовую информацию, подаваемую на выходные порты  $W_A, W_B$  к объектам связанных тел. В соответствии с типизацией коммуникационных портов линии связи между объектами можно также классифицировать на два типа соединительных «кабелей»: а) для передачи силовой информации, б) для передачи кинематической информации.

Таким образом, суперкласс нашей библиотеки, идентифицированный именем «твердое тело», инкапсулирует динамику твердого тела, задаваемую при помощи дифференциальных уравнений Ньютона для центра масс тела и дифференциальных уравнений Эйлера для вращения вокруг него. Уравнения Эйлера конструируются с использованием алгебры кватернионов [5] следующим образом:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/2 \circ [0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3]^T, \quad \dot{\Omega} + [\Omega, I\Omega] = \mathbf{N}.$$

Здесь первое уравнение является кинематическим, а второе — динамическим для описания динамики твердого тела. Кватернион  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T \in \mathbf{H} \simeq \mathbf{R}^4$  однозначно определяет матрицу  $R$  поворота твердого тела. Алгебра кватернионов  $\mathbf{H}$  рассматривается как линейное пространство  $\mathbf{R}^4$ , а бинарная операция  $\circ$  обозначает умножение кватернионов. Матрица тензора инерции  $I$ , вектор угловой скорости  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T \in \mathbf{R}^3$  и вектор главного момента  $\mathbf{N}$  рассматриваются относительно главных центральных осей инерции тела. Таким образом, перед экспортированием кинематических данных из объекта класса «твердое тело» необходимо выполнить преобразование  $\omega = R\Omega$ . Аналогично главный момент после импортирования в объект класса «твердое тело» и перед использованием в секции поведения этого объекта должен быть преобразован как  $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{N}$  в соответствии с формулой  $\mathbf{N} = R^T \mathbf{M}$ .

Если для разработки модели динамики системы тел используется концепция мультипорта, то наиболее трудной проблемой в процессе разработки представляется проектирование иерархии классов для объектов связи/контакта. Корневым в дереве такой иерархии является суперкласс «механическая связь». В соответствии

с третьим законом динамики этот суперкласс в своей секции поведения должен содержать уравнения вида

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_B = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где векторы представляют собой реакции и моменты реакций, действующие «в направлении» взаимодействующих тел (тел А и В в нашем случае) соответственно. Кинематические уравнения для связей различных типов должны добавляться к уравнениям последней системы в соответствующих классах-наследниках, моделирующих конкретный тип механической связи. Концепция мультипорта хорошо известна (см. [6–8]).

**3. Пример снейкборда.** Снейкборд [9] представляет собой четырехколесный экипаж, движущийся в поле сил тяжести по горизонтальной плоскости при помощи сервоуправления относительным вращением колесных пар и маховика, расположенного в середине кроссбара (перемычки снейкборда) и имеющего вертикальную ось вращения. Маховик имитирует туловище снейкбордиста. Модель экипажа строится иерархически. При этом шаг за шагом детали собираются в сборочные единицы.

На первом этапе рассматривается модель качения диска по горизонтальной плоскости. Верификация этой модели основана на ее сравнении с соответствующей классической задачей [10]. Ее тестовые прогоны показали высокую степень согласия с результатами численного интегрирования классических уравнений качения диска.

На следующем этапе строится композиция, состоящая из дисков, вала и плоскости, по которой диски могут катиться. Это модель колесной пары. Она играет важную роль при конструировании моделей простейших экипажей. Жесткое, неподатливое соединение колес и вала оси колесной пары невозможно (в компьютерной модели) в силу статической неопределенности вдоль оси вала. Сохраняя неголономную связь в контакте колес и пола в виде удерживающей связи, можно естественным образом преодолеть вырождение, связанное со статической неопределенностью, при помощи добавления податливости в шарнирах вдоль оси колесной пары.

Компьютерная модель колесной пары также была проверена на соответствие ее математическому аналогу, построенному без учета податливостей в шарнирах при помощи уравнений поступательно-вращательного движения отдельных твердых тел, составляющих всю систему. Вычислительные эксперименты показали высокую степень согласия между нашей «физически-ориентированной» и идеальной моделями.

Если кроссбар считать твердым телом, то аналогично случаю колесной пары вдоль оси кроссбара будет иметь место статическая неопределенность. Для избежания этого вырождения кроссбар был разделен на два твердых тела, соединенных при помощи вязкоупругого шарнира, ориентированного вдоль его оси.

Для выполнения сравнения поведения построенной модели с известными результатами [9] в нее были введены три сервосвязи, имитирующие управление снейкбордом со стороны робота-снейкбордиста. Результаты моделирования показали полное совпадение типов поведения представляемой здесь регуляризованной и идеальной, взятой из работы [9], моделей.

**4. Пример скейтборда.** Скейтборд представляет собой доску, движением которой можно управлять, наклоняя доску влево или вправо от вектора скорости его средней точки. Известно [11], что прямолинейные движения такого экипажа обладают свойством устойчивости или неустойчивости в зависимости от расположения райдера. Динамическая модель данной механической системы была реализована на

языке Modelica. Вычислительные эксперименты показали полную идентичность поведения экипажа с предсказанными аналитически свойствами.

**5. Пример волчка тип-топ.** В рамках контактной задачи Герца строится приближенная модель вычисления результирующего винта касательных в контакте сил сухого трения. Винт состоит из суммарной силы трения и момента (пары сил) трения верчения. Рассматриваемый подход естественным образом завершает разработку компьютерной модели упругого контакта, развитой ранее в [12]. В модели предполагается, что распределение нормального давления по контактной площадке подчиняется закону Герца, в то время как касательные силы на элементарном уровне удовлетворяют кулоновскому закону сухого трения.

Силы сухого трения и момент этих сил интегрируются по эллиптическому пятну контакта, образуя результирующий винт [13, 14]. В общем случае аналитическое вычисление упомянутых интегралов приводит к громоздким выражениям, составленным из десятков слагаемых, являющихся рациональными функциями, зависящими, в свою очередь, от полных эллиптических интегралов с модулем — эксцентриситетом контактного пятна. Для реализации достаточно быстрой компьютерной модели касательных сил проводится приближенное построение в направлении, предложенном еще Контенсу (P. Contensou) [13].

Для верификации построенной модели использовались результаты, полученные в [13, 15, 16]. Аналитические и численные формулы из [13, 15] применялись для контроля правильности работы алгоритма вычисления силового винта сил трения. В качестве тестового динамического примера рассматривалась модель волчка тип-топ, описанная в [16]. Оказалось, что процесс «переворота» волчка на сферу меньшего радиуса («голову»), численно смоделированный в [16] при помощи подхода, основанного на применении техники многозначных отображений, практически совпадает с численной верификацией представляемой здесь модели.

**6. Пример шарикоподшипника.** Динамическая модель шарикоподшипника, реализованная в [12], использовалась затем для детального сравнительного тестирования различных подходов к вычислительной реализации касательных сил. Объекты модели [12] упругих контактов между шариками подшипника и его внутренним и внешним кольцами, основанные на законе Кулона касательных сил точечного контакта, были заменены с учетом упоминаемого здесь упрощенного подхода. К примеру, оказалось, что упрощенные формулы подхода Контенсу обеспечивают скорость моделирования большую, чем даже в модели точечного контакта. Это объясняется тем, что: а) требующиеся в расчете эллиптические интегралы уже вычислены при построении вектора нормальных сил в соответствии с законом Герца и не требуют дополнительных вычислительных ресурсов; б) наклон графика зависимости силы трения от скорости в окрестности нуля здесь значительно (на порядки) меньше соответствующего наклона в регуляризованном законе Кулона, что снизило жесткость задачи и повысило скорость вычислений.

В численных экспериментах была использована модель шарикоподшипника, включающего восемь шариков (или 16 пятен контакта шариков и колец).

**7. Пример динамики прямозубого эвольвентного зацепления.** Компьютерное моделирование динамики редукторов различной конструкции является достаточно широко распространенной задачей в технике. Здесь можно выделить два крайних полюса подходов к построению моделей. Во-первых, для построения доста-

точно подробных динамических моделей можно использовать метод конечных элементов. При этом будет получаться максимально детальная динамическая картина реализации зубчатых зацеплений того или иного типа. Ясно также, что для работы моделей, построенных на основе такого подхода, требуется весьма значительный вычислительный ресурс.

Во-вторых, на противоположном полюсе можно обнаружить упрощенные модели редукторов, позволяющие строить исключительно быстродействующие прототипы машин и агрегатов. Образцы подобных моделей мы можем найти, например, в Стандартной библиотеке языка Modelica [17]. Кроме того, имеются также примеры построения на языке Modelica моделей редукторов с достаточно хорошо проработанным динамическим описанием свойств этих устройств и учетом влияния сил трения на характер протекающих в зубчатых зацеплениях процессов [18].

Представляется интересным рассмотреть более детально модель процесса контактирования в зубчатых зацеплениях, с одной стороны, применяя различные модели податливого контакта, с другой стороны, оставаясь в рамках динамики систем твердых тел, что позволяет рассчитывать на относительно высокую вычислительную эффективность. Простейшей задачей в этом направлении можно считать моделирование на языке Modelica прямозубого эвольвентного зацепления. В данном случае мы применяем контактную модель Джонсона.

**8. Пример экипажа с омни-колесами.** Омни-колесо определяется как колесо, вдоль обода которого располагаются ролики. Соответственно экипаж, оснащенный омни-колесами, называется омни-экипажем [19]. Здесь мы представляем пошаговую реализацию разработки динамической модели системы тел, составляющих омни-экипаж. Предполагается, что на ролик может быть наложена неудерживающая связь — твердотельный контакт с горизонтальной плоскостью. Оказывается, в упомянутых условиях возможно применение упрощенного и эффективного алгоритма отслеживания контакта. Динамические свойства результирующей модели экипажа иллюстрируют процесс безударного замещения роликов в контакте при вращении колес.

Подводя итоги краткому обзору примеров, отметим, что несомненный интерес представляют построение динамических моделей [20] микромеханических устройств и их верификация.

## Литература

1. Kosenko I. I., Gerasimov K. V. Physically-oriented modeling and simulation of the omni vehicle dynamics. *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Joint International Conference on Multibody System Dynamics and the 7<sup>th</sup> Asian Conference on Multibody Dynamics*, June 30 — July 3, 2014, BEXCO, Busan, Korea (2014).
2. Косенко И. И. Графовые представления моделей динамики систем тел. *Математическое моделирование* **21** (9), 80–88 (2009).
3. Wittenburg J. *Dynamics of multibody systems*. Berlin, Springer-Verlag (2008).
4. Шилен В., Эберхард П. *Прикладная динамика. Численное моделирование механических систем в машиностроении*. Москва, Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований (2018).
5. Кирпичников С. Н., Новоселов В. С. *Математические аспекты кинематики твердого тела*. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1986).
6. *Modelica — A unified object-oriented language for physical systems modeling*. Tutorial. Modelica Association (2000).

7. Stramigioli S., Blankenstein G., Duindam V., Bruyninckx H., Melchiorri C. *Power port concepts in robotics. The geometrical-physical approach*. Tutorial at 2003 IEEE International conference on robotics and automation. IEEE (2003).
8. Cellier F. E. *Continuous system modeling*. New York, Springer-Verlag (1991).
9. Lewis A. D., Ostrowski J. P., Murray R. M., Burdick J. W. Nonholonomic mechanics and locomotion: The snakeboard example. *Proceedings of the IEEE international conference on robotics and automation*, San Diego, May 1994, IEEE, 2391–2400 (1994).
10. Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. Динамика катящегося диска. В сб.: *Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы*. Москва, Ижевск, Институт компьютерных исследований, 99–117 (2002).
11. Kosenko I. I., Kuleshov A. S. Modelica Implementation of the Skateboard Dynamics. *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Modelica Conference*, University of Applied Sciences Bielefeld, Bielefeld, Germany, March 3–4, 2008, 727–734 (2008).
12. Vil'ke V. G., Kosenko I. I., Aleksandrov E. B. On computer implementation of the Hertz elastic contact model and its simplifications. *Regular and Chaotic Dynamics* **14** (6), 693–714 (2009). <https://doi.org/10.1134/S1560354709060070>
13. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка. В кн.: *Проблемы гироскопии*, пер. с франц., 60–77. Москва, Мир (1967).
14. Erimann Th. Theorie und Anwendungen des echten Kugelgetriebes. *Z. angew. Math. Phys.* **5**, 355–388 (1954).
15. Журавлев В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел. *Прикладная математика и механика* **62** (5), 762–767 (1998).
16. Leine R. I., Glocker Ch. A set-valued force law for spatial Coulomb — Contensou friction. *European Journal of Mechanics — A/Solids* **22** (2), 193–216 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(03\)00025-1](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(03)00025-1)
17. Modelica Libraries. Доступно на: <https://modelica.org/libraries.html> (дата обращения: 20.12.2021).
18. Pelchen C., Schweiger C., Otter M. Modeling and simulating the efficiency of gearboxes and of planetary gearboxes. *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Modelica Conference, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V. (DLR)*, Oberpfaffenhofen, Germany, March 18–19, 2002, 257–266 (2002).
19. Kosenko I., Gerasimov K. Object-oriented approach to the construction of an omni vehicle dynamical model. *Journal of Mechanical Science and Technology* **29** (7), 2593–2599 (2015). <https://doi.org/10.1007/s12206-015-0503-5>
20. Лестев М. А., Тихонов А. А. Нелинейные явления в динамике микромеханических гироскопов. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 1, 83–88 (2009).

Статья поступила в редакцию 30 марта 2021 г.;  
доработана 3 августа 2021 г.;  
рекомендована к печати 2 сентября 2021 г.

Контактная информация:

*Косенко Иван Иванович* — д-р физ.-мат. наук, проф.; [kosenkoi@yandex.ru](mailto:kosenkoi@yandex.ru)

## On one way to build up a computer model of the multibody system dynamics\*

*I. I. Kosenko*

Moscow Aviation Institute (National Research University),  
4, Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation

**For citation:** Kosenko I. I. On one way to build up a computer model of the multibody system dynamics. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 1, pp. 126–134. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.112> (In Russian)

---

\*The work was carried out at the Moscow Aviation Institute (National Research University).

A technology of an object-oriented modeling is under consideration. This technology is applied to the cases of the multibody systems virtual prototypes dynamics creating. General approach for creating the models is described. The approach is based on the multiport representation for the mechanical system to be simulated. The object-oriented paradigm turned out to be an efficient tool for constructing complicated models especially for the cases of large or very large dimensions. Several examples of the machines dynamical models from different topics were implemented.

*Keywords:* object-oriented modeling, dynamics of a vehicle, rolling disc on the horizontal plane dynamics, dynamics of the wheelset, joint constraint, servoconstraints, skateboard, non-holonomic constraints, contact models, dynamical verification.

## References

1. Kosenko I. I., Gerasimov K. V. Physically-oriented modeling and simulation of the omni vehicle dynamics. *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Joint International Conference on Multibody System Dynamics and the 7<sup>th</sup> Asian Conference on Multibody Dynamics*, June 30 — July 3, 2014, BEXCO, Busan, Korea (2014).
2. Kosenko I. I. Graph representations of the multibody systems dynamics models. *Matematicheskoe modelirovanie* **21** (9), 80–88 (2009). (In Russian)
3. Wittenburg J. *Dynamics of multibody systems*. Berlin, Springer-Verlag (2008).
4. Shilen W., Eberhard P. *Applied dynamics. Numerical modeling of mechanical systems in mechanical engineering*. Moscow, Izhevsk, NIC Regulynaya i khaoticheskaya dinamika Publ., Institut kompyuternykh issledovaniy Publ. (2018). (In Russian)
5. Kirpichnikov S. N., Novoselov V. S. *Mathematical aspects of rigid body kinematics*. Leningrad, Leningrad Univ. Press (1986). (In Russian)
6. *Modelica — A unified object-oriented language for physical systems modeling. Tutorial*. Modelica Association (2000).
7. Stramigioli S., Blankenstein G., Duindam V., Bruyninckx H., Melchiorri C. *Power port concepts in robotics. The geometrical-physical approach*. Tutorial at 2003 IEEE International conference on robotics and automation. IEEE (2003).
8. Cellier F. E. *Continuous system modeling*. New York, Springer-Verlag (1991).
9. Lewis A. D., Ostrowski J. P., Murray R. M., Burdick J. W. Nonholonomic mechanics and locomotion: The snakeboard example. *Proceedings of the IEEE international conference on robotics and automation*, San Diego, May 1994, IEEE, 2391–2400 (1994).
10. Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Rolling disc dynamics. In: *Nonholonomic dynamical systems. Integrability, chaos, strange attractors*. Moscow, Izhevsk, Institut kompyuternykh issledovaniy Publ., 99–117 (2002). (In Russian)
11. Kosenko I. I., Kuleshov A. S. Modelica Implementation of the Skateboard Dynamics. *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Modelica Conference*, University of Applied Sciences Bielefeld, Bielefeld, Germany, March 3–4, 2008, 727–734 (2008).
12. Vil'ke V. G., Kosenko I. I., Aleksandrov E. B. On computer implementation of the Hertz elastic contact model and its simplifications. *Regular and Chaotic Dynamics* **14** (6), 693–714 (2009). <https://doi.org/10.1134/S1560354709060070>
13. Contensou P. Couplage entre frottement de pivotement et frottement de pivotement dans la théorie de latoupe. In: *Kreiselprobleme Gyrodynamics: IUTAM Symp. Celerina*. Berlin, Springer, 201–216 (1963). [Rus. ed.: Kontensu P. Svjaz' mezhdu treniem skol'zhenija i treniem verchenija i ee uchet v teorii volchka. In: *Problemy giroskopii*. Moscow, Mir Publ., 60–77 (1967)].
14. Erismann Th. Theorie und Anwendungen des echten Kugelgetriebes. *Z. angew. Math. Phys.* **5**, 355–388 (1954).
15. Zhuravlev V. F. The model of dry friction in the problem of the rolling of rigid bodies. *Prikladnaya matematika i mekhanika* **62** (5), 762–767 (1998). (In Russian)
16. Leine R. I., Glocker Ch. A set-valued force law for spatial Coulomb — Contensou friction. *European Journal of Mechanics — A/Solids* **22** (2), 193–216 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(03\)00025-1](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(03)00025-1)
17. Modelica Libraries. Available at: <https://modelica.org/libraries.html> (accessed: December 20, 2021).

18. Pelchen C., Schweiger C., Otter M. Modeling and simulating the efficiency of gearboxes and of planetary gearboxes. *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Modelica Conference, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V. (DLR), Oberpfaffenhofen, Germany, March 18–19, 2002*, 257–266 (2002).

19. Kosenko I., Gerasimov K. Object-oriented approach to the construction of an omni vehicle dynamical model. *Journal of Mechanical Science and Technology* **29** (7), 2593–2599 (2015). <https://doi.org/10.1007/s12206-015-0503-5>

20. Lestev M. A., Tikhonov A. A. Nonlinear phenomena in the dynamics of micromechanical gyroscopes. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 1, 83–88 (2009). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **42** (1), 53–57 (2009). <https://doi.org/10.3103/S1063454109010087>].

Received: March 30, 2021

Revised: August 3, 2021

Accepted: September 2, 2021

Author's information:

*Ivan I. Kosenko* — [kosenkoi@yandex.ru](mailto:kosenkoi@yandex.ru)