

Минимаксная стабилизация линии визирования инерционного объекта на подвижном основании при наличии трения*

В. В. Латонов

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского,
Российская Федерация, 140181, Московская обл., Жуковский, ул. Жуковского, 1

Для цитирования: *Латонов В. В.* Минимаксная стабилизация линии визирования инерционного объекта на подвижном основании при наличии трения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 1. С. 135–143. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.113>

Приводится решение задачи оптимальной стабилизации линии визирования инерционного объекта в окрестности программной траектории. Движение этой линии описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Система уравнений в работе линеаризована в окрестности желаемого режима движения. В задаче возмущения представлены в виде отклонений начального положения от нуля, а также в виде постоянных возмущений. Стабилизация осуществляется посредством линейной обратной связи. В задаче коэффициенты обратной связи вычислены как оптимальные при наихудших возможных возмущениях. Вычисления проведены двумя способами: перебором всевозможных комбинаций параметров с заданным шагом дискретизации и параллельным генетическим алгоритмом.

Ключевые слова: линия визирования, оптимизация, стабилизация, минимаксное управление, возмущение, генетический алгоритм.

1. Введение. Задачи стабилизации подвижного объекта в окрестности желаемого режима управления часто встречаются в механических системах [1]. Если объект, который требуется стабилизировать, связан с другим подвижным объектом, то задача усложняется, поскольку для стабилизации требуется информация о движении основания. Необходимо найти такое стабилизирующее управление, которое позволило бы оптимально удерживать желаемую траекторию движения даже при наихудших возможных возмущениях, создаваемых средой или несовершенствами системы.

В работе [2] была рассмотрена математическая постановка задачи минимаксной стабилизации линейной системы, где в качестве критерия качества стабилизации выступает функционал Больца. В данной работе возмущения — это начальные отклонения от нуля. В [3] и [4] решается задача минимаксной стабилизации третьего порядка при помощи методики из [2]. В упомянутых работах отклонения начальных условий от нуля играют роль возмущений. В [5] решена задача минимаксной стабилизации линейной системы четвертого порядка. В этой работе также решена задача

* Публикация подготовлена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (Распоряжение Правительства РФ от 24 октября 2020 г. № 2744-р).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2022

стабилизации при постоянных возмущениях, определяемых одним скалярным параметром.

В настоящей работе решается задача оптимальной стабилизации системы линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка. В задаче рассматриваются возмущения начальных условий системы, а также постоянные возмущения, определяемые параметрами, принадлежащими заданным отрезкам. Подход, использованный в решении задачи, базируется на методе из работы [2]. Однако эта методика предполагает аналитическое вычисление производных, что в поставленной задаче невозможно. Для численного нахождения минимакса в настоящей работе используется параллельный генетический алгоритм. В задаче рассматриваются возмущения по начальным условиям, а также постоянные возмущения. Предварительно определяется множество, из которого необходимо выбирать коэффициенты линейной обратной связи, обеспечивающие системе устойчивость при помощи теоремы Харитонова [6]. Приведен пример решения задачи при заданных численных параметрах.

Новизна работы заключается в расширении алгоритма, предложенного в [2], добавлением в него генетического алгоритма для решения задачи оптимизации. Также новым результатом является применение полученного комплексного подхода к системе, являющейся расширением системы, рассмотренной в [5].

2. Математическая постановка задачи минимаксной стабилизации системы. Рассматривается система, описанная в работах [5] и [7]. Имеется подвижное основание, движение которого моделируется самолетом Дубинса [8] — расширением модели машины Дубинса добавлением в нее угла тангажа. Через α обозначим угол курса основания, а через β — угол тангажа. Пусть C — точка, связанная с основанием. Обозначим через $C\xi_1\xi_2\xi_3$ опорную систему отсчета — систему, не совершающую вращательных движений, а через $Cz_1z_2z_3$ — приборную систему отсчета. Последняя жестко связана с основанием и совершает вращательные движения. Через E обозначим цель, неподвижную относительно инерциальной системы координат и удаленную от основания на бесконечное расстояние. Сопоставим ей линию визирования — прямую, соединяющую эту точку с точкой C . Также на основании закреплен цилиндрический объект, который будем называть направляющим цилиндром. Будем обозначать его координаты индексом P . Он закреплен на основании посредством карданова подвеса, кольца которого мы будем считать безмассовыми. Центр масс цилиндра вынесен вперед относительно точки C . Цилиндру также сопоставим линию визирования, совпадающую с его осью симметрии. Каждая из линий визирования задается двумя параметрами — углом курса φ и углом возвышения θ . Угол курса отсчитывается от оси Cz_2 , угол возвышения от плоскости Cz_1z_2 .

Будем полагать, что на систему не действует сила трения о воздух. Также будем полагать, что точка C движется равномерно и прямолинейно несмотря на то, что основание совершает вращательные движения при движении вдоль поверхности. Между внешним кольцом подвеса и основанием действует сила вязкого трения с коэффициентом вязкости k_1 . Цилиндр жестко связан с внутренним кольцом и их траектории совпадают.

Обозначим через t_0 момент начала движения основания, через t_1 — момент окончания движения ($t_1 = \infty$). Через M обозначим массу цилиндра, а через l — расстояние от точки C до центра масс цилиндра. Тензор инерции J_r цилиндра в главных осях инерции — диагональный: $J_r = \text{diag}\{I_1, I_2, I_1\}$.

Параметры (φ_P, θ_P) — это углы курса и возвышения цилиндра; (φ_E, θ_E) — углы курса и возвышения линии визирования цели относительно подвижного основания. Через Q_φ и Q_θ обозначим моменты, действующие между основанием и внешним кольцом подвеса и между внешним и внутренним кольцами подвеса соответственно.

Система уравнений, определяющая движение цилиндра в системе координат, связанной с основанием, имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} & (I_1 + I_2 + l^2 M + (I_1 - I_2 + l^2 M) \cos 2\theta_P) \ddot{\varphi}_P = \\ & = -\frac{1}{2}(-4Q_\varphi - 4glM \cos \theta_P \sin(\varphi_P + \alpha) \sin \beta + 2\ddot{\alpha}(I_1 + I_2 + l^2 M) + \\ & + 2(I_1 - I_2 + l^2 M) \cos 2\theta_P \ddot{\alpha} + 4(I_1 + 4l^2 M) \sin(\varphi_P + \alpha) \dot{\theta}_P \dot{\beta} + \\ & + (I_1 - I_2 + l^2 M) \sin(2(\varphi_P + \alpha)) \dot{\beta}^2 + \\ & + 2(I_1 - I_2 + l^2 M) \cos \theta_P \sin(\varphi_P + \alpha) \dot{\beta}(2\dot{\theta}_P + \sin(\varphi_P + \alpha) \dot{\beta}) - \\ & - 2(I_1 - I_2 + l^2 M) \sin \theta_P (2\dot{\theta}_P(\dot{\varphi}_P + \dot{\alpha}) - \sin(\varphi_P + \alpha) \dot{\beta})), \\ & (I_1 + l^2 M) \ddot{\theta}_P = \\ & = Q_\theta + glM(-\cos(2\theta_P) \cos \beta + \cos \varphi_P + \alpha \sin 2\theta_P \sin \beta) + \\ & + (I_1 + l^2 M) \sin(\varphi_P + \alpha)(\dot{\varphi}_P + \dot{\alpha}) \dot{\beta} - \\ & - (I_1 - I_2 + l^2 M)(\sin 2\theta_P(\dot{\varphi}_P + \dot{\alpha}) - \\ & - \cos 2\theta_P \cos(\varphi_P + \alpha) \dot{\beta})(\cos 2\theta_P(\dot{\varphi}_P + \dot{\alpha}) + \\ & + \sin 2\theta_P \sin(\varphi_P + \alpha) \dot{\beta}) - (I_1 + l^2 M) \cos(\varphi_P + \alpha) \dot{\beta}. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Функции α и β — это, вообще говоря, функции времени, а Q_φ и Q_θ — управления, обеспечивающие движение цилиндра.

3. Решение задачи минимаксной стабилизации системы. Будем считать, что программная траектория направляющего цилиндра предполагает направленность его на точку, совпадающую с целью E , неподвижную относительно инерциальной системы координат. Моменты Q_φ и Q_θ , вообще говоря, зависят от функций α и β . Рассмотрим случай, когда $\alpha = \alpha(t) = c_1 t + c_2$, где c_1 и c_2 — константы, а $\beta = \beta(t) = c_3 = \text{const}$. Пусть управляющая цилиндром система имеет ошибочную информацию о функциях углов курса и тангажа и использует для формирования моментов функции $\tilde{\alpha}(t) = (c_1 + \kappa)t + c_2$ и $\tilde{\beta}(t) = c_3 - B$. Решим обратную задачу динамики и найдем программное управление Q_φ^* и Q_θ^* :

$$\begin{cases} Q_\varphi^* = glM \cos(B - c_3) \sin B \sin c_1 - k_1(c_1 + \kappa), \\ Q_\theta^* = -glM(-\cos B \cos(B - c_3) - \cos c_1 \sin B \cos(B - c_3)). \end{cases}$$

Перепишем систему (1) в форме Коши и линеаризуем ее в окрестности программной траектории и соответствующего программного управления. Введем вектор фазовых координат $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, где $x_1 = \varphi_P - \varphi_E$, $x_2 = \theta_P - \theta_E$, $x_3 = \dot{\varphi}_P - \dot{\varphi}_E$, $x_4 = \dot{\theta}_P - \dot{\theta}_E$. Также зададим вектор стабилизирующих управлений $\delta Q = (\delta Q_\varphi, \delta Q_\theta)$, где $\delta Q_\varphi = Q_\varphi - Q_\varphi^*$, $\delta Q_\theta = Q_\theta - Q_\theta^*$. Переменные κ и B заранее неизвестны и представляют собой параметры, определяющие постоянные возмущения. Введем ограничения $|\kappa| \leq \tilde{\kappa}$ и $|B| \leq \tilde{B}$. Зададим интегральный функционал качества стабилизации:

$$\Phi(\mathbf{k}, x(t_0), \kappa, B) = \int_{t_0}^{\infty} x^T E_4 x dt, \quad (2)$$

где E_4 — единичная матрица размером 4×4 , а через \mathbf{k} обозначается упорядоченная четверка коэффициентов $(k_{1\varphi}, k_{2\varphi}, k_{1\theta}, k_{2\theta})$. Пусть начальное рассогласование линий визирования принадлежит единичному шару в четырехмерном пространстве, т. е. $\|x(t_0)\| \leq 1$. Через Q_0 обозначим односвязное компактное множество, из которого выбираются коэффициенты \mathbf{k} . Множество Q_0 содержит те коэффициенты \mathbf{k} , при которых решение системы асимптотически устойчиво (в противном случае функционал $\Phi(\mathbf{k}, x(t_0), \kappa, B)$ может не существовать). Поставим задачу: вычислить коэффициенты линейной обратной связи, при которых функционал (3) принимал бы наименьшее значение при возмущениях, стремящихся его максимизировать: $\max_{|\kappa| \leq \bar{\kappa}} \max_{|B| \leq \bar{B}} \max_{\|x(t_0)\| \leq 1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0), \kappa, B) \rightarrow \min_{\mathbf{k} \in Q_0}$. Рассмотрим упрощенную задачу: будем считать, что коэффициенты $k_{2\varphi}$ и $k_{2\theta}$ заданы, а минимум будем искать только по коэффициентам $k_{1\varphi}$ и $k_{1\theta}$.

Построим стабилизирующее управление следующим образом: $\delta Q_\varphi = k_{1\varphi}x_1 + k_{2\varphi}x_3$ и $\delta Q_\theta = k_{1\theta}x_2 + k_{2\theta}x_4$. Получим однородную систему линейных дифференциальных уравнений в виде

$$\dot{x} = A(\mathbf{k}, \kappa, B)x.$$

Множество Q_0 вычисляется с помощью теоремы Харитонова [6]. Вычислим это множество с небольшим запасом устойчивости, чтобы можно было рассматривать граничные точки в качестве кандидатов на наилучшее решение задачи стабилизации. Для отыскания минимаксного значения функционала и аргументов, на которых это значение достигается, требуется найти способ вычисления возмущений, доставляющих максимум функционалу (2) при произвольно взятых коэффициентах \mathbf{k} и произвольно выбранных κ и B . Введем обозначение

$$H(\mathbf{k}, \kappa, B) = \int_{t_0}^{\infty} e^{A^T(\mathbf{k}, \kappa, B)(t-t_0)} E_4 e^{A(\mathbf{k}, \kappa, B)(t-t_0)} dt$$

и представим интегральный функционал (2) в виде терминального функционала:

$$\Phi(\mathbf{k}, x(t_0), \kappa, B) = x^T(t_0)H(\mathbf{k}, \kappa, B)x(t_0).$$

Матрица $H(\mathbf{k}, \kappa, B)$, согласно работе [9], выводится из матричного уравнения

$$A^T(\mathbf{k}, \kappa, B)H(\mathbf{k}, \kappa, B) + H(\mathbf{k}, \kappa, B)A(\mathbf{k}, \kappa, B) = -E_4, \quad (3)$$

где симметричная матрица $H(\mathbf{k}, \kappa, B)$ определена положительно. Максимум функционала (2) по векторному аргументу $x(t_0)$ на шаре $\|x(t_0)\| \leq 1$ совпадает с максимальным собственным значением матрицы $H(\mathbf{k}, \kappa, B)$, а аргумент $x^0(t_0)$, на котором достигается максимальное значение функции по начальным возмущениям, — это собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению матрицы $H(\mathbf{k}, \kappa, B)$.

Через $\text{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$ обозначим проекцию множества Q_0 на плоскость $(k_{1\varphi}k_{1\theta})$. Для численного моделирования ограничим все константы неравенствами $k_{1\varphi} \geq -10, k_{1\theta} \geq -14$, чтобы множество $\text{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$ было компактным. Также эти неравенства обеспечивают гладкость границы множества. Вычислим пару $(k_{1\varphi}, k_{1\theta})$, на которой достигается минимакс. Обычные аналитические методы поиска экстремума неприменимы в этой задаче, поскольку посчитать производную от выведенного терминального функционала не представляется возможным.

Можно произвести численный перебор всевозможных пар $(k_{1\varphi}, k_{1\theta})$ и вычислить максимум функционала для каждой такой пары. В этом случае требуется решение уравнения (3) и вычисление собственных значений матрицы $H(\mathbf{k}, \kappa, B)$ для каждой из возможных комбинаций чисел $(k_{1\varphi}, k_{1\theta}, \kappa, B)$. Однако такой подход требует значительного машинного времени.

Воспользуемся эвристическим методом вычисления минимаксного значения функционала — параллельным генетическим алгоритмом [10]. Этот алгоритм позволяет проводить перебор возможных решений таким образом, чтобы оптимальное решение находилось быстро. Создадим случайным образом поколение из N точек внутри множества Q_0 . Каждую из точек обозначим через $(k_{1\varphi}^i, k_{1\theta}^i), i = 1, \dots, N$. Множество точек-кандидатов на наилучшее решение обозначим через S . Определим операцию скрещивания двух точек $(k_{1\varphi}^i, k_{1\theta}^i)$ и $(k_{1\varphi}^j, k_{1\theta}^j)$ как среднее между ними: $((k_{1\varphi}^i + k_{1\varphi}^j)/2, (k_{1\theta}^i + k_{1\theta}^j)/2)$. Если результат скрещивания не принадлежит множеству Q_0 , то выбирается точка из Q_0 , наиболее близкая к вычисленной. Определим операцию мутации, как добавление случайного действительного числа из отрезка $[-1; 1]$ к каждой из координат. Если получившаяся в результате мутации точка не принадлежит множеству Q_0 , то мутация проводится снова. Операции скрещивания и мутации добавляют новые точки во множество S , не удаляя из него уже имеющиеся. Определим процедуру селекции как выбор N точек из множества S , на которых максимальное значение функционала (2) является наименьшим из всех точек в S . В результате селекции все, кроме выбранных N точек, удаляются из S .

Алгоритм поиска оптимального решения состоит из последовательного применения ко множеству S операций скрещивания, мутации, вычисления на всех точках в S максимальных значений функционала (2) и селекции. Процесс вычисления максимальных значений функционала в точках из S может выполняться параллельно.

4. Численное моделирование. Положим $t_0 = 0$, а $N = 10$. Создадим первое поколение решений и применим генетический алгоритм. Проведем численное моделирование для $\varphi_E = \pi/7, \theta_E = \pi/6 + \pi/18, I_1 = 50, I_2 = 20, l = 0.015, M = 15, k_1 =$

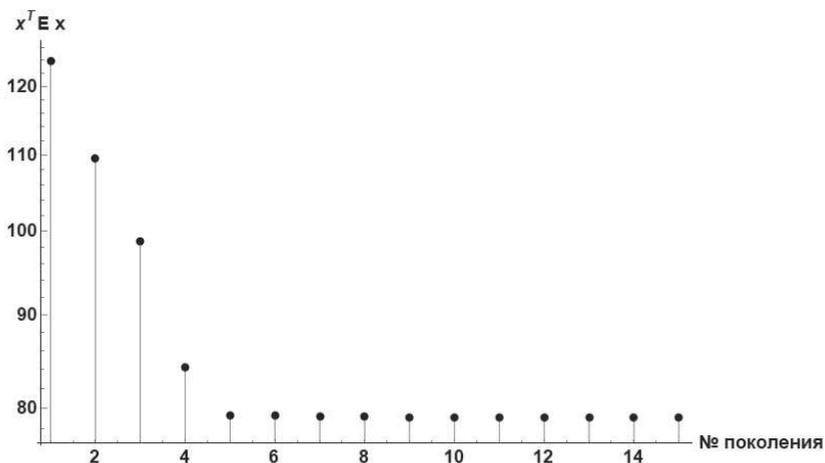


Рис. 1. Найденное минимаксное значение функционала в зависимости от номера поколения.

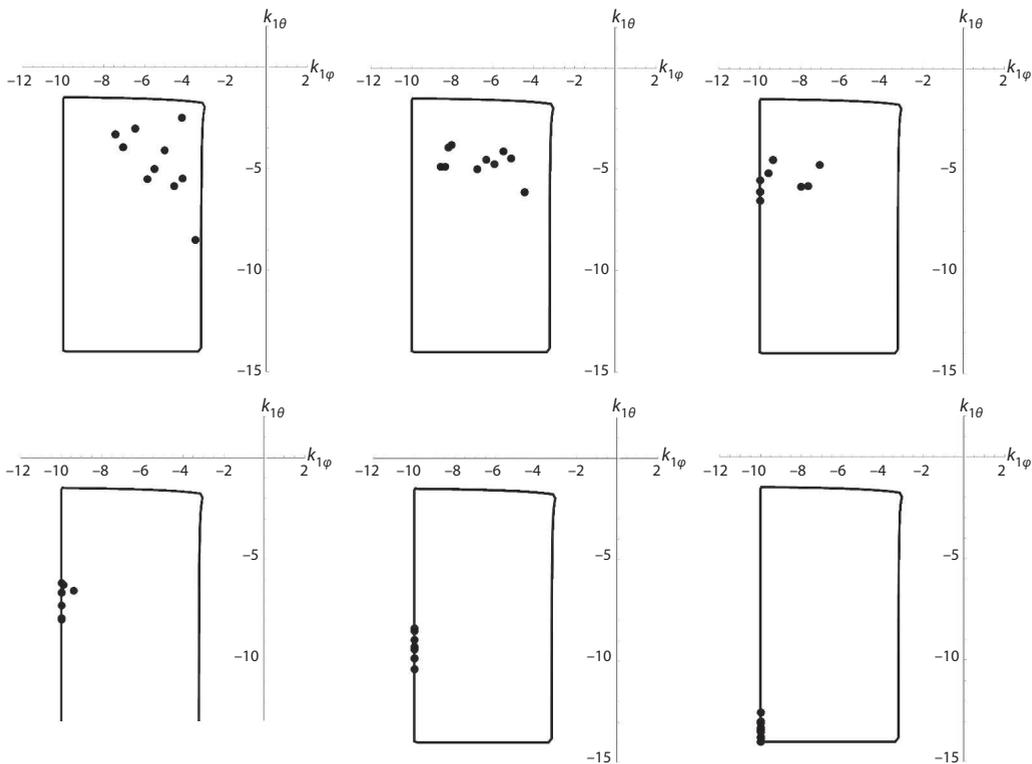


Рис. 2. Поколения решений с номерами 1, 3, 5, 7, 10 и 15.

$0.85, k_{2\varphi} = -7.5, k_{2\theta} = -8.5, \tilde{\kappa} = 0.3, \tilde{B} = \pi/3$. Константа g полагается равной 9.81 . Будем фиксировать на каждой итерации вычисленное значение минимакса. Таким образом, каждому новому поколению соответствует свое приближение наилучшего решения. На рис. 1 представлены значения минимакса у первых пятнадцати поколений.

Видно, что уже после пяти итераций значение функционала было почти неизменно. Численный эксперимент показал, что при заданных параметрах минимакс достигается в точке $(k_{1\varphi}^0 = -10, k_{1\theta}^0 = -14)$ при значениях $\kappa^0 = 0, B = 0.952$. Наихудшее начальное возмущение достигается в двух точках, симметричных относительно начала координат:

$$\begin{aligned} x^0(t_0) &= (-0.095, 0, -0.995, 0.006), \\ x^0(t_0) &= (0.095, 0, 0.995, -0.006). \end{aligned}$$

Таким образом, генетический алгоритм быстро нашел оптимальное решение. После пятнадцатой итерации алгоритм был остановлен. Всего работа алгоритма заняла чуть больше тридцати минут (против нескольких суток полного перебора). На рис. 2 представлены некоторые поколения, возникающие в ходе работы алгоритма. Видно, что уже десятое поколение было очень близко к оптимальному решению. На этих рисунках также изображены границы множества Q_0 , из которого выбиралось оптимальное решение. Это множество представлено в проекции на плоскость $(k_{1\varphi}, k_{1\theta})$.

5. Выводы. В статье приведено решение задачи минимаксной стабилизации линии визирования направляющего цилиндра на подвижном основании. Движение основания моделируется самолетом Дубинса. Цель задачи — поиск коэффициентов обратной связи, обеспечивающих оптимальную стабилизацию при наихудших начальных и постоянных возмущениях. В работе вычислено множество, из которого выбираются коэффициенты обратной связи. Для заданных параметров найдено оптимальное решение двумя разными способами — при помощи полного перебора и при помощи параллельного генетического алгоритма. Генетический алгоритм показал себя успешным в решении поставленной задачи, поскольку в ней неприменимы аналитические методы оптимизации, а также численные методы оптимизации, требующие слишком частого решения матричного уравнения и вычисления собственных чисел матрицы. Генетический алгоритм превзошел по скорости полный перебор в несколько десятков раз при сохранении точности решения.

Посвящается моей девушке Насте Анохиной, вдохновившей меня на создание этой статьи.

Литература

1. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Одноосная стабилизация вращательного движения твердого тела при наличии возмущений с нулевыми средними значениями. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6** (64), вып. 2, 270–280 (2019). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.209>
2. Alexandrov V. V., Bugrov D. I., Corona M. G., Tikhonova K. V. Tent-method application for minmax stabilization and maxmin testing. *IMA J. of Math. Control and Inform.* **34** (1), 15–25 (2017). <https://doi.org/10.1093/imamci/dnv028>
3. Александрова О. В., Козик А. А. Минимаксная оптимизация параметров стабилизации программного полета. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, № 3, 45–49 (2019).
4. Александров В. В., Рамирез Гутierrez X. А. Алгоритм минимаксной стабилизации линейных систем третьего порядка. *Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех.*, № 2, 47–52 (2018).
5. Латонов В. В. Задача минимаксной оптимизации системы стабилизации линии визирования. *Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, № 6, 64–68 (2019).
6. Харитонов В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений. *Дифференц. уравнения* **14** (11), 2086–2088 (1978).
7. Латонов В. В., Тихомиров В. В. Управление линией визирования цели по видеоизображению. *Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, № 1, 53–59 (2018).
8. Beard R. W., McLain T. W. *Implementing Dubins airplane path on fixed-wing UAVs*. In: Springer handbook of unmanned aerial vehicles, 1677–1701 (2013).
9. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. *Робастная устойчивость и управление*. Москва, Наука (2002).
10. Lara-Ramirez J. E., Garcia-Capulin C. H., Estudillo-Ayala M. J., Avina-Cervantes J. G., Sanchez-Yanez R. E., Rostro-Gonzalez H. Parallel hierarchical genetic algorithm for scattered data fitting through B-splines. *Applied Sciences* **9** (11), 2336 (2019). <https://doi.org/10.3390/app9112336>

Статья поступила в редакцию 30 марта 2021 г.;
доработана 28 августа 2021 г.;
рекомендована к печати 2 сентября 2021 г.

Контактная информация:

Латонов Василий Васильевич — канд. физ.-мат. наук; WLatonov@gmail.com

Minimax stabilization of the line-of-sight of an inertial object on a moving base in the presence of friction force*

V. V. Latonov

Central Aerohydrodynamic Institute named after N. Y. Zhukovsky,
1, ul. Zhukovskogo, Moskovskaya oblast', Zhukovsky, 140181, Russian Federation

For citation: Latonov V. V. Minimax stabilization of the line-of-sight of an inertial object on a moving base in the presence of friction force. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 1, pp. 135–143.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.113> (In Russian)

The solution of the problem of optimal stabilization of the line-of-sight of an inertial object in the vicinity of the program trajectory is given. The motion of this line is described by a system of nonlinear differential equations of the fourth order. The system of equations is linearized in the vicinity of the desired motion mode. In the problem solved, the perturbations are represented as deviations of the initial position from zero, as well as in the form of constant perturbations. The stabilization is carried out by means of linear feedback. In the problem, the feedback coefficients are calculated as optimal for the worst possible disturbances. Calculations are performed in two ways: a search of all possible combinations of parameters with a given sampling step and a parallel genetic algorithm.

Keywords: line-of-sight, optimization, stabilization, minimax control, disturbances, genetic algorithm.

References

1. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Uniaxial Attitude Stabilization of a Rigid Body under Conditions of Nonstationary Perturbations with Zero Mean Values. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6** (64), iss. 2, 270–280 (2019). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.209> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **52** (2), 187–193 (2019). <https://doi.org/10.1134/S106345411902002X>].
2. Alexandrov V. V., Bugrov D. I., Corona M. G., Tikhonova K. V. Tent-method application for minmax stabilization and maxmin testing. *IMA J. of Math. Control and Inform.* **34** (1), 15–25 (2017). <https://doi.org/10.1093/imamci/dnv028>
3. Aleksandrova O. V., Kozik A. A. Minimax Optimization of Stabilization Parameters during the Programmed Flight. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 3, 45–49 (2019). (In Russian) [Eng. transl.: *Moscow Univ. Mech. Bull.* **74** (3), 55–59 (2019). <https://doi.org/10.3103/S0027133019030014>].
4. Alexandrov V. V., Ramirez Gutierrez Kh. A. A Minimax Stabilization Algorithm for the Third-Order Linear Systems. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 2, 47–52 (2018). (In Russian) [Eng. transl.: *Moscow Univ. Mech. Bull.* **73** (2), 33–38 (2018). <https://doi.org/10.3103/S0027133018020024>].
5. Latonov V. V. Minimax optimization for a system of line-of-sight stabilization. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 6, 64–68 (2019). (In Russian) [Eng. transl.: *Moscow Univ. Mech. Bull.* **74** (6), 159–163 (2019)].
6. Kharitonov V. L. Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations. *Differ. Uravn.* **14** (11), 2086–2088 (1978). (In Russian)
7. Latonov V. V., Tikhomirov V. V. Line-of-Sight Guidance Control Using Video Images. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 1, 53–59 (2018). (In Russian) [Eng. transl.: *Moscow Univ. Mech. Bull.* **73** (1), 11–17 (2018). <https://doi.org/10.3103/S002713301801003X>].
8. Beard R. W., McLain T. W. *Implementing Dubins airplane path on fixed-wing UAVs*. In: Springer handbook of unmanned aerial vehicles, 1677–1701 (2013).
9. Polyak B. T., Shcherbakov P. S. *Robust Stability and Control*. Moscow, Nauka Publ. (2002). (In Russian)

*The publication was prepared as part of the implementation of the Program for the Creation and development of a world-class scientific center for 2020–2025 with the financial support of the Ministry of Education and Science of Russia (Decree of the Government of the Russian Federation no. 2744-p dated October 24, 2020).

10. Lara-Ramirez J.E., Garcia-Capulin C.H., Estudillo-Ayala M.J., Avina-Cervantes J.G., Sanchez-Yanez R. E., Rostro-Gonzalez H. Parallel hierarchical genetic algorithm for scattered data fitting through B-splines. *Applied Sciences* **9** (11), 2336 (2019). <https://doi.org/10.3390/app9112336>

Received: March 30, 2021

Revised: August 28, 2021

Accepted: September 2, 2021

Author's information:

Vasilii V. Latonov — WLatonov@gmail.com