

Оптимизация демпфирования колебаний в системах с нецелым числом степеней свободы

А. С. Смирнов^{1,2}, А. С. Муравьев³

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

² Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

³ АО «Газпром энергетика»,
Российская Федерация, 115304, Москва, ул. Луганская, 11

Для цитирования: Смирнов А. С., Муравьев А. С. Оптимизация демпфирования колебаний в системах с нецелым числом степеней свободы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 1. С. 164–175. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.116>

В статье обсуждаются вопросы, связанные с выбором оптимального демпфирования для системы с полутора степенями свободы — маятника с упруго-подвижной точкой подвеса, который испытывает действие вязкого трения. В качестве критерия оптимальности, характеризующего эффективность затухания колебаний системы, принимается максимизация ее степени устойчивости. При этом обсуждаются два варианта установки демпфирующего устройства: либо в шарнире маятника, либо параллельно упругому элементу. В каждом из случаев производится аналитическое решение задачи оптимизации, которое сопровождается наглядной графической иллюстрацией. Кроме того, дается сопоставление двух случаев демпфирования на основе анализа максимальной степени устойчивости и делается вывод о целесообразности использования того или другого варианта. Полученные результаты представляют интерес как в теоретическом, так и в практическом отношении, а описанный план поиска оптимального решения может быть применен также и к решению других задач оптимизации в системах, обладающих нецелым числом степеней свободы.

Ключевые слова: маятник, пружина, демпфер, вязкое трение, оптимизация, степень устойчивости.

1. Введение. Вопросам гашения колебаний механических систем при помощи демпферов вязкого трения посвящены многочисленные труды [1–3]. Этот раздел представляет важный теоретический интерес и несомненное практическое значение, и без решения подобных задач невозможно функционирование и дальнейшее развитие современной техники. При этом в качестве критерия эффективности процессов затухания для линейных систем обычно выбирается максимизация степени устойчивости [4].

Наиболее часто в подобных задачах оптимизации рассматриваются линейные системы с одной или двумя степенями свободы, поскольку именно для них удается получить аналитическое решение в конечной форме [5]. Вместе с тем иногда приходится иметь дело с так называемыми системами с нецелым числом степеней свободы [6]. Такие системы довольно редко рассматриваются в литературе, однако они имеют ряд характерных особенностей. Впервые упоминание о системах с

нецелым числом степеней свободы появилось в первом издании книги [7], где были рассмотрены системы с 0.5 степени свободы. В качестве одной из таких систем выступал линейный осциллятор с бесконечно малой массой, а другой системой был электрический контур с бесконечно малой индуктивностью. Данные системы представляют собой вырождение традиционных систем с целым числом степеней свободы при пренебрежимо малом значении одного из параметров, и поведение каждой из них описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. В книге [8] рассматриваются также и системы с 1.5 степени свободы, движение которых описывается дифференциальным уравнением третьего порядка. Поэтому понятие нецелого числа степеней свободы напрямую связывается с порядком уравнения движения системы [9]. Из прикладных задач такого рода можно отметить хорошо известную задачу о движении тягача с шарнирно присоединенным к нему прицепом [10, 11]. Кроме того, несколько схем систем с 1.5 и 2.5 степени свободы представлены в справочнике [12].

Несмотря на серьезность указанных исследований, имеется большой простор для рассмотрения систем с нецелым числом степеней свободы. В частности, задачи оптимизации параметров систем с нецелым числом степеней свободы и вовсе не получили должного внимания [13]. В настоящей работе предлагается восполнить этот пробел, и она посвящена изучению диссипативных систем с 1.5 степенями свободы. Основной целью исследования является определение оптимальных значений коэффициентов демпфирования в зависимости от параметров системы, а также выявление особенностей оптимального решения, которые могут оказаться полезными на практике.

2. Постановка задачи. Рассмотрим математический маятник массы m и длины l , точка подвеса которого не является неподвижной, а закреплена на пружине и может двигаться лишь в горизонтальном направлении [14] (рис. 1).

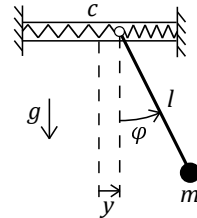


Рис. 1. Маятник с упруго-подвижной точкой подвеса.

В качестве обобщенных координат примем угол поворота маятника φ и смещение его точки подвеса y . Будем полагать, что пружина создает восстанавливающую силу, равную $-cy$, где c — коэффициент жесткости подвеса маятника. Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий системы:

$$T = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\cos\varphi\dot{y}\dot{\varphi} + \dot{y}^2), \quad \Pi = mgl(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2}cy^2. \quad (1)$$

Полагая угол φ достаточно малым, можно записать квадратичные аппроксимации кинетической и потенциальной энергий (1), традиционные для задач о малых колебаниях:

$$T = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi} + \dot{y}^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(mgl\varphi^2 + cy^2). \quad (2)$$

Подставляя эти выражения в уравнения Лагранжа второго рода [15], получим следующие линейные уравнения движения:

$$ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{y} + mgl\varphi = 0, \quad m\ddot{y} + ml\ddot{\varphi} + cy = 0. \quad (3)$$

Следует отметить интересную особенность данной задачи. Она заключается в том, что характеристический полином системы (3) оказывается квадратичным, и из этих уравнений вытекает соотношение $y = mg\varphi/c$. Поэтому данная система в линейной постановке фактически имеет лишь одну степень свободы. При этом из уравнений (3) вытекает, что эта система эквивалентна математическому маятнику длины $l + mg/c$ [14]:

$$\left(l + \frac{mg}{c}\right)\ddot{\varphi} + g\varphi = 0. \quad (4)$$

Предположим, что для гашения колебательных движений системы используются демпферы вязкого трения. Здесь имеется две возможности расположения демпфирующих устройств: либо установка демпфера в шарнире маятника (так, что он создает момент вязкого трения $-\beta\dot{\varphi}$, где β — диссипативный коэффициент), либо его размещение параллельно упругому элементу (так, что он создает силу вязкого трения $-b\dot{y}$, где b — диссипативный коэффициент). Выясним, каким образом следует выбирать параметры β и b в каждом из случаев, чтобы добиться наиболее эффективного затухания движения системы. Будем руководствоваться при этом критерием, основанным на максимизации степени устойчивости. Как известно, степень устойчивости — это расстояние от мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения до ближайшего к ней корня.

3. Оптимизация диссипативного параметра β . Рассмотрим сначала случай шарнирного трения, для которого диссипативная функция имеет вид $R = \beta\dot{\varphi}^2/2$. Внося диссипативные эффекты в линейную систему (3), получим следующие уравнения:

$$ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{y} + \beta\dot{\varphi} + mgl\varphi = 0, \quad m\ddot{y} + ml\ddot{\varphi} + cy = 0. \quad (5)$$

Для дальнейших действий удобно ввести в рассмотрение ключевой безразмерный параметр задачи $\gamma = cl/(mg)$, пропорциональный коэффициенту жесткости подвеса маятника, величину $k = \sqrt{g/l}$ — частоту малых колебаний маятника длины l , безразмерную координату $\xi = y/l$, а также безразмерное время $\tau = kt$. Кроме того, будем использовать обозначение для безразмерного диссипативного коэффициента $\nu_1 = \beta/(ml^2k)$. В результате можно привести уравнения (5) к следующему безразмерному виду:

$$\varphi'' + \xi'' + \nu_1\varphi' + \varphi = 0, \quad \xi'' + \varphi'' + \gamma\xi = 0, \quad (6)$$

где штрихом обозначается производная по безразмерному времени τ . Характеристическое уравнение полученной системы имеет вид $Q(p) = 0$, где полином $Q(p)$ есть

$$Q(p) = \nu_1 p^3 + (1 + \gamma)p^2 + \nu_1 \gamma p + \gamma. \quad (7)$$

Это уравнение является кубическим, поэтому данную диссипативную систему можно назвать системой с 1.5 степени свободы. Следовательно, введение элемента трения увеличило число степеней свободы системы на 0.5. Таким образом, задача оптимизации сводится к нахождению такого диссипативного коэффициента ν_1 в зависимости от безразмерного параметра задачи γ , который максимизирует степень устойчивости системы.

Для решения поставленной задачи выведем уравнения дискриминантных кривых диаграммы Вышнеградского [16], рассматривая ее на плоскости параметров $\gamma\nu_1$. Как известно, эти кривые разделяют указанную плоскость на области с различным характером корней полинома $Q(p)$: I — два комплексно-сопряженных и один вещественный корень, причем комплексно-сопряженные корни расположены ближе к мнимой оси; II — также два комплексно-сопряженных и один вещественный корень, но теперь вещественный корень расположен ближе к мнимой оси; III — три вещественных корня. Ясно, что пограничным ситуациям между указанными вариантами отвечают либо наличие кратного корня, либо равенство вещественной части всех трех корней. Определим, когда полином (7) имеет кратный корень. Ясно, что это происходит, когда одновременно выполняются условия $Q(p) = 0$, $Q'(p) = 0$. Решая совместно данные уравнения, можно исключить из них величину p и после ряда преобразований найти зависимость ν_1 от γ :

$$p = -\sqrt{\frac{\gamma(\gamma - 2 \pm \sqrt{\gamma^2 - 8\gamma})}{2(1 + \gamma)}}, \quad \nu_1 = \frac{2\sqrt{2}(\gamma + 1)^{3/2}\sqrt{\gamma - 2 \pm \sqrt{\gamma^2 - 8\gamma}}}{\sqrt{\gamma}(5\gamma - 4 \pm 3\sqrt{\gamma^2 - 8\gamma})}, \quad (8)$$

где $\gamma \geq 8$. Отметим, что эта кривая состоит из двух ветвей. Далее найдем кривую, на которой все три корня полинома имеют одинаковую вещественную часть. Полагая, что $p_1 = -n$, а $p_{2,3} = -n \pm i\omega$, запишем полином в следующем виде: $Q(p) = \nu_1(p + n)(p + n - i\omega)(p + n + i\omega)$. Сопоставляя его с (7) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях p , исключим из получившейся системы параметры n и ω , после чего придем и к зависимости ν_1 от γ :

$$n = \sqrt{\frac{\gamma(\gamma - 2)}{2(1 + \gamma)}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\gamma(8 - \gamma)}{2(1 + \gamma)}}, \quad \nu_1 = \frac{\sqrt{2}(1 + \gamma)^{3/2}}{3\sqrt{\gamma(\gamma - 2)}}, \quad (9)$$

где $2 < \gamma \leq 8$. Таким образом, последние формулы в (8) и (9) определяют дискриминантные кривые, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Перейдем теперь непосредственно к нахождению оптимального решения. С этой целью получим выражение для степени устойчивости η_1 , осуществляя замену переменных $p = \lambda - \eta_1$ в уравнении $Q(p) = 0$ с учетом (7) [16]. После ряда преобразований получим

$$\begin{aligned} a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 &= 0, & a_0 &= \nu_1, & a_1 &= -3\nu_1\eta_1 + 1 + \gamma, \\ a_2 &= 3\nu_1\eta_1^2 - 2\eta_1(1 + \gamma) + \nu_1\gamma, & a_3 &= -\nu_1\eta_1^3 + (1 + \gamma)\eta_1^2 - \nu_1\gamma\eta_1 + \gamma. \end{aligned} \quad (10)$$

Запишем для этого «смещенного» уравнения условие колебательной границы устойчивости: $a_0a_3 = a_1a_2$. С учетом выражений (10) для коэффициентов его можно привести к квадратному уравнению относительно ν_1 :

$$2\eta_1(4\eta_1^2 + \gamma)\nu_1^2 - [8\eta_1^2(1 + \gamma) + \gamma^2]\nu_1 + 2\eta_1(1 + \gamma)^2 = 0, \quad (11)$$

разрешая которое, получим

$$\nu_1 = \frac{8\eta_1^2(1 + \gamma) + \gamma^2 \pm \sqrt{\gamma^4 - 16\eta_1^2\gamma(1 + \gamma)}}{4\eta_1(4\eta_1^2 + \gamma)}. \quad (12)$$

Для нахождения первого участка оптимальной кривой, лежащего в области I, следует найти зависимость $\nu_1 = \nu_1(\gamma)$, доставляющую максимум функции $\eta_1(\nu_1, \gamma)$.

Дифференцируя с этой целью уравнение (11) по ν_1 и принимая во внимание, что $d\eta_1/d\nu_1 = 0$, получим зависимость ν_1 от η_1 и γ . Затем при ее подстановке в (12) определим и саму максимальную безразмерную степень устойчивости η_1 в зависимости от γ . Наконец, с учетом последнего выражения из (12) установим и искомую зависимость ν_1 от γ . Указанная цепочка действий в формульной записи выглядит следующим образом:

$$\nu_1 = \frac{8\eta_1^2(1+\gamma) + \gamma^2}{4\eta_1(4\eta_1^2 + \gamma)}, \quad \eta_1 = \frac{\gamma^{3/2}}{4\sqrt{1+\gamma}}, \quad \nu_1 = \frac{2(1+\gamma)^{3/2}}{\sqrt{\gamma}(\gamma+2)}. \quad (13)$$

Последняя формула (13) и определяет искомый первый участок оптимальной кривой. Поскольку этот участок должен относиться к области I, то необходимо определить, когда найденная кривая пересечет границы этой области. Нетрудно установить, что это происходит при $\gamma = 4$ при пересечении полученной зависимости с дискриминантной кривой, определяемой формулой (9), которая отвечает совпадению вещественной части всех корней полинома. Поэтому решение (13), а вместе с ним и первый участок оптимальной кривой отвечают диапазону $0 < \gamma \leq 4$.

Для нахождения второго и третьего участков оптимальной кривой, которые отвечают диапазону $\gamma > 4$, применим к уравнению (10) условие границы аperiodической устойчивости $a_3 = 0$. В результате получим следующее уравнение, которое сразу можно легко разрешить относительно ν_1 :

$$-\nu_1\eta_1^3 + (1+\gamma)\eta_1^2 - \nu_1\gamma\eta_1 + \gamma = 0, \quad \nu_1 = \frac{(1+\gamma)\eta_1^2 + \gamma}{\eta_1(\eta_1^2 + \gamma)}. \quad (14)$$

Применяя к первому уравнению (14) условие экстремума $d\eta_1/d\nu_1 = 0$, можно установить, что внутри областей II, III и на разделяющей их границе максимум степени устойчивости η_1 не достигается. Следовательно, при $\gamma > 4$ максимум будет обеспечен на границах, разделяющих эти области с областью I, т. е. как раз на дискриминантных кривых, выражения для которых были получены нами ранее. При этом нетрудно понять, что из двух ветвей кривой, определяемой второй формулой (8), следует брать ту, которая отвечает знаку «-», поскольку именно эта ветвь соответствует границе между областями I и III. Таким образом, второй участок оптимальной кривой задается последней формулой (9) при $4 < \gamma \leq 8$, а третий — последней формулой (8) со знаком «-» и при $\gamma > 8$. Наконец, объединяя решения для всех трех участков, получим полное оптимальное решение задачи для всех возможных значений γ , т. е. искомую зависимость $\nu_{1*}(\gamma)$:

$$\nu_{1*} = \begin{cases} \frac{2(1+\gamma)^{3/2}}{\sqrt{\gamma}(\gamma+2)}, & 0 < \gamma \leq 4, \\ \frac{\sqrt{2}(1+\gamma)^{3/2}}{3\sqrt{\gamma}(\gamma-2)}, & 4 < \gamma \leq 8, \\ \frac{2\sqrt{2}(1+\gamma)^{3/2}\sqrt{\gamma-2-\sqrt{\gamma^2-8\gamma}}}{\sqrt{\gamma}(5\gamma-4-3\sqrt{\gamma^2-8\gamma})}, & \gamma > 8. \end{cases} \quad (15)$$

Остается теперь найти и максимальное значение безразмерной степени устойчивости в зависимости от параметра γ . Ясно, что при $0 < \gamma \leq 4$ она определяется второй

формулой (13). При $4 < \gamma \leq 8$ степень устойчивости равна вещественной части всех корней n , которая дается первой формулой (9). Наконец, при $\gamma > 8$ степень устойчивости определяется модулем кратного корня, который лежит ближе к мнимой оси, чем оставшийся корень, т. е. дается модулем значения p из первой формулы (8), где, естественно, по-прежнему следует брать знак «-». Объединяя все указанные выражения в одно, получим искомую максимальную степень устойчивости $\eta_{1*}(\gamma)$:

$$\eta_{1*} = \begin{cases} \frac{\gamma^{3/2}}{4\sqrt{1+\gamma}}, & 0 < \gamma \leq 4, \\ \sqrt{\frac{\gamma(\gamma-2)}{2(1+\gamma)}}, & 4 < \gamma \leq 8, \\ \sqrt{\frac{\gamma(\gamma-2-\sqrt{\gamma^2-8\gamma})}{2(1+\gamma)}}, & \gamma > 8. \end{cases} \quad (16)$$

4. Оптимизация диссипативного параметра b . Перейдем теперь ко второму случаю, когда демпфер вязкого трения устанавливается параллельно пружине. В этом случае диссипативная функция есть $R = bj^2/2$, и линеаризованные уравнения движения будут иметь вид

$$ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{y} + mgl\varphi = 0, \quad m\ddot{y} + ml\dot{\varphi} + cy + bjy = 0. \quad (17)$$

Используя прежние обозначения для γ , k , ξ и τ , а также вводя новое обозначение для безразмерного диссипативного коэффициента $\nu_2 = b/(mk)$, представим уравнения (17) в безразмерном виде:

$$\varphi'' + \xi'' + \varphi = 0, \quad \xi'' + \varphi'' + \nu_2\xi' + \gamma\xi = 0. \quad (18)$$

В результате можно получить характеристическое уравнение в виде $Q(p) = 0$, где

$$Q(p) = \nu_2 p^3 + (1 + \gamma)p^2 + \nu_2 p + \gamma. \quad (19)$$

Видно, что полином (19) отличается от (7) лишь одним коэффициентом. Однако это отличие существенно повлияет на дальнейшие результаты. Так, дискриминантные кривые в этом случае уже будут иметь вид

$$\nu_2 = \frac{[2(1 + \gamma)]^{3/2} \sqrt{1 - 2\gamma \pm \sqrt{1 - 8\gamma}}}{5 - 4\gamma \pm 3\sqrt{1 - 8\gamma}}, \quad \gamma \leq \frac{1}{8}; \quad \nu_2 = \frac{\sqrt{2}(1 + \gamma)^{3/2}}{3\sqrt{1 - 2\gamma}}, \quad \frac{1}{8} \leq \gamma \leq \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Первая из них по-прежнему состоит из двух ветвей и отвечает кратному корню полинома $Q(p)$, а вторая отвечает случаю равенства вещественной части всех трех корней. Тем не менее общий ход решения оказывается абсолютно аналогичен тому, что было представлено выше для случая шарнирного трения. Поэтому, повторяя все указанные ранее действия и не приводя деталей вычислений, запишем сразу

окончательное оптимальное решение:

$$\nu_{2*} = \begin{cases} \frac{[2(1+\gamma)]^{3/2} \sqrt{1-2\gamma-\sqrt{1-8\gamma}}}{5-4\gamma-3\sqrt{1-8\gamma}}, & \gamma \leq \frac{1}{8}, \\ \frac{\sqrt{2}(1+\gamma)^{3/2}}{3\sqrt{1-2\gamma}}, & \frac{1}{8} < \gamma \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{2\sqrt{\gamma(1+\gamma)^3}}{2\gamma+1}, & \gamma > \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (21)$$

Легко видеть, что оптимальная кривая $\nu_{2*}(\gamma)$ также состоит из трех участков, причем первые два из них являются частями дискриминантных кривых. Наконец, можно также по аналогии получить и выражение для максимальной безразмерной степени устойчивости:

$$\eta_{2*} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-2\gamma-\sqrt{1-8\gamma}}{2(1+\gamma)}}, & \gamma \leq \frac{1}{8}, \\ \sqrt{\frac{1-2\gamma}{2(1+\gamma)}}, & \frac{1}{8} < \gamma \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4\sqrt{\gamma(1+\gamma)}}, & \gamma > \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (22)$$

5. Обсуждение результатов исследования. Обратимся к графической интерпретации и обсуждению полученных аналитических результатов. Сначала изобразим оптимальную кривую (15), дающую максимальную степень устойчивости системы, построив ее на плоскости $\gamma\nu_1$ поверх дискриминантных кривых (8) и (9). На рис. 2 приведены указанные кривые, а именно: кривая, отвечающая одинаковой вещественной части корней полинома (красная линия); кривая, отвечающая кратному корню полинома (зеленая линия); оптимальная кривая (синяя пунктирная линия).

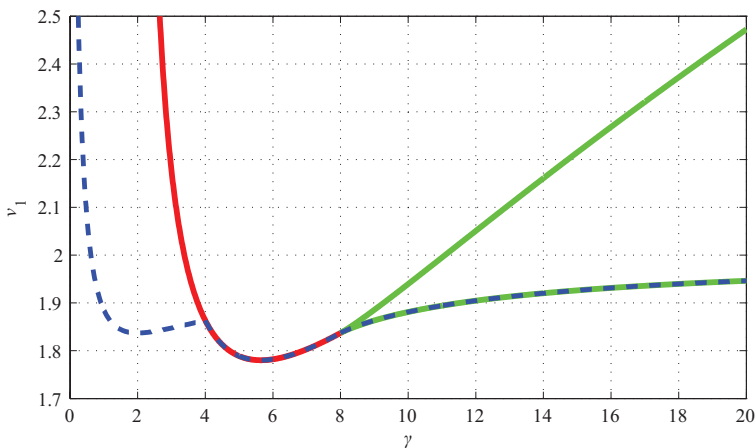


Рис. 2. Дискриминантные кривые и оптимальная кривая в случае установки демпфера в шарнире маятника.

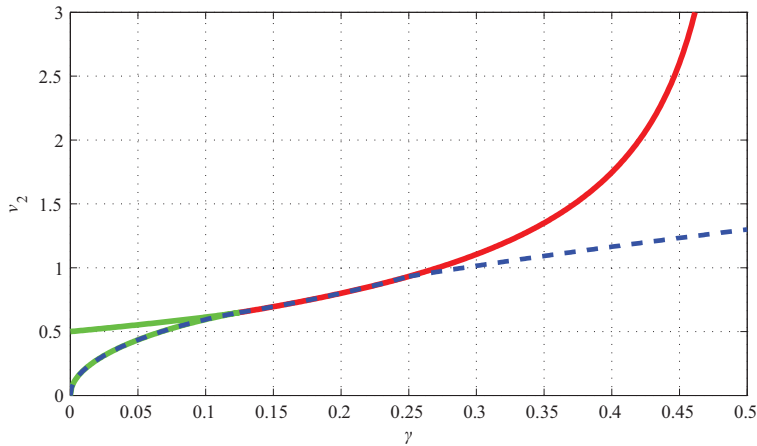


Рис. 3. Дискриминантные кривые и оптимальная кривая в случае установки демфера параллельно пружине.

Видно, что оптимальная кривая имеет два явно выраженных минимума: $\gamma = 2$ на первом участке, причем $\nu_{1*} = (3/2)^{3/2} \approx 1.837$, и $\gamma = 3 + \sqrt{7} \approx 5.646$ на втором, причем $\nu_{1*} = \sqrt{(10 + 7\sqrt{7})}/9 \approx 1.780$. Кроме того, на стыке этих двух участков, т. е. при $\gamma = 4$, оптимальная кривая имеет максимум и является негладкой, при этом $\nu_{1*} = (5^{3/2})/6 \approx 1.863$. Отметим, что при $\gamma \rightarrow 0$ имеем $\nu_{1*} \rightarrow \infty$, т. е. в случае достаточно мягкой пружины следует выбирать очень большой диссипативный коэффициент шарнирного трения. Что же касается случая $\gamma \rightarrow \infty$, когда пружина является довольно жесткой, то он фактически отвечает обычному маятнику с неподвижной точкой подвеса и при этом $\nu_{1*} \rightarrow 2$, что согласуется с расчетами, приведенными в книге [5].

Полученная оптимальная кривая, отвечающая максимальной степени устойчивости системы, может быть проверена при помощи процедуры численной оптимизации в любом пакете прикладных программ. Для этого следует для каждого фиксированного значения γ определить численно корни полинома (7) при различных значениях ν_1 , после чего выбрать среди них такое, при котором степень устойчивости η_1 максимальна. В результате можно получить численную оптимальную кривую, которая полностью совпадет с найденной выше аналитической кривой. Эта процедура лишней раз подтверждает корректность и ценность полученного аналитического решения.

Обращаясь к выражению (21), обсудим теперь оптимальное решение для второго случая, накладывая его на дискриминантные кривые (20) на плоскости $\gamma\nu_2$. На рис. 3 представлены эти зависимости, а именно: кривая, отвечающая одинаковой вещественной части корней полинома (красная линия); кривая, отвечающая кратному корню полинома (зеленая линия); оптимальная кривая (синяя пунктирная линия). Видно, что в отличие от предыдущего случая здесь оптимальная кривая является монотонно возрастающей. Отметим, что при $\gamma \rightarrow 0$ будет $\nu_{2*} \rightarrow 0$, тогда как при $\gamma \rightarrow \infty$ имеем следующее асимптотическое представление: $\nu_{2*} \sim \gamma$. Подчеркнем, что оптимальная кривая имеет точку излома $\gamma = 1/4$ в месте соединения двух ее последних участков. Наконец, при проведении описанного выше численного экспе-

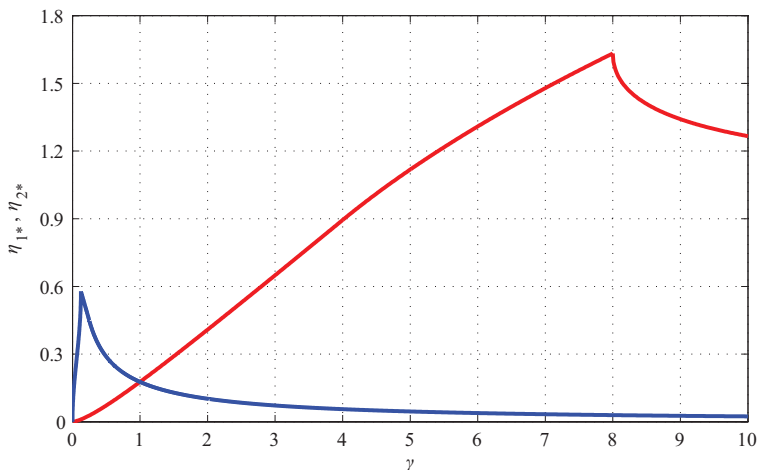


Рис. 4. Максимальная безразмерная степень устойчивости для каждого из вариантов установки демпфера.

римента также можно убедиться, что построенная кривая полностью соответствует численным результатам.

Остается проанализировать графики зависимости максимальной безразмерной степени устойчивости от параметра γ в каждом из двух случаев демпфирования, графики можно построить по формулам (16) и (22). На рис. 4 приведены упомянутые зависимости, а именно: максимальная безразмерная степень устойчивости в случае установки демпфера в шарнире маятника (красная линия) и максимальная безразмерная степень устойчивости в случае установки демпфера параллельно пружине (синяя линия). Видно, что каждый из представленных графиков имеет негладкий максимум: в первом случае он достигается при $\gamma = 8$, причем $\eta_{1*} = \sqrt{8/3} \approx 1.633$, а во втором случае — при $\gamma = 1/8$, причем $\eta_{2*} = \sqrt{1/3} \approx 0.577$. Отметим, что в обоих случаях $\eta_{1*} = \eta_{2*} = 0$ при $\gamma = 0$, в то время как при $\gamma \rightarrow \infty$ поведение графиков является различным: в первом случае $\eta_{1*} \rightarrow 1$, тогда как во втором $\eta_{2*} \rightarrow 0$. Легко видеть, что оба графика пересекаются при $\gamma = 1$. Поэтому можно сделать вывод, что при $\gamma < 1$ целесообразно устанавливать демпфер параллельно пружине, тогда как при $\gamma > 1$ более выгодной будет установка демпфера в шарнире маятника (естественно, при наилучшей настройке этих демпфирующих устройств).

6. Заключение. Подводя итоги проведенного исследования, можно заключить, что в работе была поставлена и решена задача оптимизации диссипативных параметров маятника с упруго-подвижной точкой подвеса для двух вариантов установки демпфера. Оценивая эффективность процессов затухания колебаний при помощи критерия, основанного на максимизации степени устойчивости, удалось получить полное аналитическое решение задачи и дать его графическую иллюстрацию на плоскости безразмерных параметров. Достоверность полученных результатов определяется строгостью математических построений и их сравнением с численным решением. Кроме того, путем сопоставления максимальных значений безразмерной степени устойчивости для каждого случая демпфирования был сделан вывод о целесообразности использования того или иного демпфера. Используемая в данной работе методика получения оптимального решения может быть применена и к дру-

гим системам, которые обладают характеристическим уравнением третьей степени. Наконец, следует подчеркнуть, что полученные результаты имеют не только фундаментальное теоретическое значение и являются базой для дальнейших исследований в области оптимизации параметров подобных систем с 1.5 степени свободы, но и могут найти определенное применение на практике.

Литература

1. Болотник Н. Н. *Оптимизация амортизационных систем*. Москва, Наука (1983).
2. Леонтьев В. А., Смирнов А. С., Смольников Б. А. Оптимальное демпфирование колебаний двухзвенного манипулятора. *Робототехника и техническая кибернетика* **2** (19), 52–59 (2018).
3. Нагаев Р. Ф., Степанов А. В. Об оптимизации коэффициента затухания свободных колебаний двухмассовой системы. *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела* **4**, 24–28 (1979).
4. Воронов А. А. *Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем*. Москва, Энергия (1980).
5. Смольников Б. А. *Проблемы механики и оптимизации роботов*. Москва, Наука (1991).
6. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. *Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики*. Москва, Наука (1983).
7. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. *Теория колебаний*. 2-е изд. Москва, Физматгиз (1959).
8. Пановко Я. Г., Губанова И. И. *Устойчивость и колебания упругих систем*. Москва, Наука (1987).
9. Трегубов В. П. Системы с нецелым числом степеней свободы. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка»*, no. 850, 83–90 (2009).
10. Циглер Г. *Основы теории устойчивости конструкций*, пер. с англ. Москва, Мир (1971).
11. Муравьев А. С., Смирнов А. С. Динамика и устойчивость движения тягача с прицепом. В: *Неделя науки СПбПУ*. 18–23 ноября 2019 года, Санкт-Петербург, 92–95 (2019).
12. Биргер И. А., Пановко Я. Г. (ред.) *Прочность, устойчивость, колебания*. Т. 3. Москва, Машиностроение (1968).
13. Муравьев А. С., Смирнов А. С. Оптимизация демпфирования колебаний маятника с упруго-подвижной точкой подвеса. В: *IX Поляжовские чтения. Материалы международной научной конференции по механике*. 9–12 марта 2021 года, Санкт-Петербург, 115–117 (2021).
14. Карман Т., Био М. *Математические методы в инженерном деле*, пер. с англ. Москва, Ленинград, ГИТТЛ (1946).
15. Лурье А. И. *Аналитическая механика*. Москва, Физматгиз (1961).
16. Бесекерский В. А., Попов Е. П. *Теория систем автоматического регулирования*. 2-е изд. Москва, Наука (1972).

Статья поступила в редакцию 20 июля 2021 г.;
доработана 30 августа 2021 г.;
рекомендована к печати 2 сентября 2021 г.

Контактная информация:

Смирнов Алексей Сергеевич — ассистент, стажер-исследователь; smirnov.alexey.1994@gmail.com
Муравьев Александр Сергеевич — инженер 1 категории; Muravyoff97@mail.ru

Optimization of oscillation damping in systems with a non-integer number of degrees of freedom

A. S. Smirnov^{1,2}, A. S. Muravyov³

¹ Peter the Great St Petersburg Polytechnic University,

29, ul. Polytechnicheskaya, St Petersburg, 195251, Russian Federation

² Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61, V. O., Bolshoy pr., St Petersburg, 199178, Russian Federation

³ JSC “Gazprom orgenergogaz”, 11, Luganskaya ul., Moscow, 115304, Russian Federation

For citation: Smirnov A. S., Muravyov A. S. Optimization of oscillation damping in systems with a non-integer number of degrees of freedom. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 1, pp. 164–175.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.116> (In Russian)

The paper discusses issues related to the choice of the optimal damping for a system with one and a half degrees of freedom — a pendulum with an elastic-movable suspension point in the presence of viscous friction. Maximization of the degree of stability of the system is taken as an optimization criterion characterizing the efficiency of damping oscillations. Two options for installing a damping device are discussed — either in the pendulum joint, or parallel to the elastic element. The analytical solution of the optimization problem is performed in each case, and it is accompanied by a visual graphic illustration. In addition, a comparison of two cases of damping is given on the basis of analysis of the maximum degree of stability and a conclusion about the advisability of using one or another option is made. The obtained results are of interest both in theoretical and practical terms, and the described plan for finding the optimal solution can also be applied to solving other optimization problems in systems with a non-integer number of degrees of freedom.

Keywords: pendulum, spring, damper, viscous friction, optimization, degree of stability.

References

1. Bolotnik N. N. *Optimization of amortization systems*. Moscow, Nauka Publ. (1983). (In Russian)
2. Leontev V. A., Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimal damping of two-link manipulator oscillations. *Robotics and Technical Cybernetics* **2** (19), 52–59 (2018). (In Russian)
3. Nagaev R. F., Stepanov A. V. On optimization of the damping coefficient of free oscillations of a two-mass system. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of Rigid Body* **4**, 24–28 (1979). (In Russian)
4. Voronov A. A. *Fundamentals of the theory of automatic control. Automatic control of continuous linear systems*. Moscow, Energiya Publ. (1980). (In Russian)
5. Smolnikov B. A. *Problems of mechanics and robotoptimization*. Moscow, Nauka Publ. (1991). (In Russian)
6. Blekhman I. I., Myshkis A. D., Panovko Ya. G. *Mechanics and Applied Mathematics. Logic and features of applications of mathematics*. Moscow, Nauka Publ. (1983). (In Russian)
7. Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E. *Teoriya kolebaniy*. Moscow, Fizmatgiz Publ. (1959). (In Russian) [Eng. transl.: Andronov A., Vitt A., Khaikin S. *Theory of Oscillators*. Oxford, Pergamon Press (1966)].
8. Panovko Ya. G., Gubanova I. I. *Stability and oscillations of elastic systems*. Moscow, Nauka Publ. (1987). (In Russian)
9. Tregubov V. P. Systems with a non-integer number of degrees of freedom. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics* **850**, 83–90 (2009). (In Russian)
10. Ziegler H. *Principles of Structural Stability*. Waltham, Massachusetts, Toronto, London, Blaisdell Publishing Company (1968). [Rus. ed.: Ziegler H. *Osnovy teorii ustojchivosti konstrukcij*. Moscow, Mir Publ. (1971)].
11. Muravyov A. S., Smirnov A. S. Dynamics and stability of movement of a tractor with a trailer. In: *Week of Science of SPbPU*. November 18–23, 2019, St Petersburg, 92–95 (2019). (In Russian)
12. Birger I. A., Panovko Ya. G. (eds). *Strength, stability, vibrations*. Vol. 3. Moscow, Mashinostroenie Publ. (1968). (In Russian)
13. Muravyov A. S., Smirnov A. S. Optimization of damping of oscillations of a pendulum with an elastic-movable suspension point. In: *The Ninth Polyakhov's Reading. Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics*. March 9–12, 2021, St Petersburg, 115–117 (2021). (In Russian)
14. Karman von T., Biot M. A. *Mathematical Methods in Engineering*. McGraw, Hill (1940). [Rus. ed.: Karman T., Bio M. *Matematicheskie metody v inzhenernom dele*. Moscow, Leningrad, GITTL Publ. (1946)].

15. Lurie A. I. *Analiticheskaya mekhanika*. Moscow, Fizmatgiz Publ. (1961). (In Russian) [Eng. transl.: Lurie A. I. *Analytical mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag (2002)].

16. Besekersky V. A., Popov E. P. *Theory of automatic control systems*. Moscow, Nauka Publ. (1972). (In Russian)

Received: July 20, 2021
Revised: August 30, 2021
Accepted: September 2, 2021

Authors' information:

Alexey S. Smirnov — smirnov.alexey.1994@gmail.com

Alexander S. Muravyov — Muravyoff97@mail.ru