МАТЕМАТИКА

УДК 517.98
MSC 46A32

О пространстве операторов Шварца в симметричном пространстве Фока и дуальном к нему

Г. Г. Амосов[1,2,3,4], *Е. Л. Байтенов*[1,3,5]

[1] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
Российская Федерация, 119991, Москва, ул. Губкина, 8
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[3] Московский физико-технический институт,
Российская Федерация, 141701, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9
[4] Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
Российская Федерация, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
[5] Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Российская Федерация, 150003, Ярославль, ул. Советская, 14

Для цитирования: *Амосов Г. Г., Байтенов Е. Л.* О пространстве операторов Шварца в симметричном пространстве Фока и дуальном к нему // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 193–200. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.201

Давней проблемой, возникающей при построении математического аппарата квантовой механики, является необходимость работы с неограниченными операторами. Поскольку пространство ядерных операторов является предсопряженным для алгебры всех ограниченных операторов, можно считать состояниями квантовой системы ядерные операторы, а наблюдаемыми считать ограниченные операторы. В этом случае взятие следа для произведения ядерного оператора (квантового состояния) и ограниченного оператора (квантовой наблюдаемой) дает среднее значение наблюдаемой в фиксированном состоянии квантовой системы. Существование такого среднего для неограниченных операторов не гарантировано. Если мы хотим определить пространство наблюдаемых, включающее такие естественно возникающие неограниченные операторы, как координата и импульс, для которых всегда определены средние значения, следует рассматривать пространство состояний меньшее, чем все ядерные операторы. Недавно такой подход был математически точно реализован в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^N)$. В качестве пространства состояний было выбрано так называемое пространство операторов Шварца, снабженное системой полунорм и являющееся пространством Фреше. Операторы Шварца представляют из себя интегральные операторы, чьи ядра являются функциями, принадлежащими обычному пространству Шварца. Дуальное пространство к пространству операторов Шварца нужно считать пространством квантовых наблюдаемых, и оно действительно включает такие стандартные наблюдаемые, как полиномы от произведений операторов координаты и импульса. В предлагаемой работе мы переносим данный подход на симметричное пространство Фока $\mathcal{H} = F(\mathfrak{H})$ над бесконечномерным сепарабельным гильбертовым пространством $\mathfrak{H}$. Мы вводим пространство операторов Шварца в $F(\mathfrak{H})$ и определяем, какие из стандартных операторов квантового белого шума принадлежат пространству, дуальному к пространству операторов Шварца.

Ключевые слова: пространство операторов Шварца, симметричное пространство Фока, квантовый белый шум.

1. Введение. Хорошо известно, что возникающие естественным образом в квантовой механике алгебры наблюдаемых могут состоять из неограниченных операторов. Классическим примером является алгебра канонических коммутационных соотношений $A(\mathfrak{H})$, порожденная так называемыми операторами рождения $a^*(f)$ и сопряженными с ними операторами уничтожения $a(g)$, удовлетворяющими тождествам [1]

$$a^*(\lambda f + \mu g) = \lambda a^*(f) + \mu a^*(g),$$

$$a(g)a^*(f) - a^*(f)a(g) = \langle g, f\rangle \mathrm{I}, \quad a(g)a(f) - a(f)a(g) = 0, \tag{1}$$

где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ и f, g лежат в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, линейным по второму аргументу. Поскольку элементы $a(f)a^*(f)$ и $a^*(f)a(f)$ принадлежат конусу положительных элементов алгебры $A(\mathfrak{H})$, получаем, что не существует представления мономов, порожденных операторами рождения и уничтожения, удовлетворяющими соотношениям (1), и ограниченными операторами в гильбертовом пространстве. Возникающие при этом сложности можно решать по разному. Можно переписать соотношения (1) в так называемой форме Вейля для операторов $U(f) = \exp(i(a(f) + a^*(f))),\ V(g) = \exp(a(g) - a^*(g))$, удовлетворяющих соотношениям [2]

$$U(f+g) = U(f)U(g), \quad V(f+g) = V(f)V(g),$$

$$U(f)V(g) = \exp(2i\mathrm{Im}\langle g, f\rangle)V(g)U(f), \tag{2}$$

$f, g \in \mathfrak{H}$. Для соотношений (2) уже существуют представления π унитарными операторами в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, порождающие алгебры фон Неймана $M = \pi(A(\mathfrak{H}))''$, для которых операторы $\pi(x),\ x \in A(\mathfrak{H})$, являются присоединенными в смысле обычного определения [3].

Обозначим через $B(\mathcal{H})$ алгебру всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пространство ядерных операторов $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ является предсопряженным к алгебре $B(\mathcal{H})$, и соотношение двойственности определяется через след:

$$x(\rho) = \mathrm{Tr}(\rho x),\ x \in B(\mathcal{H}),\ \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

Другим подходом к работе с неограниченными операторами является построение топологического пространства $\mathfrak{S}^S \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, для которого дуальное пространство $\mathfrak{S}^S$ включало бы не только $B(\mathcal{H})$, но и неограниченные наблюдаемые требуемого вида.

Недавно [4] такая идея была реализована для случая $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^N)$. На пространстве $\mathfrak{S}^S$ была определена система полунорм, и было доказано, что оно является пространством Фреше. В пространстве $\mathcal{H}$ можно ввести операторы координаты и импульса $q_j, p_j,\ 1 \leq j \leq N$, по стандартным формулам:

$$(q_j f)(\overline{x}) = x_j f(\overline{x}), \quad (p_j f)(\overline{x}) = -i \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}), \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^N,$$

где можно ограничиться лишь функциями из пространства Шварца $f \in S(\mathbb{R}^N)$. В конструкции [4] в дуальное пространство $(\mathfrak{S}^S)'$ попадают мономы от операторов координат q_j и импульсов $p_j,\ 1 \leq j \leq N$. Операторы

$$a_j = \frac{q_j + ip_j}{\sqrt{2}}, \quad a_j^* = \frac{q_j - ip_j}{\sqrt{2}}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

порождают алгебру канонических коммутационных соотношений $A(\mathfrak{H})$, для которой $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^N$, то есть $\dim \mathfrak{H} = N$. В [5] были исследованы различные функциональные представления пространства операторов Шварца $\mathfrak{S}^S$ в смысле определения [4]. В предлагаемой работе мы распространяем данный подход на случай бесконечной размерности пространства образующих алгебры $A(\mathfrak{H})$, то есть $\dim \mathfrak{H} = +\infty$. Как удалось выяснить, хотя в дуальное пространство $(\mathfrak{S}^S)'$ попадают мономы от операторов рождения и уничтожения, ему не принадлежит оператор числа частиц в симметричном пространстве Фока.

2. Симметричное пространство Фока. В данном разделе мы приведем стандартные сведения из теории симметричного пространства Фока [6]. Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Симметричное пространство Фока $\mathcal{H} = F(\mathfrak{H})$ определяется как

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}^{\otimes_s n}. \tag{3}$$

Нулевой симметрической тензорной степенью пространства $\mathfrak{H}$ по соглашению считается одномерное пространство, порожденное фиксированным вакуумным вектором Ω, $\|\Omega\| = 1$.

Проектор на прямое слагаемое $\mathfrak{H}^{\otimes_s n}$ в (3) будем обозначать через P_n.

Если $\mathfrak{H}$ — пространство состояний квантовой системы (частицы) или одночастичное пространство, то пространство $\mathfrak{H}^{\otimes_s n}$ интерпретируется как n-частичное пространство. При этом симметризация соответствует частицам Бозе, для которых волновая функция n тождественных частиц не должна зависеть от их перестановок.

Рассмотрим произвольный элемент $f \in \mathfrak{H}$. Экспоненциальный вектор $e(f) \in \mathcal{H}$ вводится соотношением

$$e(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}$$

(где $f^{\otimes 0} \equiv \Omega$). Легко проверить, что скалярное произведение экспоненциальных векторов равно

$$\langle e(f), e(g) \rangle = e^{\langle f, g \rangle}.$$

Экспоненциальные векторы порождают пространство Фока $\mathcal{H}$.

Для любого вектора $f \in \mathfrak{H}$ неограниченный линейный оператор уничтожения $a(f)$ в пространстве $\mathcal{H}$ вводится на экспоненциальных векторах формулой

$$\forall g \in \mathfrak{H}\colon a(f)e(g) = \langle f, g\rangle\, e(g). \tag{4}$$

Можно проверить, что заданный таким образом оператор $a(f)$ можно продолжить до замкнутого оператора, и далее мы будем считать, что оператор $a(f)$ замкнут. Поскольку он плотно определен в $\mathcal{H}$, сопряженный оператор $a^*(f)$, называемый оператором рождения, также замкнут. Можно проверить, что все экспоненциальные векторы лежат в области определения каждого из операторов $a^*(f), f \in \mathfrak{H}$. Также оказывается, что все векторы из прямых слагаемых в (3) лежат в областях определения всевозможных операторов $a(f)$, $a^*(f)$. При этом

$$\forall g \in \mathfrak{H}\colon a(f)g^{\otimes n} = \sqrt{n}\,\langle f, g\rangle\, g^{\otimes(n-1)}. \tag{5}$$

Для вывода (5) достаточно подставить tg вместо g в (4) и взять n-ю производную по t при $t = 0$.

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям (1), благодаря которым любой моном от них выражается через мономы, в которых сначала следуют операторы рождения, а затем — операторы уничтожения (нормально упорядоченные мономы).

Пусть H — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$. Такой оператор определяет сильно непрерывную однопараметрическую группу, состоящую из унитарных операторов $U_t = e^{-itH}$. Действие этой группы можно естественным образом распространить на каждую симметрическую тензорную степень пространства $\mathfrak{H}$ и затем на пространство Фока $\mathcal{H}$. Соответствующая унитарная группа в пространстве Фока также сильно непрерывна и, следовательно, по теореме Стоуна имеет самосопряженный генератор, обозначаемый $\lambda(H)$. Для произвольного замкнутого оператора K в пространстве $\mathfrak{H}$ полагают $\lambda(K) = \lambda\left(\frac{1}{2}(K + K^*)\right) + i\lambda\left(\frac{1}{2i}(K - K^*)\right)$.

3. Пространство операторов Шварца. Рассмотрим линейное пространство $\mathfrak{S}^S$, состоящее из ядерных операторов $\rho \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, для которых операторы $m\rho$ и замыкания операторов ρm являются ядерными при любом мономе m, составленном из операторов рождения и уничтожения. Требование ядерности оператора $m\rho$ включает условие, что область значений оператора ρ должна лежать в области определения любого монома m. Во втором случае оператор ρm определен не на всем пространстве $\mathcal{H}$, а на области определения монома m, поэтому берется его замыкание.

Подпространство $\mathfrak{S}^S \subset \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ является плотным в следовой норме, так как в $\mathfrak{S}^S$ лежат всевозможные операторы ранга 1 вида $|\psi\rangle\langle\varphi|$, где ψ и φ включают конечное число прямых слагаемых относительно разложения (3).

Определим семейство полунорм на $\mathfrak{S}^S$ формулой

$$\forall n, k \geq 0\colon \|\rho\|_{k,n} = \sup_{\substack{f_1,\dots,f_n \in \mathfrak{H} \\ \|f_j\| \leq 1 \\ g_1,\dots,g_k \in \mathfrak{H} \\ \|g_\ell\| \leq 1}} \|a^*(f_1)\dots a^*(f_n)a(g_1)\dots a(g_k)\rho\|_1 < \infty. \tag{6}$$

Элементы пространства $\mathfrak{S}^S$ будем называть операторами Шварца. Разделяющее семейство полунорм (6) наделяет $\mathfrak{S}^S$ топологией локально выпуклого пространства.

Предложение 1. *Пространство $\mathfrak{S}^S$ является пространством Фреше.*

Доказательство. Пусть $\{\rho_\ell\}_{\ell=1}^\infty \subset \mathfrak{S}^S$ — подпоследовательность, фундаментальная в каждой из полунорм $\|\cdot\|_{n,k}$. Из фундаментальности по полунорме $\|\cdot\|_{0,0}$ получаем, что ρ_ℓ сходится к некоторому оператору $\rho \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ при $\ell \to \infty$.

Покажем по индукции, что для любого монома m из операторов рождения и уничтожения оператор $m\rho$ ядерный и $m\rho_\ell \xrightarrow{\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})} m\rho$. База $m = I$ уже проверена. Предположим, что оператор $m\rho$ ядерный и $m\rho_\ell \xrightarrow{\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})} m\rho$. Фиксируем $\psi \in \mathcal{H}$. Тогда $(m\rho_\ell)\psi \xrightarrow{\mathcal{H}} (m\rho)\psi$. Для любого $f \in \mathfrak{H}$ последовательность $a(f)m\rho_\ell$ сходится в $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, а значит, последовательность $(a(f)m\rho_\ell)\psi$ фундаментальна в $\mathcal{H}$ и, следовательно, сходится. Тогда из замкнутости оператора $a(f)$ получаем, что $(m\rho)\psi$ лежит в области определения $a(f)$ и $(a(f)m\rho_\ell)\psi \to (a(f)m\rho)\psi$. Значит, предел последовательности $a(f)m\rho_\ell$ в $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ равен $a(f)m\rho$. Аналогично проверяется, что $a^*(f)m\rho$ — ядерный оператор и что последовательность $a^*(f)m\rho_\ell$ сходится к нему в пространстве $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

Далее, повторяя рассуждения с заменой ρ_ℓ на ρ_ℓ^*, получаем, что для любого монома m оператор $m\rho^*$ ядерный и $m\rho_\ell^*$ сходится к $m\rho^*$. Следовательно, оператор $m^*\rho$ имеет ядерное замыкание, к которому в $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ сходятся замыкания операторов $m^*\rho_\ell$.

Пусть $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_k$ — векторы в $\mathfrak{H}$ с нормами, не превышающими единицу. Тогда

$$\|a^*(f_1)\ldots a^*(f_n)a(g_1)\ldots a(g_k)\rho\|_1 = \lim_{\ell\to\infty} \|a^*(f_1)\ldots a^*(f_n)a(g_1)\ldots a(g_k)\rho_\ell\|_1 \leq \\ \leq \limsup_{\ell\to\infty} \|\rho_\ell\|_{n,k}\,.$$

Получаем $\|\rho\|_{n,k} \leq \limsup_{\ell\to\infty} \|\rho_\ell\|_{n,k} < \infty$. Значит, $\rho \in \mathfrak{S}^S$. □

4. Отсутствие среднего числа частиц. Определение пространства $\mathfrak{S}^S$ операторов Шварца в разделе 3 гарантирует, что любой многочлен P от операторов рождения и уничтожения задает формулой $\rho \mapsto \operatorname{Tr} P\rho$ непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{S}^S$. Введем в пространстве Фока оператор числа частиц

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} n I_{\mathcal{H}}^{\otimes n}.$$

В случае конечномерного пространства $\mathfrak{H}$ он является многочленом от операторов рождения и уничтожения:

$$\mathcal{N} = \sum_{k=1}^{\dim \mathfrak{H}} a^*(f_k)a(f_k)$$

для любого ортонормированного базиса (f_k) в пространстве $\mathfrak{H}$. Получаем, что при $\dim \mathfrak{H} < \infty$ оператор числа частиц $\mathcal{N}$ задает непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{S}^S$ («среднее число частиц»).

Естественно задать вопрос, будет ли $\mathcal{N}$ порождать линейный непрерывный функционал на $\mathfrak{S}^S$ для бесконечномерного $\mathfrak{H}$. Мы предъявим пример, показывающий, что ответ отрицателен. Кроме сравнения со случаем $\dim \mathfrak{H} < \infty$, исследование данного вопроса имеет следующий неформальный смысл. Определяя пространство Шварца, мы уменьшаем множество допустимых квантовых состояний. Отсутствие среднего числа частиц показывает, что наше ограничение не слишком сильно: оно достаточно для существования средних от операторов рождения и уничтожения и мономов от них, но уже оператор числа частиц может иметь бесконечное среднее.

Итак, покажем, что при $\dim \mathfrak{H} = \infty$ существует оператор

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \in \mathfrak{S}^S, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1, \quad \pi_n \geq 0, \quad \psi_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}, \quad \|\psi_n\| = 1,$$

такой, что

$$\operatorname{Tr}(\rho\mathcal{N}) = +\infty.$$

Выберем ортонормированный базис $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathfrak{H}$. Положим

$$\psi_n = \frac{\sum_{j=1}^{2^n} u_j^{\otimes n}}{2^{n/2}}, \quad \pi_n = \frac{6}{\pi^2(n+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Предложение 2. *Оператор*

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$$

принадлежит пространству операторов Шварца $\mathfrak{S}^S$*, но ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n \equiv \operatorname{Tr}(\rho\mathcal{N})$$

расходится.

Доказательство. Очевидно, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n$ расходится. Осталось проверить, что ρ — оператор Шварца. Заметим, что $|\psi_n\rangle\langle\psi_n| \in \mathfrak{S}^S$. С учетом того факта, что $\||\varphi\rangle\langle\psi|\|_1 = \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$ для любых векторов φ, ψ, достаточно убедиться в том, что для любых $p, q \geq 0$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \sup_{\substack{f_1,\dots,f_p \in \mathfrak{H} \\ \|f_j\| \leq 1 \\ g_1,\dots,g_q \in \mathfrak{H} \\ \|g_\ell\| \leq 1}} \|a^*(f_1)\dots a^*(f_p)a(g_1)\dots a(g_q)\psi_n\| \tag{7}$$

сходится.

Разберем случай $q > 0$ (случай $q = 0$ сводится к нему благодаря коммутационным соотношениям).

Заметим, что для любого $g \in \mathfrak{H}$, $\|g\| \leq 1$, справедливо

$$\|a(g)\psi_n\| = \frac{\left\| \sum_{\ell=1}^{2^n} \sqrt{n} \, \langle g, u_\ell \rangle \, u_\ell^{\otimes j-1} \right\|}{2^{n/2}} = \frac{\sqrt{n \sum_{\ell=1}^{2^n} |\langle g, u_\ell \rangle|^2}}{2^{n/2}} \leq \sqrt{n} 2^{-n/2}.$$

Тогда с учетом действия операторов рождения и уничтожения на тензорные степени одночастичного пространства получаем

$$\forall f_1 \dots f_p, g_1 \dots, g_q \in \mathfrak{H}, \|g_i\|, \|f_i\| \leq 1\colon \ \|a^*(f_1)\dots a^*(f_p)a(g_1)\dots a(g_q)\psi_n\| \leq$$
$$\leq (n+p)^{p/2}(n+q-1)^{(q-1)/2}\sqrt{n}2^{-n/2}.$$

Величина в правой части ограничена при фиксированных p, q (так как стремится к нулю при $n \to \infty$), а следовательно, ряд (7) сходится. $\square$

5. Непрерывность мер квантового белого шума в некоторых случаях. Возникающие в квантовом стохастическом исчислении [6] операторнозначные меры квантового белого шума состоят из операторов вида $a(f)$, $a^*(f)$, $\lambda(K)$. Непрерывность функционалов, порожденных операторами $a(f)$ и $a^*(f)$ на пространстве $\mathfrak{S}^S$ операторов Шварца, непосредственно следует из определения локально выпуклой структуры на нем. Попробуем частично ответить на вопрос, будет ли оператор $\lambda(K)$ задавать непрерывный функционал на $\mathfrak{S}^S$.

В общем случае ответ отрицателен. Действительно, $\lambda(I_{\mathfrak{H}})$ для тождественного оператора $I_{\mathfrak{H}}$ в $\mathfrak{H}$ оказывается равным оператору $\mathcal{N}$ числа частиц в $\mathcal{H} = F(\mathfrak{H})$, для которого был приведен пример отсутствия среднего.

Покажем, что если $K \in B(\mathfrak{H})$ — конечномерный оператор, то $\lambda(K) \in (\mathfrak{S}^S)'$. Достаточно рассмотреть случай $K = K^*$. Пусть

$$K = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell |f_\ell\rangle\langle f_\ell|, \quad \alpha_\ell \in \mathbb{R}, \quad \langle f_\ell f_{\ell'}\rangle = \delta_{\ell\ell'},$$

— спектральное разложение оператора K. Тогда оператор

$$\lambda(K) = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_n a^*(f_n) a(f_n)$$

является многочленом от операторов рождения и уничтожения и, следовательно, определяет функционал из $(\mathfrak{S}^S)'$.

6. Заключение. Мы определили пространство операторов Шварца $\mathfrak{S}^S$ в симметричном пространстве Фока $F(\mathfrak{H})$ и доказали, что оно является пространством Фреше. Данный подход обобщает конструкцию [4] на случай бесконечномерного одночастичного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Доказано, что оператор числа частиц не принадлежит дуальному пространству $(\mathfrak{S}^S)'$. Тем самым получается, что не все меры квантового белого шума [6] лежат в дуальном пространстве.

Литература/References

1. Araki H. On the diagonalization of a bilinear Hamiltonian by a Bogoliubov transformation. *Publ. RIMS Kyoto Univ. Ser. A* **4**, 387–412 (1968).

2. Araki H. On representations of the canonical commutation relations. *Commun. Math. Phys.* **20**, 925 (1971).

3. Blackadar B. *Operator algebras. Theory of C-algebras and von Neumann algebras.* In Ser.: Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 122. Springer (2006).

4. Keyl M., Kiukas J., Werner R. F. Schwartz operators. *Rev. Math. Phys.* **28** (3), 1630001 (2016).

5. Amosov G. G. On Various Functional Representations of the Space of Schwarz Operators. *J. Math. Sci.* **252** (1), 1–7 (2021). https://doi.org/10.1007/s10958-020-05136-x

6. Parthasarathy K. R. *An introduction to quantum stochastic calculus.* Springer (1992).

Статья поступила в редакцию 18 октября 2021 г.;
доработана 28 ноября 2021 г.;
рекомендована к печати 2 декабря 2021 г.

Контактная информация:

Амосов Григорий Геннадьевич — д-р физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр.; gramos@mi-ras.ru
Байтенов Егор Леонидович — студент; baiteneg@mail.ru

On the space of Schwartz operators in the symmetric Fock space and its dual

G. G. Amosov[1,2,3,4], *E. L. Baitenov*[1,3,5]

[1] Steklov Mathematical Institute of RAS,
8, ul. Gubkina, Moscow, 119991, Russian Federation
[2] St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation
[3] Moscow Institute of Physics and Technology,
9, Institutskii per., Dolgoprudny, Moscow region, 141701, Russian Federation
[4] Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of RAS,
112, ul. Chernyshevskogo, Ufa, 450008, Russian Federation
[5] P. G. Demidov Yaroslavl State University,
14, ul. Sovetskaya, Yaroslavl, 150003, Russian Federation

For citation: Amosov G. G., Baitenov E. L. On the space of Schwartz operators in the symmetric Fock space and its dual. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 193–200. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.201 (In Russian)

A long-standing problem that arises when constructing the mathematical apparatus of quantum mechanics is the need to work with unbounded operators. Since the space of nuclear operators is preconjugate for the algebra of all bounded operators, we can consider the states of a quantum system as nuclear operators, and consider bounded operators as observables. In this case, taking the trace for the product of a nuclear operator (a quantum state) and a bounded operator (a quantum observable) gives the average value of a quantum observable in a fixed state. The existence of such an average for unbounded operators is not guaranteed. If we want to define a space of observables that includes such naturally occurring unbounded operators as the position and momentum operators, for which average values are always determined, we should consider a space of states smaller than all nuclear operators. Recently, this approach has been mathematically correct implemented in the Hilbert space $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^N)$. The so-called space of Schwarz operators, equipped with a system of semi-norms and being a Frechet space, was chosen as the space of states. Schwarz operators appeared to be integral operators whose kernels are functions belonging to the usual Schwarz space. The dual space to the space of Schwarz operators should be considered as the space of quantum observables and it really includes such standard observables as polynomials from the products of the position and momentum operators. In the present work we transfer this approach to the symmetric Fock space $\mathcal{H} = F(\mathfrak{H})$ over an infinite dimensional separable Hilbert space $\mathfrak{H}$. We introduce the space of Schwartz operators in $F(\mathfrak{H})$ over an infinite dimensional separable space $\mathfrak{H}$ and investigate which of the standard operators of quantum white noise belong to the space dual to the space of Schwartz operators.

Keywords: the space of Schwartz operators, the symmetric Fock space, quantum white noice.

Received: October 18, 2021
Revised: November 28, 2021
Accepted: December 2, 2021

Authors' information:

Grigori G. Amosov — gramos@mi-ras.ru
Egor L. Baitenov — baiteneg@mail.ru