УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2
MSC 62G32

О некоторых соотношениях, возникающих между рекордами при переходе от непрерывных к дискретным распределениям*

М. Ахсануллах[1], *В. Б. Невзоров*[2], *А. В. Степанов*[3]

[1] Университет Райдера, 08648, Лоуренсвилл, Лоуренсвилл Роуд, 2083, США
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[3] Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта,
Российская Федерация, 236041, Калининград, ул. А. Невского, 14

Для цитирования: *Ахсануллах М., Невзоров В. Б., Степанов А. В.* О некоторых соотношениях, возникающих между рекордами при переходе от непрерывных к дискретным распределениям // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 209–218. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.203

В настоящей работе рассматривается дискретизация непрерывных распределений и изучаются соотношения, возникающие между непрерывными рекордными величинами, слабыми рекордными величинами и дискретными рекордными величинами, получаемыми из непрерывных рекордных величин при проведении данной дискретизации. В начале работы сравнивается количество непрерывных рекордных величин, принадлежащих числовым интервалам, и количество дискретных рекордных величин и слабых рекордных величин, принимающих целые неотрицательные значения. Далее в работе вводится понятие сильных рекордных величин и обсуждаются их свойства. Показывается, что такие рекордные величины сохраняются при дискретизации. В работе также анализируется поведение экспоненциальных рекордных величин при проведении дискретизации. Приводится эксперимент статистического моделирования. Показывается, что эксперимент подтверждает правильность излагаемых в работе теоретических результатов.

Ключевые слова: рекорды, сильные рекорды, слабые рекорды, дискретизация, экспоненциальное распределение, геометрическое распределение.

1. Введение. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин. Для этой последовательности определим последовательности рекордных моментов $L(n)$ $(n \geq 1)$ и рекордных величин $X(n)$ $(n \geq 1)$:

$$\begin{gathered} L(1) = 1, \quad X(1) = X_1, \\ L(n+1) = \min\left\{j : j > L(n),\, X_j > X_{L(n)}\right\} \quad (n \geq 1), \\ X(n) = X_{L(n)} \quad (n \geq 2). \end{gathered} \tag{1}$$

Если в соотношении (1) второй знак неравенства $>$ заменить знаком $\geq$, то вместо последовательностей рекордных моментов $L(n)$ и рекордных величин $X(n)$ получим последовательности слабых рекордных моментов $L^w(n)$ и слабых рекордных

*Работа В. Б. Невзорова поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 18-01-00393). Работа А. В. Степанова поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2021-1748).

величин $X^w(n)$. При таком определении рекордов повторение предыдущего рекорда также засчитывается за рекорд. Примеры слабых рекордов могут дать, например, те виды спорта, где спортсмен, повторивший рекордное достижение, также объявляется рекордсменом. Отметим, что слабые рекорды представляют самостоятельный интерес только в дискретном случае.

Теоретические результаты и практические приложения, посвященные рекордам, широко обсуждаются в многочисленных публикациях рекордной тематики (см., например, монографии [1–4] и ссылки, приводимые в них).

В данной работе будем использовать записи $[x]$ и $\lceil x \rceil$ для обозначения целой части числа x и наименьшего целого числа, большего или равного x соответственно. Пусть в дальнейшем, $X, X_1, X_2, \dots$ — непрерывные неотрицательные одинаково распределенные случайные величины с распределением

$$F(x) = P(X \le x) = P(X < x).$$

Тогда $[X], [X_1], [X_2], \dots$ — независимые одинаково распределенные величины, принимающие значения $0, 1, \dots$ с распределением $G(x) = P([X] \le x)$ и функцией вероятности $p_n = P([X] = n) = F(n+1) - F(n)$ $(n \ge 0)$. Отметим, что для неотрицательных целых n справедливо равенство $G(n) = F(n+1)$. Переход от непрерывного распределения F к дискретному распределению G назовем дискретизацией непрерывного распределения F.

Дискретизационные подходы и методы важны в связи с различными приложениями, возникающими в прикладных задачах физики, технических наук, экономики. При исследовании таких приложений экспериментальные показания снимаются с различных сенсоров и датчиков (тахометров, манометров, спидометров), фиксирующих характеристики изучаемых процессов. Найденные статистические данные могут отражать силу тока, продолжительность жизни, доходы населения и др. Полученные наблюдения округляются до целых значений, десятков или сотен целых значений градусов, метров, километров, секунд, месяцев, лет, долларов, процентов. Здесь было бы интересно понять, сколько рекордных величин было потеряно (или появилось новых слабых рекордных величин) после процесса дискретизации.

В данной работе наряду с одинаково распределенными дискретными величинами $[X], [X_1], [X_2], \dots$ рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные дискретные величины $Y, Y_1, Y_2, \dots$ такие, что $Y \stackrel{d}{=} [X]$, где знак $\stackrel{d}{=}$ обозначает равенство по распределению. В непрерывном случае наряду с рекордами рассмотрим сильные рекорды. Определим последовательности сильных рекордных моментов $L^{st}(n)$ $(n \ge 1)$ и величин $X^{st}(n)$ $(n \ge 1)$ равенствами

$$L^{st}(1) = 1, \quad X^{st}(1) = X(1),$$

$$L^{st}(n+1) = \min\left\{ j : j > L^{st}(n),\, X_j > \lceil X_{L^{st}(n)} \rceil \right\} \quad (n \ge 1),$$

$$X^{st}(n) = X_{L^{st}(n)} \quad (n \ge 2).$$

Отметим, что после дискретизации некоторого непрерывного распределения F две сильные рекордные величины $X^{st}(n) < X^{st}(n+1)$ $(n \ge 1)$ дают две соответствующие дискретные рекордные величины $Y(n) = [X^{st}(n)]$ и $Y(n+1) = [X^{st}(n+1)]$ такие, что $Y(n) < Y(n+1)$. Таким образом, сильные рекорды «выживают» при дискретизации. Отметим также, что непрерывные рекордные величины $X(n) < X(n+j)$ $(n, j \ge 1)$

после процесса дискретизации могут дать две слабые рекордные величины $Y^w(n) = [X(n)]$ и $Y^w(n+j) = [X(n+j)]$ такие, что $Y^w(n) = Y^w(n+j)$.

В данной статье обсудим соотношения, связывающие непрерывные дискретные и слабые рекордные величины. Содержание настоящей работы следующее. Во втором разделе рассмотрим количество непрерывных рекордов, регистрируемых на интервалах числовой прямой, и количество дискретных и слабых рекордов, принимающих целые неотрицательные значения. Распределения сильных рекордных величин будут проанализированы в третьем разделе работы. В четвертом разделе исследуем поведение экспоненциальных рекордов, подвергшихся процедуре дискретизации, и приведем результаты эксперимента статистического моделирования.

2. Количество рекордов, регистрируемых на интервалах и в точках. Во втором разделе нашей статьи приведем три леммы, полученные, соответственно, в работах [5, 6] и [7]. В данных леммах анализируется количество непрерывных рекордов, регистрируемых на числовых интервалах, и количество дискретных и слабых рекордов, принимающих целые неотрицательные значения. Определим случайную величину $\mu(a,b)$ следующим образом:

$\mu(a,b) = k,$ если k непрерывных рекордных величин принадлежит интервалу (a,b).

Здесь $k \geq 0$ и $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Следующий результат получен в работе [5].

Лемма 1. *Случайные величины $\mu(a,b)$, рассматриваемые для различных непересекающихся интервалов, независимы, причем*

$$P(\mu(a,b) = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k! \quad (k \geq 0),$$

где $\lambda = -\ln\left(\frac{1-F(b)}{1-F(a)}\right)$.

Отметим, что распределение $X(n)$ может быть найдено через функцию вероятности величины μ. Действительно,

$$F_n(x) = P(X(n) \leq x) = P(\mu(-\infty, x) \geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(-\ln(1-F(x)))^i(1-F(x))}{i!} =$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{-\ln(1-F(x))} e^{-u}u^{n-1}du \ (n \geq 1).$$

Рассмотрим независимые одинаково распределенные дискретные случайные величины $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ такие, что $Y = 0, 1, \ldots$. Определим величину ξ_n^w следующим образом:

$$\xi_n^w = k \quad (k \geq 0),$$

если k слабых рекордных величин $Y^w(i)$ равны значению n $(n = 0, 1, \ldots)$. Следующий результат был получен в статье [7].

Лемма 2. *Случайные величины ξ_n^w $(n = 0, 1, \ldots)$ независимы и*

$$P\{\xi_n^w = k\} = \beta_n(1-\beta_n)^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $\beta_n = q_{n+1}/q_n,\ q_n = P(Y \geq n) = 1 - G(n) = 1 - F(n+1)$.

Отметим, что $P(Y^w(n) > m) = P(\xi_0^w + \xi_1^w + \ldots + \xi_m^w < n)$, где $n \geq 1$ и $m \geq 0$. Для дискретного случая определим величину η_n $(= 0, 1)$ следующим образом:

$$\eta_n = 1, \text{ если существует рекордная величина } Y(j) \text{ такая, что } Y(j) = n.$$

Следующий результат был получен в работе [6].

Лемма 3. *Случайные величины* $\eta_0, \eta_1, \ldots$ *независимы и*

$$P(\eta_n = 1) = 1 - \beta_n.$$

Отметим, что $P(Y(n) > m) = P(\eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_m < n)$, где $n \geq 1$ и $m \geq 0$.

Из лемм 1–3 следует, что ожидаемое количество непрерывных рекордов $X(j)$, регистрируемых на интервале $[0, n)$, где $(n \geq 1)$, равно $E\mu[0, n) = -\ln(1 - F(n))$, ожидаемое количество дискретных рекордов $Y(j)$, регистрируемых на множестве $S_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, равно $E(\eta_0 + \ldots + \eta_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1}(1 - \beta_i)$ и, наконец, ожидаемое количество слабых рекордов $Y^w(j)$, регистрируемых на множестве S_n, равно $E(\xi_0^w + \ldots + \xi_{n-1}^w) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{q_i}{q_{i+1}} - 1\right)$. Пользуясь неравенствами

$$1 - x \leq -\ln x \leq \frac{1 - x}{x} \quad (0 < x < 1),$$

можно показать, что

$$E(\eta_0 + \ldots + \eta_{n-1}) \leq E\mu[0, n) \leq E(\xi_0^w + \ldots + \xi_{n-1}^w). \tag{2}$$

Очевидное неравенство $E(\eta_0 + \ldots + \eta_{n-1}) \leq E\mu[0, n)$ отражает тот факт, что после процедуры дискретизации некоторые непрерывные рекорды могут принять одни и те же неотрицательные целые значения и, соответственно, дадут меньшее количество дискретных рекордов. Неравенство $E\mu[0, n) \leq E(\xi_0^w + \ldots + \xi_{n-1}^w)$ может быть прокомментировано следующим образом. Рассмотрим количество непрерывных рекордов $X(j)$, попадающих в интервал $[i, i+1)$, и количество слабых рекордов $Y^w(j)$ таких, что $Y^w(j) = i$. Пусть для некоторых $j \geq 2$ и $k \geq 0$

$$X(j-1) < i < X(j) < \ldots < X(j+k-1) < i+1 < X(j+k).$$

Отметим, что среди величин $X_{L(j)+1}, \ldots, X_{L(j+k-1)-1}$, где $L(n)$ — рекордный момент, соответствующий $X(n)$, могут быть величины, которые не являются рекордами и принадлежат интервалу $[i, i+1)$. После процедуры дискретизации такие величины дадут нам слабые рекордные величины, которые попадут в точку i. Отсюда следует, что $E\mu[i, i+1) \leq E\xi_i^w$.

3. Распределения сильных рекордов. Сильные непрерывные рекорды представляют особый интерес, поскольку они сохраняются после процедуры дискретизации и каждый их них дает свой дискретный рекорд. Исследуем распределения сильных рекордов. Совместная плотность $X^{st}(1), \ldots, X^{st}(n)$ имеет следующий вид:

$$f_{X^{st}(1),\ldots,X^{st}(n-1),X^{st}(n)}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_1)}{1 - F(\lceil x_1 \rceil)} \cdots \frac{f(x_{n-1})}{1 - F(\lceil x_{n-1} \rceil)}\, f(x_n),$$

где $\lceil x_1 \rceil \leq x_2, \lceil x_2 \rceil \leq x_3, \ldots, \lceil x_{n-1} \rceil \leq x_n$. Откуда вытекает, что при $x_n \geq n-1$ плотность $X^{st}(n)$ записывается в виде

$$f_{X^{st}(n)}(x_n) = f(x_n) \sum_{m_{n-1}=n-2}^{[x_n]-1} \sum_{m_{n-2}=n-3}^{m_{n-1}-1} \cdots \sum_{m_1=0}^{m_2-1}$$
$$\frac{F(m_{n-1}+1)-F(m_{n-1})}{1-F(m_{n-1}+1)} \cdot \frac{F(m_{n-2}+1)-F(m_{n-2})}{1-F(m_{n-2}+1)} \cdots \frac{F(m_1+1)-F(m_1)}{1-F(m_1+1)}.$$

Из формулы совместной плотности сильных рекордов также следует, что последовательность $X^{st}(1), X^{st}(2), \ldots$ образует нестационарную цепь Маркова с вероятностями

$$P(X^{st}(n+1) \le y \mid X^{st}(n) = x) = \frac{F(y)-F(x)}{1-F(\lceil x \rceil)} \quad (y \ge \lceil x \rceil \ge n).$$

Для второго рекордного момента находим функцию вероятности

$$\begin{aligned} P(L^{st}(2)=k) &= \int_0^\infty P(X_2 \le \lceil x \rceil, \ldots, X_{k-1} \le \lceil x \rceil, X_k > \lceil x \rceil) dF(x) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 F^{k-2}(m+1)(1-F(m+1)) dF(x+m) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} F^{k-2}(m+1)(1-F(m+1))(F(m+1)-F(m)). \quad (3) \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$EL^{st}(2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2-F(m+1))(F(m+1)-F(m))}{1-F(m+1)} = \infty.$$

Можно обобщить равенство (16) и показать, что последовательность $L^{st}(1)$, $L^{st}(2), \ldots$ образует нестационарную цепь Маркова с вероятностями

$$P(L^{st}(n+1)=j \mid L^{st}(n)=i) = \sum_{m=0}^{\infty} F^{j-i-1}(m+1)(1-F(m+1))(F_n^{st}(m+1)-F_n^{st}(m)),$$

где $F_n^{st}(x) = \int_0^x f_{X^{st}(n)}(u)du$. Можно также показать, что последовательности сильных рекордных моментов и величин стохастически доминируют над соответствующими последовательностями рекордных моментов и величин.

4. Некоторые соотношения между экспоненциальными и геометрическими рекордами. Пусть в дальнейшем $E(1)$ и $\mathrm{Geom}(p)$ обозначают, соответственно, стандартное экспоненциальное распределение и геометрическое распределение с параметром $p \in (0,1)$. Мы будем писать $X \sim E(1)$, если $P(X < x) = 1 - e^{-x}$ $(x > 0)$, и $Y \sim \mathrm{Geom}(p)$, если $P(Y = k) = p(1-p)^k$ $(k \ge 0)$. Отметим, что если $X \sim E(1)$, то $[X] \sim \mathrm{Geom}(1-e^{-1})$. Очевидно, что неравенства в (1) сводятся для стандартного экспоненциального распределения к неравенствам

$$\frac{e-1}{e} n \le n \le (e-1)n. \quad (4)$$

Рассмотрим некоторые представления для рекордов в непрерывном и дискретном случаях. Данные представления позволяют связывать между собой зависимые рекордные величины и суммы независимых слагаемых. Первое из этих представлений справедливо для экспоненциальных рекордов.

Представление 1. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots$ *— последовательность независимых* $E(1)$*-распределенных случайных величин и* $X(1) < X(2) < \ldots$ *— соответствующие рекордные величины. Тогда справедливы равенства*

$$(X(1), X(2), \ldots, X(n)) \stackrel{d}{=} (X_1, X_1 + X_2, \ldots, X_1 + \ldots + X_n)$$

и

$$(X(1), X(2) - X(1), \ldots, X(n) - X(n-1)) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Приведем также аналогичное представление для дискретного случая.

Представление 2. *Пусть* $V_i = Y_i + 1$ $(i \geq 1, V_i = 1, 2, \ldots)$, *где* $Y_i \sim \mathrm{Geom}(p)$, *— последовательность независимых геометрически распределенных случайных величин и* $V(n)$ $(n \geq 1)$ *— соответствующие им рекордные величины. Тогда справедливы равенства*

$$(V(1), V(2), \ldots, V(n)) \stackrel{d}{=} (V_1, V_1 + V_2, \ldots, V_1 + V_2 + \ldots + V_n) \tag{5}$$

и

$$(V(1), V(2) - V(1), \ldots, V(n) - V(n-1)) \stackrel{d}{=} (V_1, V_2, \ldots, V_n). \tag{6}$$

Аналогами представлений (3) и (4) для дискретных рекордов $Y(1) < Y(2) < \ldots$ будут являться представления

$$(Y(1), Y(2), \ldots, Y(n)) \stackrel{d}{=} (V_1 - 1, V_1 + V_2 - 1, \ldots, V_1 + V_2 + \ldots + V_n - 1)$$

и

$$(Y(1), Y(2) - Y(1), \ldots, Y(n) - Y(n-1)) \stackrel{d}{=} (V_1 - 1, V_2, \ldots, V_n).$$

Для последовательности $Y_1, Y_2, \ldots$ рассмотрим также слабые рекордные величины $Y^w(1) = Y_1 \leq Y^w(2) \leq \ldots$, для которых справедливы следующие представления:

$$(Y^w(1), Y^w(2), \ldots, Y^w(n)) \stackrel{d}{=} (Y_1, Y_1 + Y_2, \ldots, Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)$$

и

$$(Y^w(1), Y^w(2) - Y^w(1), \ldots, Y^w(n) - Y^w(n-1)) \stackrel{d}{=} (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n).$$

Теперь проанализируем некоторые соотношения, возникающие между непрерывными и дискретными рекордами. Рассмотрим множество независимых $E(1)$-распределенных случайных величин $X_1 = X(1), \ldots, X_{L(2)} = X(2)$, где $L(2)$ — рекордный момент, соответствующий $X(2)$. Величины $[X_1] = [X(1)], [X_2], \ldots, [X_{L(2)}] = [X(2)]$ будут независимыми геометрически распределенными случайными величинами. Отметим, что $[X_{L(2)}]$ является второй рекордной величиной в последовательности величин $[X_i]$ $(i \geq 1)$ в случае, если $[X_{L(2)}] > [X_1]$, или, что то же самое, $X(2) = X^{st}(2)$. Зафиксируем первую рекордную величину X_1 и представим ее в виде $X_1 = m + x$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$ и $0 \leq x < 1$. Пусть $p_1(m, x)$ и $p_2(m, x)$ — вероятности событий, состоящих в том, что среди величин $[X_1], \ldots, [X_{L(2)}]$ (при условии, что $X_1 = m + x$) есть один или два дискретных рекорда. Из соотношения $X(2) \stackrel{d}{=} X_1 + X_2$ вытекают равенства

$$p_2(m, x) = P([m + x + X_2] \geq m + 1) = P(X_2 \geq 1 - x) = e^{-1+x} \quad (0 \leq x < 1)$$

и

$$p_1(m,x) = P(X_2 < 1-x) = 1 - e^{-1+x} \quad (0 \le x < 1).$$

Пусть p_1 и p_2 — вероятности того, что среди величин $[X_1], \ldots, [X_{L(2)}]$ одна или две величины являются дискретными рекордами. Тогда

$$p_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 e^{-(1-u)} e^{-(m+u)} du = e^{-1} \int_0^1 du \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m} = \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})}$$

и $p_1 = 1 - e^{-1}/(1-e^{-1})$. В результате находим, что $p_1 = (e-2)/(e-1) = 0.4180$ и $p_2 = 1/(e-1) = 0.5820$.

Пусть теперь $N(n)$ — число дискретных рекордных величин среди $[X_1], \ldots, [X_{L(n)}] = [X(n)]$ и $p_1(n,m,x)$ — вероятность того, что среди этих величин есть только одна дискретная рекордная величина, при условии, что $X_1 = m+x$. Как и прежде, зафиксируем величины $X_1 = m+x$ и $[X_1] = m$. Пользуясь соотношением $X(n) \stackrel{d}{=} X_1 + \ldots + X_n$, находим, что

$$\begin{aligned} p_1(n,m,x) = P(N(n) = 1 \mid X_1 = m+x) = \\ = P([X_1 + \ldots + X_n] = [X_1] = m \mid X_1 = m+x) = \\ = P(m \le m + x + X_2 + \ldots + X_n < m+1 \mid X_1 = m+x) = \\ = P(X_2 + \ldots + X_n < 1-x) = \frac{\Gamma(n-1, 1-x)}{(n-2)!}, \end{aligned}$$

где $\Gamma(\alpha, x) = \int_0^x u^{\alpha-1} e^{-u} du$ — неполная гамма-функция. Тогда вероятность того, что среди величин $[X_1], \ldots, [X_{L(n)}]$ есть только одна дискретная рекордная величина, ищется по формуле

$$\begin{aligned} p_1(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 P(N(n) = 1 \mid X_1 = m+u) e^{-(m+u)} du = \\ = \frac{-1}{(1-e^{-1})(n-2)!} \int_0^1 \Gamma(n-1, 1-u) de^{-u}. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$p_1(n) = \frac{\Gamma(n-1,1)}{(1-e^{-1})(n-2)!} - \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})(n-1)!}.$$

Отметим, что $p_1(n) = P(X^{st}(2) > X(n))$. Поскольку $P(X(n) \le 1) = \frac{\Gamma(n,1)}{(n-1)!} \to 0$ $(n \to \infty)$, то отсюда следует, что $p_1(n) \to 0$. Приведем значения $p_1(n)$ для $n = 2, 5, 10$:

$$p_1(2) = 0.418023, \quad \ldots, \quad p_1(5) = 0.005800, \quad \ldots, \quad p_1(10) = 1.762725 * 10^{-7}.$$

Рассмотрим также «диаметрально противоположную» ситуацию, при которой фиксируются n сильных рекордных величин среди $[X_1], \ldots, [X_{L(n)}] = [X(n)]$. Очевидно, что это происходит в случае, когда выполняются неравенства

$$[X_1] < [X_1 + X_2] < \ldots < [X_1 + X_2 + \ldots + X_n].$$

Поскольку вероятности соответствующих событий равны, находим, что

$$p_n(n) = P([X_1] < [X_1 + X_2] < \ldots < [X_1 + X_2 + \ldots + X_n]) =$$
$$= \sum_{0 \le m_1 < m_2 < \ldots < m_n} \int_{[0,1]^n} e^{-(m_1+x_1)} e^{-(m_2-m_1+x_2-x_1)} \ldots$$
$$\ldots e^{-(m_n-m_{n-1}+x_n-x_{n-1})} dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= \sum_{0 \le m_1 < m_2 < \ldots < m_n} \int_{[0,1]^n} e^{-(m_n+x_n)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$
$$= (1 - e^{-1}) \sum_{0 \le m_1 < m_2 < \ldots < m_n} e^{-m_n} = (1 - e^{-1}) \sum_{m_n=n-1}^{\infty} C_{m_n}^{n-1} e^{-m_n}.$$

Используя известное равенство

$$\sum_{m=n-1}^{\infty} C_m^{n-1} z^m = \frac{z^{n-1}}{(1-z)^n},$$

получаем, что $p_n(n) = \left(e^{-1}/(1-e^{-1})\right)^{n-1}$. Отметим здесь, что $p_n(n) = P(L^{st}(n) = n)$.

Очевидно, что для стандартного экспоненциального распределения справедливо равенство

$$f_{X^{st}(n)}(x) = e^{-x}(e-1)^{n-1} \sum_{m_{n-1}=n-2}^{[x]-1} \sum_{m_{n-2}=n-3}^{m_{n-1}-1} \ldots \sum_{m_1=0}^{m_2-1} 1 \quad (n \ge 2).$$

С помощью индукции можно показать справедливость соотношения

$$\sum_{m_{n-1}=n-2}^{[x]-1} \sum_{m_{n-2}=n-3}^{m_{n-1}-1} \ldots \sum_{m_1=0}^{m_2-1} 1 = \frac{([x]-n+2)([x]-n+3)\ldots[x]}{(n-1)!} \quad (n \ge 2).$$

Отсюда получаем

$$f_{X^{st}(n)}(x) = e^{-x}(e-1)^{n-1} \frac{([x]-n+3)([x]-n+1)\ldots[x]}{(n-1)!} \quad (x \ge n-1).$$

Из последней формулы, в частности, следует, что распределение второй сильной рекордной величины имеет вид

$$F_{X^{st}(2)}(x) = 1 - e^{-[x]} - (e-1)[x]e^{-x} \quad (x \ge 1).$$

5. Результаты статистического моделирования. При подготовке данной статьи мы провели следующий эксперимент статистического моделирования. Мы генерировали 100 раз независимые последовательности, состоящие из $E(1)$-распределенных независимых случайных величин, до тех пор, пока для некоторых k не происходили события $X(k) < 10 < X(k+1)$. Затем мы проводили процедуры дискретизации ста выборок $[X_1], \ldots, [X_{L(k)}]$ и считали количество дискретных и слабых рекордов для каждой выборки. Выборочное среднее числа дискретных рекордов оказалось равным 6.4703. Из (3) следует, что гипотетическое математическое ожидание равно $\frac{e-1}{e}10 = 6.3212\ldots$. Выборочное среднее числа слабых рекордов оказалось равным 17.4162. Из (3) следует, что гипотетическое математическое ожидание равно $(e-1)10 = 17.1828\ldots$. Очевидно, что наш эксперимент статистического моделирования косвенно подтвердил правильность излагаемых в работе теоретических результатов.

Литература

1. Ahsanullah M. *Record values theory and applications.* University Press of America (2004).
2. Ahsanullah M., Nevzorov V. B. *Record via Probability Theory.* Atlantis Press (2015).
3. Arnold B., Balakrishnan N., Nagaraja H. *Records.* New York, Wiley (1998).
4. Невзоров В. Б. *Рекорды. Математическая теория.* Москва, Фазис (2000).
5. Shorrock R. W. A limit theorem for inter-record times. *J. Appl. Probab.* **9** (1), 219–223 (1972).
6. Shorrock R. W. On record values and record times. *J. Appl. Probab.* **9** (2), 316–326 (1972).
7. Степанов А. В. Предельные теоремы для слабых рекордов. *Теория вероятн. и ее примен.* **37** (3), 586–590 (1992).

Статья поступила в редакцию 17 октября 2021 г.;
доработана 29 ноября 2021 г.;
рекомендована к печати 2 декабря 2021 г.

Контактная информация:

Ахсануллах Мохаммад — д-р физ.-мат. наук, проф.; ahsan@rider.edu
Невзоров Валерий Борисович — д-р физ.-мат. наук, проф.; valnev@mail.ru
Степанов Алексей Васильевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; alexeistep45@mail.ru

On some relationships between records in the transition from continuous to discrete distributions*

M. Ahsanullah[1], *V. B. Nevzorov*[2], *A. V. Stepanov*[3]

[1] Rider University, 2083 Lawrenceville Road, Lawrenceville, NJ, 08648, USA
[2] St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation
[3] Immanuel Kant Baltic Federal University,
14, ul. A. Nevskogo, Kaliningrad, 236041, Russian Federation

For citation: Ahsanullah M., Nevzorov V. B., Stepanov A. V. On some relationships between records in the transition from continuous to discrete distributions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 209–218. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.203 (In Russian)

In the present work, we consider discretization of continuous distributions and study relations between continuous record values, weak record values and discrete record values obtained from continuous record values by discretization. We first compare the numbers of continuous record values registered in real intervals and the numbers of discrete record values and weak record values located on the sets of non-negative integers. Further in the paper, we introduce the so-called strong continuous record values that hold out after discretization and we discuss their distributional properties. We also analyze what happens

*The V. B. Nevzorov's work was partially supported by Russian Foundation for Basic Research (grant no. 18-01-00393). The work of A. V. Stepanov was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2021-1748).

with record values after discretization of the standard exponential distribution. Finally, we present a simulation experiment, which supports the theoretical results of the paper.

Keywords: records, strong records, weak records, discretization, exponential distribution, geometric distribution.

References

1. Ahsanullah M. *Record values theory and applications.* University Press of America (2004).
2. Ahsanullah M., Nevzorov V. B. *Record via Probability Theory.* Atlantis Press (2015).
3. Arnold B., Balakrishnan N., Nagaraja H. *Records.* New York, Wiley (1998).
4. Nevzorov V. *Rekordy. Matematicheskaja teorija.* Moscow, Fazis Publ. (2000). (In Russian) [Eng. transl.: Nevzorov V. *Records. Mathematical Theory.* In Ser.: Translations of Mathematical Theory, vol. 194. AMS (2001)].
5. Shorrock R. W. A limit theorem for inter-record times. *J. Appl. Probab.* **9** (1), 219–223 (1972).
6. Shorrock R. W. On record values and record times. *J. Appl. Probab.* **9** (2), 316–326 (1972).
7. Stepanov A. V. Limit theorems for weak records. *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya* **37** (3), 586–590 (1992). (In Russian) [Eng. transl.: *Theory Probab. Appl.* **37** (3), 570–574 (1992)].

Received: October 17, 2021
Revised: November 29, 2021
Accepted: December 2, 2021

Authors' information:

Mohammad Ahsanullah — ahsan@rider.edu
Valery B. Nevzorov — valnev@mail.ru
Alexei V. Stepanov — alexeistep45@mail.ru