УДК 517.911 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2
MSC 34A12

# Метрические инварианты поверхностей второго порядка

*Д. Ю. Волков*[1], *К. В. Галунова*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Российская Федерация, 190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

**Для цитирования:** *Волков Д. Ю., Галунова К. В.* Метрические инварианты поверхностей второго порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 219–228. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.204

Статья посвящена классической задаче аналитической геометрии в $n$-мерном евклидовом пространстве, а именно нахождению канонического уравнения квадрики по исходному уравнению. Каноническое уравнение определяется по инвариантам уравнения поверхности второго порядка, т. е. по величинам, которые не меняются при аффинной замене координат пространства. С. Л. Певзнер нашел удобную систему инвариантов: $q$ — ранг расширенной матрицы системы для определения центра симметрии поверхности; корни характеристического многочлена матрицы квадратичных слагаемых уравнения поверхности, т. е. собственные числа этой матрицы; $K_q$ — коэффициент при переменной $\lambda$ в степени $n - q$ в многочлене, равный определителю матрицы порядка $n + 1$, полученной по определенному правилу из исходного уравнения поверхности. Собственные числа матрицы квадратичных слагаемых и коэффициент $K_q$ позволяют выписать каноническое уравнение поверхности. В статье предложено новое простое доказательство результата С. Л. Певзнера. В доказательстве используются только элементарные свойства определителей. Этот алгоритм нахождения канонического уравнения поверхности может найти применение в компьютерной графике.

*Ключевые слова*: инварианты, гиперповерхности второго порядка.

**1. Введение.** Одним из частных вопросов общей теории инвариантов является вопрос о метрических инвариантах уравнений поверхностей второго порядка (квадрик) в вещественном евклидовом пространстве размерности $n$. Эта проблема имеет длинную историю. Б. А. Розенфельд отмечал, что первые инварианты кривых второго порядка открыл Аполлоний Пергский [1, с. 618]. Дальнейшие сведения об инвариантах кривых на плоскости можно найти в книгах по классической теории инвариантов [2–4]. Изучение метрических инвариантов поверхностей в евклидовом пространстве как специального вопроса проективной геометрии отражено в [5, 6]. В литературе на русском языке инварианты кривых и поверхностей в трехмерных пространствах подробно выводятся в фундаментальных курсах аналитической геометрии [7–9]. Инварианты поверхностей в $n$-мерном пространстве описаны в [1]. За основу изложения вопроса в книгах на русском языке был выбран подход П. С. Моденова [7, т. 2, с. 196; 9, с. 290]. При исследовании вводились инварианты полной группы движений и семиинварианты (условные инварианты) — инварианты группы вращений. С. Л. Певзнер разработал новый подход и указал, как можно обойтись без понятия семиинвариантов [10]. К сожалению, эта работа практически неизвестна, и при разработке алгоритмов используют подход с семиинвариантами.

В компьютерной графике часто становится важным определение типа кривой без проведения подробного исследования кривой и поиска новой системы координат [11]. Инварианты позволяют это сделать. Поэтому метод инвариантов широко применяется и в преподавании. Алгоритм определения типа кривой на основе инвариантов С. Л. Певзнера очень простой и не требует длинных вычислений. В настоящей работе приводится новый вывод инвариантов Певзнера, который опирается только на теорию определителей и может быть изложен в университетском курсе линейной алгебры и аналитической геометрии.

**2. Инварианты. Основная теорема.** Поверхностью второго порядка называют множество точек $(x_1, \ldots, x_n)$, заданных уравнением

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0. \tag{1}$$

В матричной форме уравнение (1) имеет вид

$$X^t A X + 2 b^t X + c = 0. \tag{2}$$

Запишем уравнение перехода к новой декартовой системе координат:

$$X = Q X' + h, \tag{3}$$

где столбцы $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $X' = (x_1', \ldots, x_n')^t$ — координаты точки в старой и в новой системах координат, $Q$ — ортогональная матрица порядка $n \times n$, $h$ — вектор-столбец координат нового начала координат в старой системе координат. При $Q = E$, где $E$ — единичная матрица порядка $n \times n$, преобразование является параллельным переносом, а при $h = 0$ — поворотом.

Непосредственно доказывается, что при переходе к новой системе координат уравнение поверхности принимает вид

$$X'^t A' X' + 2 b'^t X' + c' = 0, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} &A' = Q^t A Q, \\ &b' = Q^t A h + Q^t b, \\ &c' = h^t A h + 2 b^t h + c. \end{aligned} \tag{5}$$

В матричной форме формулы (5) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} A' & b' \\ b'^t & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^t & 0 \\ h^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Хорошо известно, что выбрав новую систему координат, можно привести уравнение к простейшему, так называемому каноническому виду. Напомним основные этапы упрощения уравнения квадрики. Центром симметрии квадрики называется такая точка, что при центральной симметрии относительно этой точки квадрика переходит в себя. Центр симметрии находится из системы

$$A x_0 + b = 0. \tag{7}$$

Если поверхность имеет хотя бы один центр симметрии, то поверхность называется центральной [9, 10]. Уравнение такой поверхности с помощью выбора системы координат может быть приведено к виду

$$\lambda_1\tau_1^2 + \lambda_2\tau_2^2 + \ldots + \lambda_r\tau_r^2 + c = 0. \tag{8}$$

Если поверхность не имеет центра симметрии, то ее называют нецентральной [9] или параболической [10]. В этом случае ее простейшее уравнение имеет вид

$$\lambda_1\tau_1^2 + \lambda_2\tau_2^2 + \ldots + \lambda_r\tau_r^2 + 2M\tau_{r+1} = 0. \tag{9}$$

Инвариантом уравнения называют такую функцию коэффициентов уравнения, которая не меняется при переходе к новой системе координат [2–4, 10].

Рассмотрим инварианты уравнения поверхности:

1) ранги $r$ и $q$ матриц коэффициентов $A$ и расширенной матрицы $A^*$ системы (7) соответственно, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

(эти инварианты предложил С. Л. Певзнер [10]);

2) собственные числа матрицы $A$, т. е. корни характеристического многочлена матрицы $A$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix};$$

3) коэффициенты многочлена $n$-й степени

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \ldots & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda & b_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n & c \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1(\lambda) = K_0(-\lambda)^n + K_1(-\lambda)^{n-1} + \ldots + K_{n-1}(-\lambda) + K_n$$

(этот инвариант предложил П. С. Моденов [7, 9]).

Легко видеть, что ранги матриц $A$, $A^*$ сохраняются при заменах координат, т. е. ранги являются инвариантами [10]. Отметим, что поверхность центральная (параболическая) тогда и только тогда, когда $r = q$ ($r + 1 = q$). Отметим, что ранг $r$ матрицы $A$ равен количеству ненулевых собственных чисел матрицы $A$. Как хорошо известно, характеристический многочлен матрицы $A$ инвариантен относительно преобразования координат [9, 10]. А многочлен $\Delta_1(\lambda)$ не инвариантен относительно общего преобразования координат. Он сохраняется при поворотах, но в общем случае не сохраняется при параллельном переносе. При этом некоторые коэффициенты многочлена $\Delta_1(\lambda)$ сохраняются и при параллельных переносах, т. е. являются инвариантами уравнения поверхности второго порядка. Рассмотрим подробно свойства многочлена $\Delta_1(\lambda)$.

Введем обозначение:

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} A - \lambda E & b \\ b^t & c \end{pmatrix}.$$

**Теорема.** *(a) Многочлен $\Delta_1(\lambda)$ инвариантен относительно поворотов.*

*(b) Если ранг матрицы $A^*$ равен $q$, то $n-q$ младших коэффициентов многочлена $\Delta_1(\lambda)$ равны нулю: $K_{q+1} = K_{q+2} = \ldots = K_n = 0$.*

*(c) Коэффициент $K_q$ инвариантен при переносах.*

Доказательство. (a) Первая часть теоремы доказывается прямым подсчетом многочлена $\Delta_1(\lambda)$ в новых координатах. В силу (5) при $h = 0$ имеем

$$B'(\lambda) = \begin{pmatrix} A' - \lambda E & b' \\ b^{t\prime} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^t A Q - \lambda E & b \\ b^t & c \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Q^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \lambda E & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

А так как $\det \begin{pmatrix} Q^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \pm 1$, то

$$\Delta_1'(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A' - \lambda E & b' \\ b^{t\prime} & c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - \lambda E & b \\ b^t & c \end{pmatrix} = \Delta_1(\lambda).$$

(b) Так как многочлен $\Delta_1(\lambda)$ сохраняется при поворотах, мы выберем такую ортогональную матрицу $Q$, что

$$A' = Q^t A Q = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0\},$$

и уравнение квадрики примет вид

$$\lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + \ldots + \lambda_r \eta_r^2 + 2b_1' \eta_1 + \ldots + 2b_{r+1}' \eta_{r+1} + \ldots + 2b_n' \eta_n + c = 0.$$

Если $r = q$, то квадрика — центральная, и все числа $b_{q+1}', \ldots, b_n'$ равны нулю. Уравнение квадрики имеет вид

$$\lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + \ldots + \lambda_r \eta_r^2 + 2b_1' \eta_1 + \ldots + 2b_r' \eta_r + c = 0.$$

Многочлен $\Delta_1(\lambda)$ в этом случае будет следующим:

$$\Delta_1(\lambda) = \det \begin{pmatrix}
\lambda_1 - \lambda & & & & & & & & & & b_1' \\
& \lambda_2 - \lambda & & & & & & & & & b_2' \\
& & \cdot & & & & & & & & \cdot \\
& & & \cdot & & & & & & & \cdot \\
& & & & \cdot & & & & & & \cdot \\
& & & & & \lambda_r - \lambda & & & & & b_r' \\
& & & & & & -\lambda & & & & 0 \\
& & & & & & & \cdot & & & \cdot \\
& & & & & & & & \cdot & & \cdot \\
& & & & & & & & & \cdot & \cdot \\
& & & & & & & & & -\lambda & 0 \\
b_1' & b_2' & \cdot & \cdot & \cdot & b_r' & 0 & \cdot & \cdot & 0 & c
\end{pmatrix} =$$

$$
= (-\lambda)^{n-q} \det \begin{pmatrix}
\lambda_1-\lambda & & & & & & & & & & b'_1 \\
& \lambda_2-\lambda & & & & & & & & & b'_2 \\
& & \cdot & & & & & & & & \cdot \\
& & & \cdot & & & & & & & \cdot \\
& & & & \cdot & & & & & & \cdot \\
& & & & & \lambda_r-\lambda & & & & & b'_r \\
& & & & & & 1 & & & & 0 \\
& & & & & & & \cdot & & & \cdot \\
& & & & & & & & \cdot & & \cdot \\
& & & & & & & & & \cdot & \cdot \\
& & & & & & & & & 1 & 0 \\
b'_1 & b'_2 & \cdot & \cdot & \cdot & b'_r & 0 & \cdot & \cdot & \cdot\ 0 & c
\end{pmatrix}.
$$

Следовательно, $K_{q+1} = K_{q+2} = \ldots = K_n = 0$ и младший коэффициент многочлена $\Delta_1(\lambda)$, который может быть отличен от нуля, т. е.

$$
K_q = \left. \frac{\Delta_1(\lambda)}{(-\lambda)^{n-q}} \right|_{\lambda=0},
$$

определяется формулой

$$
K_q = \det \begin{pmatrix}
\lambda_1 & & & & & & & & & & b'_1 \\
& \lambda_2 & & & & & & & & & b'_2 \\
& & \cdot & & & & & & & & \cdot \\
& & & \cdot & & & & & & & \cdot \\
& & & & \cdot & & & & & & \cdot \\
& & & & & \lambda_r & & & & & b'_r \\
& & & & & & 1 & & & & 0 \\
& & & & & & & \cdot & & & \cdot \\
& & & & & & & & \cdot & & \cdot \\
& & & & & & & & & \cdot & \cdot \\
& & & & & & & & & 1 & 0 \\
b'_1 & b'_2 & \cdot & \cdot & \cdot & b'_r & 0 & \cdot & \cdot & \cdot\ 0 & c
\end{pmatrix}.
$$

Таким образом, $K_q$ есть определитель матрицы $B(0)$ при определенном выборе матрицы $A$ и столбца $b$. Из этого вытекает, что коэффициент $K_q$ не меняется при параллельных переносах.

Если $r + 1 = q$, то поверхность — параболическая, и среди чисел $b'_{r+1},\ldots,b'_n$ есть ненулевые. Анализ многочлена $\Delta_1(\lambda)$ в этом случае проводится аналогично предыдущему случаю. Только для упрощения уравнения поверхности нужно сделать дополнительное преобразование — поворот системы координат, при котором упростятся линейные слагаемые $b'_q,\ldots,b'_n$. Новое преобразование координат имеет вид

$$
\tau_1 = \eta_1, \ldots, \tau_r = \eta_r, \tau_{r+1} = \left(b'_{r+1}\eta_{r+1} + \ldots + b'_n\eta_n\right)\frac{1}{M}, \ldots,
$$

где $M$ — положительный множитель, обеспечивающий ортогональность матрицы преобразования:

$$
M^2 = (b'_{r+1})^2\eta_{r+1} + (b'_{r+2})^2\eta_{r+2} + \ldots + (b'_n)^2\eta_n.
$$

Строки, следующие за $(r+1)$-й, выбираются так, чтобы полученная матрица была ортогональной. Такая матрица существует, так как первые $r+1$ строк могут быть дополнены до ортонормированного базиса пространства. В результате этого преобразования уравнение поверхности примет вид

$$\lambda_1\tau_1^2 + \lambda_2\tau_2^2 + \ldots + \lambda_r\tau_r^2 + 2b_1'\tau_1 + \ldots + 2b_r'\tau_r + 2M\tau_{r+1} + c = 0.$$

Многочлен $\Delta_1(\lambda)$ сохраняется при поворотах и в этом случае определяется как

$$\Delta_1(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda & & & & & & & & & & b_1' \\ & \lambda_2-\lambda & & & & & & & & & b_2' \\ & & \cdot & & & & & & & & \cdot \\ & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & & & & & \cdot \\ & & & & & \lambda_r-\lambda & & & & & b_r' \\ & & & & & & -\lambda & & & & M \\ & & & & & & & -\lambda & & & 0 \\ & & & & & & & & \cdot & & \cdot \\ & & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & & -\lambda & 0 \\ b_1' & b_2' & \cdot & \cdot & \cdot & b_r' & M & 0 & \cdot & \cdot \;\; 0 & c' \end{pmatrix}.$$

Упрощая этот определитель так же, как и в случае $r=q$, мы получим

$$\Delta_1(\lambda) = (-\lambda)^{n-q}\det\begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda & & & & & & & & & & b_1' \\ & \lambda_2-\lambda & & & & & & & & & b_2' \\ & & \cdot & & & & & & & & \cdot \\ & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & & & & & \cdot \\ & & & & & \lambda_r-\lambda & & & & & b_r' \\ & & & & & & -\lambda & & & & M \\ & & & & & & & 1 & & & 0 \\ & & & & & & & & \cdot & & \cdot \\ & & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & & 1 & 0 \\ b_1' & b_2' & \cdot & \cdot & \cdot & b_r' & M & 0 & \cdot & \cdot \;\; 0 & c \end{pmatrix}.$$

Таким образом, многочлен $\Delta_1(\lambda)$ делится на $(-\lambda)^{n-q}$, поэтому члены многочлена, содержащие $-\lambda$ в степенях с показателями, меньшими $n-q$, равны нулю и коэффициент $K_q$ определяется следующим образом:

$$K_q = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & & b'_1 \\ & \lambda_2 & & & & & & & & & b'_2 \\ & & \cdot & & & & & & & & \cdot \\ & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & & & & & \cdot \\ & & & & & \lambda_r & & & & & b'_r \\ & & & & & & 0 & & & & M \\ & & & & & & & 1 & & & 0 \\ & & & & & & & & \cdot & & \cdot \\ & & & & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & & 1 & 0 \\ b'_1 & b'_2 & \cdot & \cdot & \cdot & b'_r & M & 0 & \cdot & \cdot & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Утверждение (b) доказано.

(c) Итак, младший коэффициент многочлена $\Delta_1(\lambda)$, который может быть отличен от нуля — это $K_q$, где $K_q = \frac{\Delta_1(\lambda)}{(-\lambda)^{n-q}}\Big|_{\lambda=0}$.

Докажем, что этот коэффициент сохраняется при параллельных переносах. Для доказательства используем формулу (6) замены коэффициентов уравнения поверхности при замене координат. Наиболее простой случай получается при $r = q = n$. Здесь

$$K_n = \det \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix}.$$

Из формулы замены коэффициентов уравнения (6) следует равенство

$$\det \begin{pmatrix} A' & b' \\ b'^t & c' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} Q^t & 0 \\ h^t & 1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix},$$

так как

$$\det \begin{pmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} Q^t & 0 \\ h^t & 1 \end{pmatrix} = \pm 1.$$

Таким образом, коэффициент $K_q$ — инвариант уравнения поверхности. Аналогично доказывается инвариантность $K_q$ и в других случаях, так как свойства $K_q$ аналогичны свойствам $K_n$. При доказательстве мы используем рассуждение Б. А. Розенфельда [1, с. 316]. Уравнения (8) и (9) показывают, что поверхности в этих случаях можно рассматривать как квадрики в пространстве размерности $q$. Параллельный перенос пространства представим как композицию параллельного переноса в подпространстве размерности $q$ и переноса дополнительного подпространства. При переносе вдоль дополнительного подпространства уравнение квадрики не меняется, так как уравнения (8) и (9) не зависят от переменных, задающих это подпространство. А при переносе вдоль подпространства размерности $q$ инвариант $K_q$ не меняется, так как $K_q$ в этом случае аналогичен $K_n$ для $r = q = n$. Теорема полностью доказана. □

Рассмотрим случай $q = r$, т. е. случай центральных поверхностей. Здесь каноническое уравнение будет иметь вид (8) и

$$K_r = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \cdot & & & & & \cdot \\ & & \lambda_r & & & & \cdot \\ & & & 1 & & & \cdot \\ & & & & \cdot & & \cdot \\ & & & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & c \end{vmatrix} = \lambda_1 \ldots \lambda_r c.$$

Следовательно, каноническое уравнение центральной поверхности примет вид

$$\lambda_1 \tau_1^2 + \lambda_2 \tau_2^2 + \ldots + \lambda_r \tau_r^2 + \frac{K_r}{\lambda_1 \ldots \lambda_r} = 0.$$

Рассмотрим случай $q = r + 1$, т. е. случай параболических поверхностей. Здесь каноническое уравнение квадрики будет иметь вид (9) и

$$K_{r+1} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \cdot & & & & & \cdot \\ & & \lambda_r & & & & 0 \\ & & & 0 & & & M \\ & & & & 1 & & \cdot \\ & & & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & M & \cdot & 0 & 0 \end{vmatrix} = -M^2 \lambda_1 \ldots \lambda_r.$$

Отсюда получаем

$$M = \sqrt{-\frac{K_{r+1}}{\lambda_1 \ldots \lambda_r}}.$$

Каноническое уравнение параболической поверхности будет следующим:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 + 2M x_{r+1} = 0.$$

Таким образом, мы выразили коэффициенты канонических уравнений поверхности через инварианты.

## Литература


1. Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства.* Москва, Наука (1966).

2. Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов. В: *Алгебраическая геометрия — 4. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления.* Т. 55, 137–309. Москва (1989).

3. Гуревич Г. Б. *Основы теории алгебраических инвариантов.* Москва, Гостехиздат (1948).

4. Olver P. J. *Classical invariant theory.* In Ser.: London Mathematical Society Student Texts, vol. 44. Cambridge, Cambridge University Press (1999).

5. Casas-Alvero E. *Analytic projective geometry.* In Ser.: EMS Textbooks in Mathematics. Zürich, European Mathematical Society (2014).

6. Schreier O., Sperner E. *Projective geometry of n-dimensions. Introduction to modern algebra and matrix theory.* Vol. 2. New York, Chelsea Publ. (1961).

7. Делоне Б. Н., Райков Д. А. *Аналитическая геометрия.* Т. 2. Москва, Гостехиздат (1948).

8. Моденов П. С. *Аналитическая геометрия.* Москва, Изд-во Московского университета (1969).

9. Шилов Г. Е. *Введение в теорию линейных пространств.* Москва, Гостехиздат (1956).

10. Певзнер С. Л. Инварианты и канонические уравнения гиперповерхности второго порядка в $n$-мерном пространстве. *Publications De L'Institut Mathematique. Nouvelle Serie* **55** (69), 75–88 (1994).

11. Farin G. E., Farin G. *Curves and surfaces for CAGD: A practical guide.* Morgan Kaufmann Publ. (2002).

Статья поступила в редакцию 4 октября 2021 г.;
доработана 30 ноября 2021 г.;
рекомендована к печати 2 декабря 2021 г.

Контактная информация:

*Волков Дмитрий Юрьевич* — канд. физ.-мат. наук, доц.; dmitrivolkov@mail.ru
*Галунова Ксения Валерьевна* — канд. физ.-мат. наук, доц.; galounova@gmail.com

## Metric invariants of a second-order hypersurface in an $n$-dimensional Euclidean space

*D. Yu. Volkov*[1], *K. V. Galunova*[2]

[1] St Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
67, ul. Bolshaya Morskaya, St Petersburg, 190000, Russian Federation
[2] Peter the Great St Petersburg Polytechnic University,
29, ul. Polytechnicheskaya, St Petersburg, 195251, Russian Federation

**For citation:** Volkov D. Yu., Galunova K. V. Metric invariants of a second-order hypersurface in an $n$-dimensional Euclidean space. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 219–228.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.204 (In Russian)

The article is devoted to the classical problem of analytic geometry in $n$-dimensional Euclidean space: finding the canonical equation of a quadric. The canonical equation is determined by the invariants of the second-order surface equation. Invariants are quantities that do not change under an affine change of space coordinates. S. L. Pevsner found a convenient system of the following invariants: $q$ is the rank of the extended matrix of the system for determining the center of symmetry of the surface; the roots of the characteristic polynomial of the matrix of quadratic terms of the surface equation, i. e. the eigenvalues of this matrix; $K_q$ is the coefficient of the variable $\lambda$ to the power of $n-q$ in a polynomial equal to the determinant of the $n+1$ order matrix obtained by a certain rule from the original surface equation. All the coefficients of the canonical equations of quadrics are expressed through eigenvalues of the matrix of quadratic terms and the coefficient $K_q$. Pevsner's result is proved in a new way. Elementary properties of determinants are used in the proof. This algorithm for finding the canonical equation of a quadric is a very convenient algorithm for computer graphics.

*Keywords*: invariant, second-order hypersurfaces.

### References

1. Rosenfeld B. A. *Multidimensional spaces.* Moscow, Nauka Publ. (1966).

2. Vinberg E. B., Popov V. L. Invariant theory. In: *Algebraic geometry — 4. Itogi Nauki i Tekhniki. Sovrem. Probl. Mat. Fund. naprav.* Vol. 55, 137–314. Moscow (1989). (In Russian)

3. Gurevich G. B. *Osnovy teorii algebraicheskih invariantov.* Moscow, Gostekhizdat Publ. (1948). (In Russian) [Eng. transl.: Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants.* Groningen, P. Noordhoff (1964)].

4. Olver P. J. *Classical invariant theory.* In Ser.: London Mathematical Society Student Texts, vol. 44. Cambridge, Cambridge University Press (1999).

5. Casas-Alvero E. *Analytic projective geometry.* In Ser.: EMS Textbooks in Mathematics. Zürich, European Mathematical Society (2014).

6. Schreier O., Sperner E. *Projective geometry of n-dimensions. Introduction to modern algebra and matrix theory.* Vol. 2. New York, Chelsea Publ. (1961).

7. Delone B. N., Raikov D. A. *Analytical geometry.* Vol. 2. Moscow, Gostehizdat Publ. (1948). (In Russian)

8. Modenov P. S. *Analytical geometry.* Moscow, Moscow University Press (1969). (In Russian)

9. Shilov G. E. *Vvedenie v teoriju linejnyh prostranstv.* Moscow, Gostehizdat Publ. (1956). (In Russian) [Eng. transl.: Shilov G. E. *An Introduction to the Theory of Linear Spaces.* In Ser.: Dover Books on Mathematics. Dover Publ. (1971)].

10. Pevzner S. L. Invariants and canonical equations of a second-order hypersurface in an $n$-dimensional Euclidean space. *Publications De L'Institut Mathematique. Nouvelle Serie* **55** (69), 75–88 (1994). (In Russian)

11. Farin G. E., Farin G. *Curves and surfaces for CAGD: A practical guide.* Morgan Kaufmann Publ. (2002).

Received: October 4, 2021
Revised: November 30, 2021
Accepted: December 2, 2021

Authors' information:

*Dmitrii Yu. Volkov* — dmitrivolkov@mail.ru
*Kseniia V. Galunova* — galounova@gmail.com