УДК 519.218 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2
MSC 60G70

Об экстремумах ПСИ-процессов и гауссовских пределов их нормированных независимых одинаково распределенных сумм*

О. В. Русаков, Р. А. Рагозин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Русаков О. В., Рагозин Р. А.* Об экстремумах ПСИ-процессов и гауссовских пределов их нормированных независимых одинаково распределенных сумм // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 269–277. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.208

Под ПСИ-процессом — процессом пуассоновского случайного индекса, мы понимаем случайный процесс с непрерывным временем, полученный путем рандомизации дискретного времени случайной последовательности. Мы рассматриваем случай, когда рандомизация происходит посредством дважды стохастического пуассоновского процесса, то есть пуассоновского процесса со случайной интенсивностью. При условии существования второго момента стационарные ПСИ-процессы имеют ковариацию, совпадающую с преобразованием Лапласа случайной интенсивности. В данной статье мы получаем распределения для экстремумов одного ПСИ-процесса, выраженные в терминах преобразования Лапласа случайной интенсивности. Вторая задача, которую мы здесь решаем, — это сходимость максимума гауссовского предела нормированных сумм независимых одинаково распределенных стационарных ПСИ-процессов. Мы находим необходимые и достаточные условия, накладываемые на случайную интенсивность, чтобы подходящим образом центрированный и нормированный максимум этого гауссовского предела сходился по распределению к двойному показательному закону. При этом мы существенно используем тауберову теорему в форме В. Феллера и результаты монографии М. Лидбеттера, Г. Линдгрена, Х. Ротсена «Экстремумы случайных последовательностей и процессов» (1989).

Ключевые слова: процессы псевдопуассоновского типа, случайная интенсивность, преобразование Лапласа для распределений, тауберовы теоремы.

1. ПСИ-процессы и их основные свойства. Прежде всего отметим, что ПСИ-процессы обобщают псевдопуассоновские процессы (см. [1, т. II, гл. X]).

Будем считать, что все рассматриваемые случайные объекты заданы на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, которое полно. Следуя [2], мы называем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ полным, если σ-алгебра $\mathcal{F}$ содержит все $\mathbb{P}$-нулевые подмножества Ω.

Рассмотрим следующий триплет $\{(\xi), \Lambda(t), \Pi(t)\}$, $t \geqslant 0$, состоящий из независимых компонент. Здесь $(\xi) = (\xi_0, \xi_1, \ldots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F_ξ; $\Lambda(t)$ — это случайный процесс, обладающий следующими свойствами: $\Lambda(0) = 0$ почти наверное

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00646 А).

(п. н.), $\Lambda(t)$ не убывает и имеет стационарные приращения. Если не оговорено иное, мы будем полагать $\Lambda(t) = \lambda t$, где λ — положительная п. н. случайная величина с функцией распределения F_λ. Случайную прямую λt назовем накопленной интенсивностью, а λ — случайной мгновенной интенсивностью, или просто случайной интенсивностью. Обозначим через $\Pi(t)$ стандартный пуассоновский процесс (с единичной интенсивностью). Дважды стохастический пуассоновский процесс $\Pi(\Lambda(t))$ назовем *ведущим пуассоновским процессом*, а последовательность случайных величин (ξ) — *ведомой последовательностью*.

Определение 1. *ПСИ-процесс* $\psi(t), t \geqslant 0$, — это процесс, определяемый следующим равенством:

$$\psi(t) = \xi_{\Pi(\Lambda(t))} = \xi_{\Pi(\lambda t)}. \tag{1}$$

Определение 1 устанавливает, что ПСИ-процесс получается путем рандомизации дискретного времени последовательности (ξ), причем рандомизация происходит посредством дважды стохастического пуассоновского процесса $\Pi(\Lambda(t))$, $t \geqslant 0$, включая и обычный пуассоновский процесс с неслучайной величиной $\lambda > 0$. Отсюда возникает название «пуассоновского случайного индекса процесс», то есть ПСИ-процесс.

ПСИ-процесс является стационарным процессом в узком смысле. Процесс ψ является стационарным в широком смысле, если у ξ_0 есть второй момент, и в этом случае для ПСИ-процесса известна ковариация, которая вычислена в [3].

Лемма 1. *Пусть* $\mathbb{E}\xi_0 = 0$, $\mathbb{D}\xi_0 = 1$. *Тогда для всяких неотрицательных* t, τ *ковариация процесса* ψ *есть преобразование Лапласа* L_λ *мгновенной интенсивности* λ:

$$\operatorname{cov}(\psi(\tau), \psi(\tau + t)) = \mathbb{E} \exp\{-\lambda t\} \stackrel{\triangle}{=} L_\lambda(t)\,. \tag{2}$$

Доказательство. См. [3]. □

Замечание 1. На всяком конечном интервале количество скачков ПСИ-процесса конечно с вероятностью единица, не превосходит количества скачков ведущего пуассоновского процесса и равно этому количеству п. н., когда распределение ξ_0 не имеет атомов.

2. Распределение максимума и минимума ПСИ-процесса. Далее мы пользуемся результатами из широко известной монографии М. Лидбеттера, Г. Линдгрена, Х. Ротсена «Экстремумы случайных последовательностей и процессов» [4].

Рассмотрим некоторый случайный процесс Θ, заданный на $[0, \infty) \ni t$. Следуя [4, гл. 7], обозначим $M_{\Theta(t)}(T) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \Theta(t)$ и $m_{\Theta(t)}(T) = \inf\limits_{t\in[0,T]} \Theta(t)$ для произвольного $T > 0$. Отметим, что если из контекста понятно, о каком случайном процессе идет речь, то будут использованы обозначения $M(T)$ и $m(T)$ соответственно. Заметим, что максимум и минимум для ПСИ-процесса являются случайными величинами — это следует из замечания 1 и полноты пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

В случае, когда траектории случайного процесса Θ непрерывны с вероятностью единица, тот факт, что $M_{\Theta(t)}(T)$, $m_{\Theta(t)}(T)$ есть случайные величины, прямо следует из [4, лемма 7.1.1].

Лемма 2. *Для максимума и минимума ПСИ-процесса со случайной мгновенной интенсивностью ведущего пуассоновского процесса λ с функцией распределения F_λ верны следующие равенства ($u \in \mathbb{R}$):*

$$\mathbb{P}\{M(T) < u\} = \int_0^\infty F_\xi(u) e^{sTF_\xi(u) - sT} \mathrm{d}F_\lambda(s) = F_\xi(u) L_\lambda(T(1 - F_\xi(u))), \tag{3}$$

$$\mathbb{P}\{m(T) < u\} = \int_0^\infty 1 - (1 - F_\xi(u)) e^{-sTF_\xi(u)} \mathrm{d}F_\lambda(s) =$$
$$= 1 - (1 - F_\xi(u)) L_\lambda(TF_\xi(u)), \tag{4}$$

где L_λ — преобразование Лапласа случайной интенсивности ведущего пуассоновского процесса, F_ξ — функция распределения элементов ведомой последовательности случайных величин.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда мгновенная интенсивность λ — вырожденная случайная величина, равная некоторому постоянному значению $\lambda_0 > 0$ п. н. Для максимума и минимума ПСИ-процесса в этом случае для любого $u \in \mathbb{R}$ верны равенства

$$\mathbb{P}\{M(T) < u\} = F_\xi(u) e^{\lambda_0 TF_\xi(u) - \lambda_0 T} = F_\xi(u) e^{-\lambda_0 T(1 - F_\xi(u))}, \tag{5}$$

$$\mathbb{P}\{m(T) < u\} = 1 - (1 - F_\xi(u)) e^{-\lambda_0 TF_\xi(u)}, \tag{6}$$

где F_ξ — функция распределения ξ_0, т. е. элементов ведомой последовательности. Докажем (5), пользуясь независимостью $\Pi(t)$, $t \geqslant 0$, и (ξ), а также тем, что количество скачков пуассоновского процесса на замкнутом интервале имеет распределение Пуассона:

$$\mathbb{P}\{M(T) < u\} = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}\{\Pi_{\lambda_0}(T) = k \ \cap \ \max(\xi_0, \dots, \xi_k) < u\} =$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(T\lambda_0)^k}{k!} e^{-(\lambda_0 T)} (F_\xi(u))^{k+1} = F_\xi(u) e^{\lambda_0 TF_\xi(u) - \lambda_0 T} = F_\xi(u) e^{\lambda_0 T(F_\xi(u) - 1)}.$$

Аналогичным образом докажем (6):

$$\mathbb{P}\{m(T) < u\} = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}\{\Pi_{\lambda_0}(T) = k \ \cap \ \min(\xi_0, \dots, \xi_k) < u\} =$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(T\lambda_0)^k}{k!} e^{-(\lambda_0 T)} (1 - (1 - F_\xi(u))^{k+1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(T\lambda_0)^k}{k!} e^{-(\lambda_0 T)} - \sum_{k=0}^\infty \frac{(T\lambda_0)^k}{k!} e^{-(\lambda_0 T)} (1 - F_\xi(u))^{k+1} =$$
$$= 1 - (1 - F_\xi(u)) e^{-\lambda_0 TF_\xi(u)}.$$

Так как случайная величина λ не зависит ни от ведущего пуассоновского процесса, ни от ведомой последовательности (ξ), то применение формулы полной вероятности путем интегрирования по распределению F_λ дает утверждение данной леммы. $\square$

Отметим, что из леммы 2, как и следует ожидать, вытекает, что при $T \to 0$ максимум и минимум сходятся по распределению к ξ_0.

Пример. Пусть элементы ведущей последовательности (ξ) распределены по показательному закону с функцией распределения $F_\xi(u) = 1 - e^{-\mu u}$, $u \geqslant 0$, $\mu > 0$. И пусть мгновенная интенсивность ведущего пуассоновского процесса λ распределена по гамма-закону с параметром формы ρ и параметром масштаба θ, то есть имеет следующее преобразование Лапласа:

$$L_\lambda(t) = (1 + \theta t)^{-\rho}, \quad t \geqslant 0\,.$$

Тогда функция распределения максимума на интервале $[0, T]$ соответствующего ПСИ-процесса определяется равенством ($u \geqslant 0$)

$$\mathbb{P}\{M(T) < u\} = (1 - e^{-\mu u})(1 + \theta T(1 - (1 - e^{-\mu u})))^{-\rho} = \frac{1 - e^{-\mu u}}{(1 + \theta T e^{-\mu u})^\rho}\,.$$

Соответственно, функция распределения минимума ПСИ-процесса на интервале $[0, T]$ такова:

$$\mathbb{P}\{m(T) < u\} = 1 - (1 - 1 + e^{-\mu u})(1 + \theta T(1 - e^{-\mu u}))^{-\rho} = 1 - \frac{e^{-\mu u}}{(1 + \theta T(1 - e^{-\mu u}))^\rho}\,.$$

Обозначим плотность максимума и минимума через $f_M(u)$ и $f_m(u)$ соответственно. Для них верны следующие равенства:

$$f_M(u) = \mu e^{-\mu u}(1 + \theta T e^{-\mu u})^{-\rho}\left(1 + \frac{\theta T \rho(1 - e^{-\mu u})}{1 + \theta T e^{-\mu u}}\right),$$

$$f_m(u) = \mu e^{-\mu u}(1 + \theta T(1 - e^{-\mu u}))^{-\rho}\left(1 + \frac{\theta T \rho e^{-\mu u}}{1 + \theta T(1 - e^{-\mu u})}\right).$$

3. Распределение максимума и минимума гауссовских пределов нормированных сумм ПСИ-процессов. Отметим, что процесс ψ не будет являться гауссовским даже для нормально распределенных членов ведомой последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots$. Мы просуммируем и нормируем независимые копии ПСИ-процессов и получим в пределе гауссовский процесс.

Рассмотрим последовательность независимых копий ПСИ-процесса $\psi_1, \psi_2, \ldots$, ведомые последовательности которых имеют нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Рассмотрим их нормированные суммы

$$Z_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \psi_j(t), \quad t \in \mathbb{R}_+\,. \tag{7}$$

Такие суммы стационарны и слабо сходятся в смысле слабой сходимости конечномерных распределений к стационарному гауссовскому процессу с ковариационной функцией $L_\lambda(t)$, $t \geqslant 0$. Это непосредственно следует из центральной предельной теоремы (ЦПТ) для векторов (см., например, [5, теорема 9, с. 158]). Кроме того, для таких нормированных сумм при неслучайной мгновенной интенсивности ведущего пуассоновского процесса на основе критерия, изложенного в книге [6], в работе [7] доказана функциональная предельная теорема о сходимости к процессу Орнштейна — Уленбека (стационарному гауссовскому марковскому процессу) в пространстве Скорохода на конечном интервале $[0, T]$. Для предельного процесса используем обозначение Z_∞.

Нам потребуется следующая теорема (см. [4, теорема 12.3.5]) о сходимости к двойному экспоненциальному закону центрированного и нормированного максимума стационарного гауссовского процесса с непрерывными почти наверное траекториями.

Теорема 1. *Пусть $\Theta(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, — стационарный гауссовский процесс с нулевым средним. Рассмотрим ковариацию $r(t) = \mathbb{E}(\Theta(\tau), \Theta(\tau + t))$. Пусть для нее выполнены следующие условия при некотором $\alpha \in (0, 2]$:*

$$r(t) = 1 - Ct^\alpha + o(t^\alpha) \text{ при } t \to 0+, \ C > 0\,, \tag{8}$$

$$r(t) \log(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty\,. \tag{9}$$

Тогда для каждого $x \in \mathbb{R}$ имеет место сходимость

$$\mathbb{P}\{a_T(M_\Theta(T) - b_T) \le x\} \to \exp(-e^{-x}) \text{ при } T \to \infty\,, \tag{10}$$

где $a_T = (2 \log T)^{1/2}$;

$$b_T = a_T + \tfrac{1}{a_T}\left(\tfrac{2-\alpha}{2\alpha} \log\log(T) + \log\left(C^{1/\alpha} H_\alpha (2\pi)^{-1/2} 2^{(2-\alpha)/2\alpha}\right)\right).$$

Здесь H_α — некоторая строго положительная постоянная (заметим, что $H_1 = 1$). Эта постоянная при произвольном заданном $\alpha \in (0, 2]$ определяется выражением

$$H_\alpha = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-y}\, \mathbb{P}\left\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} Y_\alpha(t) > -y\right\} \mathrm{d}y, \tag{11}$$

где $Y_\alpha(t)$ — гауссовский процесс, $t \geqslant 0$ с отрицательным средним $-t^\alpha$ (при $t > 0$) и ковариацией $s^\alpha + t^\alpha - |t - s|^\alpha$.

Замечание 2. Заметим, что условия (8) (см. [4, с. 258]) достаточно, чтобы траектории процесса Θ были непрерывны почти наверное.

Замечание 3. Заметим, что случайный процесс Y_α, через который определяется H_α из (11), — это дробное броуновское движение с показателем Хёрста $\alpha \in (0, 2]$ (см., например, [8]), имеющее масштаб $\sqrt{2}$ и снос $-t^\alpha$. При $\alpha = 1$ мы имеем броуновское движение со сносом $-t$, и тогда $H_1 = 1$. В этом случае коэффициенты из теоремы 1 принимают вид

$$a_T = (2 \log T)^{1/2}, \quad b_T = a_T + \tfrac{1}{a_T}\left(\tfrac{1}{2} \log\log(T) + \log(\tfrac{C}{\sqrt{\pi}})\right)\,. \tag{12}$$

Рассмотрим максимум гауссовского стационарного предела нормированных независимых одинаково распределенных сумм ПСИ-процессов. Нас интересует вопрос его «регулярного поведения», то есть вопрос сходимости его распределения к двойному экспоненциальному. Предварительный анализ показывает, что для этого случайная интенсивность λ должна иметь следующие «качественные» свойства.

Вероятностная масса не должна сильно скапливаться ни на бесконечности, ни в окрестности нуля. В первом случае гауссовский предел будет похож на белый шум, а во втором — на случайную нормально распределенную константу (то есть значения предельного гауссовского процесса будут совпадать (п. н.) во все моменты времени из заданного временно́го интервала). Следующий ниже текст дает описание «количественной» стороны этих рассуждений.

Теорема 2. *Пусть распределение случайной интенсивности λ не имеет атомов в нуле; ее функция распределения в окрестности нуля растет не слишком быстро, то есть для некоторого положительного $c > 0$ и для некоторого $\varepsilon > 0$*

$$F_\lambda(x) \leqslant \frac{c}{\left(\log(1/x)\right)^{1+\varepsilon}} \tag{13}$$

при $x \in [0,\, x_0]$ для некоторого $x_0 > 0$. Пусть также функция F_λ на бесконечности возрастает так, что ее преобразование Лапласа L_λ в окрестности нуля ведет себя следующим образом:

$$L_\lambda(t) = 1 - Ct^\alpha + o(t^\alpha) \text{ при } t \to 0+ \tag{14}$$

для некоторого $C > 0$ при некотором $\alpha \in (0, 1]$. Тогда выполнены условия теоремы 1 и максимум гауссовского предела Z_∞ сумм ПСИ-процессов асимптотически имеет двойное показательное распределение, т. е. выполнено соотношение (10) *при тех же самых a_T, b_T и H_α, что и в теореме 1.*

Доказательство. Вследствие того, что гауссовские стационарные пределы ПСИ-процессов имеют ковариацию, представляющую собой вполне монотонную функцию (а значит — выпуклую вниз), нас интересует лишь случай $\alpha \in (0, 1]$. Поведение распределения случайной интенсивности λ в окрестности $+\infty$ по тауберовой теореме (см., например, [1, 9]) определяет поведение ее преобразования Лапласа в окрестности нуля. Отсюда следует, что условие (8) выполнено, если у λ есть момент порядка α, и в этом случае у процесса Θ (из теоремы 3, см. Приложение), а значит, и у гауссовского предела нормированных сумм ПСИ-процессов Z_∞ существует стохастически эквивалентная модификация с непрерывными траекториями (см. замечание 2).

Крайне важно заметить, что существование математического ожидания у случайной интенсивности λ равносильно выполнению условия (14) при $\alpha = 1$. И при $\alpha = 1$ константа $C > 0$ в (14) является математическим ожиданием λ. Значит существование у λ моментов более высокого порядка будет оказывать влияние разве что на члены более высокого порядка в разложении в правой части (14) при $\alpha = 1$. Напомним, что при $\alpha = 1$ выполнены равенства (12).

С другой стороны, выполнение условия (9) накладывает ограничения на поведение распределения случайной интенсивности λ в окрестности нуля. Для этого как минимум необходимо, чтобы у распределения λ отсутствовал атом в нуле. Из тауберовых теорем прямо следует, что степенного роста функции распределения λ в окрестности нуля достаточно для того, чтобы условие (9) выполнялось. Более того, если в тауберовой теореме 3 (см. Приложение) положить $p = 0$ и $\ell(s) = 1/(\log(s)\,)^{1+\varepsilon}$, то

$$F_\lambda(x) \sim \frac{c}{\left(\log(1/x)\right)^{1+\varepsilon}} \tag{15}$$

при $x \to 0+$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и некоторого $c > 0$, и тогда условие (9) выполнено. □

Замечание 4. Вместе с тем стоит заметить, что не всякая выпуклая вверх в окрестности нуля функция распределения обеспечит для случайной интенсивности выполнение условия (9). Действительно, применение тауберовой теоремы 3 дает, что если функция распределения $F_\lambda(x) \sim -1/\log(x)$ при $x \to 0+$ или возрастает в окрестности нуля быстрее такой скорости, то преобразование Лапласа для λ убывает к нулю в $+\infty$ со скоростью $1/\log(t)$ или медленнее соответственно. И, значит, условие (9) не выполняется.

Условие (15) можно немного ослабить, если в тауберовой теореме 3 взять в качестве ℓ функцию $\ell(s) = h(s)/\log(s)$, где $h(s) \to 0$ при $s \to \infty$.

Замечание 5. Также заметим, что если у λ будет момент порядка $0 < \alpha < 1$, но не выше, то сходимость к двойному экспоненциальному закону у гауссовского предела ПСИ-процессов будет выполняться при a_T, b_T и H_α таких же, как в теореме 1.

В заключение отметим, что данная работа тематически продолжает публикацию [10].

4. Приложение. Тауберова теорема. Приведем тауберову теорему из книги [9] (теорема 1.7.1′) с обозначениями, адаптированными к нашей статье.

Теорема 3. *Пусть λ — неотрицательная случайная величина, $F_\lambda(x)$ — ее функция распределения; $L_\lambda(s)$ — ее преобразование Лапласа. Если функция ℓ медленно меняется в нуле и $0 \leqslant p < \infty$, то каждое из соотношений*

$$L_\lambda(s) \sim cs^{-p}\ell(s), \quad s \to \infty,$$

$$F_\lambda(x) \sim \frac{c}{\Gamma(p+1)} x^p \ell(1/x), \quad x \to 0,$$

влечет за собой другое при $c \geqslant 0$.

Отметим, что в книге Н. Х. Бингхама, С. М. Голдие и Дж. Л. Тогельса [9] теорема 1.7.1′ приведена со ссылкой на тауберовы теоремы из знаменитой монографии У. Феллера [1]. Далее здесь напомним определение медленно меняющейся функции.

Определение 2. Определенная на $[0, \infty)$ положительная функция ℓ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если при каждом фиксированном $x > 0$ имеет место соотношение

$$\frac{\ell(tx)}{\ell(t)} \to 1, \quad t \to \infty.$$

Говорят, что функция $\ell(t)$ *медленно меняется в нуле*, если $\ell(\frac{1}{t})$ медленно меняется на бесконечности.

Литература

1. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, пер. с англ. Т. 2. Москва, Мир (1984).

2. Невё Ж. *Математические основы теории вероятностей*, пер. с франц. Москва, Мир (1969).

3. Русаков О. В. Псевдо-пуассоновские процессы со стохастической интенсивностью и класс процессов, обобщающих процесс Орнштейна — Уленбека. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4 (62)**, вып. 2, 247–257 (2017). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.208

4. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. *Экстремумы случайных последовательностей и процессов*, пер. с англ. Москва, Мир (1989).

5. Булинский А. В., Ширяев А. Н. *Теория случайных процессов*. Москва, Физматлит (2003).

6. Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер*, пер. с англ. Москва, Наука (1977).

7. Русаков О. В. Относительная компактность сумм независимых одинаково распределенных псевдо-пуассоновских процессов в пространстве Скорохода. *Зап. научн. сем. ПОМИ* **442**, 122–132 (2015).

8. Samorodnitsky G., Taqqu M. S. *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. In Ser.: Stochastic Modeling Series, vol. 1. New York, Chapman and Hall/CRC (1994).

9. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. *Regular variation*. Cambridge, Cambridge University Press (1987).

10. Русаков О. В., Баев Б. А., Якубович Ю. В. О некоторых локальных асимптотических свойствах последовательностей со случайным индексом. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7 (65)**, вып. 3, 453–468 (2020). https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.308

Статья поступила в редакцию 1 ноября 2021 г.;
доработана 23 ноября 2021 г.;
рекомендована к печати 2 декабря 2021 г.

Контактная информация:

Русаков Олег Витальевич — доц.; ovirusakov@yahoo.co.uk
Рагозин Роман Алексеевич — eyshella@gmail.com

On extremes of PSI-processes and gaussian limits of their normalized independent identical distributed sums*

O. V. Rusakov, R. A. Ragozin

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Rusakov O. V., Ragozin R. A. On extremes of PSI-processes and gaussian limits of their normalized independent identical distributed sums. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 269–277. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.208 (In Russian)

We define PSI-process — Poisson Stochastic Index process, as a continuous time random process which is obtained by a manner of a randomization for the discrete time of a random sequence. We consider the case when a double stochastic Poisson process generates this randomization, i. e. such Poisson process has a random intensity. Under condition of existence of the second moment the stationary PSI-processes possess a covariance which coincides with the Laplace transform of the random intensity. In our paper we derive distributions of extremes for a one PSI-process, and these extremes are expressed in terms of Laplace transform of the random intensity. The second task that we solve is a convergence of the maximum of Gaussian limit for normalized sums of i. i. d. stationary PSI-processes. We obtain necessary and sufficient conditions for the intensity under which, after proper centering and normalization, this Gaussian limit converges in distribution to the double Exponential Law. For solution this task we essentially base on the monograph: M. R. Leadbetter, Georg

*This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grant no. 20-01-00646 A).

Lindgren, Holder Rootzen (1986) “Extremes and Relative Properties of Random Sequences and Processes”, end essentially use the Tauberian theorem in W. Feller form.

Keywords: pseudo-poissonian type processes, random intensity, Laplace transform for distributions, Tauberian theorems.

References

1. Feller W. *An introduction o probability theory and its applications.* Vol. 2. New York, John Wiley & Sons (1971). [Rus. ed.: Feller W. *Vvedenie v teoriju verojatnostej i ee prilozhenija.* Moscow, Mir Publ. (1984)].

2. Neveu J. *Bases matématiques du calculdes probabilités.* Paris, Masson Et Cie (1964). [Rus. ed.: Neveu J. *Matematicheskie osnovy teorii verojatnostej.* Moscow, Mir Publ. (1969)].

3. Rusakov O. V. Pseudo-Poissonian processes with stochastic intensity and a class of processes which generalize the Ornstein — Uhlenbeck process. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4 (62)**, iss. 2, 247–257 (2017). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.208 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **50**, 153–160 (2017). https://doi.org/10.3103/S106345411702011X].

4. Leadbetter M. R., Lindgren G., Rootzen H. *Extremes and related properties of random sequences and processes.* In Ser.: Springer Series in Statistics. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag (1986). [Rus. ed.: Leadbetter M. R., Lindgren G., Rootzen H. *Jekstremumy sluchajnyh posledovatel'nostej i processov.* Moscow, Mir Publ. (1989)].

5. Bulinskiy A. V., Shiryaev F. N. *Theory of random processes.* Moscow, Fizmatlit Publ. (2003). (In Russian)

6. Billingsley P. *Convergence of Probability Measures.* New York, John Wiley & Sons (1968). [Rus. ed.: Billingsley P. *Shodimost' verojatnostnyh mer.* Moscow, Nauka Publ. (1977)].

7. Rusakov O. V. Tightness of Sums of Independent Identically Distributed Pseudo-Poisson Processes in the Skorokhod Space. *Zap. Nauchn. Sem. POMI* **442**, 122–132 (2015). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **225**, 805–811 (2017). https://doi.org/10.1007/s10958-017-3496-z].

8. Samorodnitsky G., Taqqu M. S. *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance.* In Ser.: Stochastic Modeling Series, vol. 1. New York, Chapman and Hall/CRC (1994).

9. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. *Regular variation.* Cambridge, Cambridge University Press (1987).

10. Rusakov O. V., Baev B. A., Yakubovich Y. V. On some local asymptotic properties of sequences with a random index. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7 (65)**, iss. 3, 453–468 (2020). https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.308 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **53** (3), 308–319 (2020). https://doi.org/10.1134/S1063454120030115].

Received: November 1, 2021
Revised: November 23, 2021
Accepted: December 2, 2021

Authors' information:

Oleg V. Rusakov — ovirusakov@yahoo.co.uk
Roman A. Ragozin — eyshella@gmail.com