

Нелинейное модальное взаимодействие продольных и изгибных колебаний балочного резонатора при периодическом тепловом нагружении*

Н. Ф. Морозов^{1,2}, Д. А. Индейцев^{2,3}, А. В. Лукин³,
И. А. Попов³, Л. В. Штукин^{2,3}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Институт проблем машиноведения РАН,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, В. О., Большой пр., 61

³ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

Для цитирования: Морозов Н. Ф., Индейцев Д. А., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В. Нелинейное модальное взаимодействие продольных и изгибных колебаний балочного резонатора при периодическом тепловом нагружении // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 317–337. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.212>

В работе исследуется нелинейное модальное взаимодействие продольных и изгибных колебаний балочного резонатора при периодическом тепловом нагружении. Исследуется режим параметрических колебаний в условиях внутреннего кратного резонанса между некоторыми изгибной и продольной формами свободных колебаний резонатора. Обнаружена возможность генерации в системе режима продольно-изгибных биений, частота медленной огибающей которых существенным образом зависит от параметра внутренней частотной расстройки, непосредственно связанного с величиной внешних возмущений, подлежащих высокоточному измерению.

Ключевые слова: нелинейная динамика, параметрические колебания, балка Бернулли — Эйлера, модальное взаимодействие, биения.

1. Введение. Принцип лазерного термооптического воздействия на деформируемую среду находит все более широкое применение в задачах неразрушающего контроля оборудования и конструкций [1, 2], определения физико-механических свойств материалов [3, 4], изучения геометрических и физических параметров объектов и структур на нано- и микромасштабном уровнях [5, 6], в биомедицине [7], а также в индустрии нано- и микросистем. Так, в работах [8, 9] представлены модели микромеханических актуаторов, использующих оптический метод сообщения упругому элементу температурных деформаций. В [10] исследуются вопросы влияния лазерного излучения на деформации поверхности микромеханических зеркал. Одним из важных направлений разработок и исследований в указанной области является лазерная термооптическая генерация колебаний подвижных элементов микроэлектромеханических систем различного назначения (датчики, системы обработки сигналов). В [11] представлены результаты разработки волоконно-оптических сенсоров,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00537).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2022

работающих в авторезонансном режиме при оптическом возбуждении. В [12] теоретически обоснован и экспериментально проверен метод лазерной термооптической частотной подстройки микромеханического резонатора и управления его нелинейной амплитудно-частотной характеристикой. В [13] сообщается об успешных экспериментах по термооптическому возбуждению многомодового параметрического резонанса в графеновых мембранах. В [14] представлены результаты исследования нелинейной динамики системы слабо связанных микроэлектромеханических генераторов предельных циклов с термооптическим принципом возбуждения колебаний.

При рассмотрении динамики упругих элементов резонаторов, входящих в состав микро-/наноэлектромеханических систем (М/НЭМС), часто применяется механическая модель Бернулли — Эйлера. На эту тему есть обширная литература. Здесь упомянем лишь некоторые работы, в которых решены задачи, наиболее близкие по постановке к представленной далее. В [15] исследуется динамическая потеря устойчивости прямолинейного стержня с учетом процесса распространения упругих волн в продольном направлении. Показано, что критическая осевая нагрузка при динамическом воздействии может быть меньше эйлеровой в связи с реализацией параметрического резонанса, возбуждаемого продольными колебаниями. В [16] исследуется нелинейная динамика пространственных изгибно-крутильных колебаний стержня в случае множественных внутренних резонансов. Методы исследования и характер процессов модальной локализации в балке Бернулли — Эйлера изучаются в работе [17]. В [18] рассматривается задача о проектировании изохронных балочных элементов — систем, частоты свободных изгибных колебаний которых не зависят от амплитуды колебаний даже в нелинейных режимах движения.

Большое число работ посвящено изучению сложных режимов колебаний в нелинейных механических системах со сосредоточенными и распределенными параметрами. В [19] исследуется характер нелинейных нормальных мод в одномерных континуальных системах с квадратичными и кубическими нелинейностями в случае различных внутренних резонансов. В работе [20] предложены эффективные аналитические подходы, позволяющие описывать процессы биений и обмена энергией между модами в системах слабо связанных осцилляторов. В [21] в достаточно общей постановке исследуются качественные особенности нелинейной динамики свободных колебаний для системы с двумя степенями свободы в случае внутреннего резонанса $1 : 1$.

Отдельный класс исследований составляют работы, посвященные задачам нелинейного модального взаимодействия между продольными и изгибными движениями струн, кабелей и стержней. Так, в работе [22] исследованы пространственные продольно-изгибные колебания натянутой струны в условиях внутреннего резонанса с учетом физической нелинейности системы. В [23] изучена динамика продольно-изгибных движений существенно растяжимого кабеля в геометрически нелинейной постановке в предположении линейно-упругого поведения материала. Нелинейная динамика продольно-изгибных колебаний балки, движущейся в осевом направлении, рассмотрена в работе [24].

Проблемы аналитического исследования связанных термоупругих колебаний рассматриваются в большом количестве монографий и статей. В работе [25] представлены редуцированные модели, позволяющие вычислительно эффективно моделировать двусторонне связанные термоупругие процессы в пластинах. В ряде работ изучаются тепловые и механические процессы в элементах конструкций при нестационарных температурных воздействиях. В [26] разработана двухтемпературная мо-

дель, описывающая оптическое возбуждение акустических колебаний в проводниках. Динамика балки Бернулли—Эйлера на упругом основании при импульсном лазерном воздействии исследуется в работе [27]. Анализ посткритического поведения балки на винклеровском основании при температурном нагружении выполнен в [28].

В более ранних работах [29–31] рассматривалась динамика и упругая устойчивость балочного элемента МЭМС и НЭМС при кратковременных тепловых воздействиях. В [32] был исследован характер свободных продольно-изгибных колебаний стержня в случае внутреннего комбинационного резонанса между двумя изгибными и низшей продольной формами колебаний. Было показано, что начальное возмущение в продольном направлении может эффективно возбуждать изгибные формы колебаний, что в целом приводит к режиму продольно-изгибных биений со значительными амплитудами.

В настоящей работе исследуется нелинейная динамика связанных продольно-изгибных колебаний защемленной с двух концов микробалки — базового чувствительного элемента перспективного класса микродатчиков различных физических величин — при лазерном термооптическом воздействии в форме периодически генерируемых импульсов, действующих на некоторую часть поверхности балочного элемента. Исследуется режим параметрических колебаний микробалки в условиях внутреннего кратного резонанса между некоторыми изгибной и продольной формами свободных колебаний резонатора. Обнаружена возможность генерации в системе режима продольно-изгибных биений, частота медленной огибающей которых существенным образом зависит от параметра внутренней частотной расстройки, непосредственно связанного с величиной внешних возмущений, подлежащих высокоточному измерению.

2. Математическая модель. Продольные колебания защемленного с двух концов тонкого прямолинейного линейно-упругого стержня при температурном воздействии в рамках механической модели Бернулли—Эйлера описываются следующими уравнениями:

$$-\frac{\partial N}{\partial x} + \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{ES} N - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\alpha}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T(x, z, t) - T_0) dz \quad (2)$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad (3)$$

где t — время; x, z — координаты в горизонтальном и вертикальном направлениях; u, w — продольное и поперечное перемещения; N — продольная сила; T — температура в данной точке стержня; T_0 — отсчетная температура; ρ, E, α — плотность, модуль Юнга и коэффициент линейного температурного расширения материала; $S = bh$; L, b, h — длина стержня, ширина и высота поперечного сечения соответственно.

Уравнения (1), (2) могут быть приведены к одному уравнению продольных колебаний:

$$u'' + w'w'' = \frac{\rho}{E} \ddot{u} + \alpha \theta', \quad (4)$$

где $\theta(x, t) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T(x, z, t) - T_0) dz$ — среднее по высоте отклонение температуры от отсчетного значения в сечении с координатой x ; $()', \dot{()}$ — обозначение частных производных по x и t соответственно.

Изгибные колебания стержня при температурном воздействии описываются уравнениями

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{EJ} \left(M + Eb\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z (T(x, z, t) - T_0) dz \right). \quad (6)$$

В поперечном направлении примем условия жесткой заделки:

$$w(0, t) = w'(0, t) = 0, \quad w(L, t) = w'(L, t) = 0. \quad (7)$$

Здесь $J = \frac{bh^3}{12}$ — момент инерции сечения.

Введем обозначение N^T для осевой температурной силы в сечении с координатой x и M^T для изгибающего температурного момента:

$$N^T \triangleq ES\alpha\theta = Eb\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T(x, z, t) - T_0) dz, \quad (8)$$

$$M^T \triangleq Eb\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z (T(x, z, t) - T_0) dz. \quad (9)$$

Уравнения (5), (6) могут быть преобразованы к виду

$$EJw^{IV} + \rho S\ddot{w} + N^T w'' = - (M^T)'' + ES \left[u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right] w'' + \rho S\ddot{u}w'. \quad (10)$$

Таким образом, система уравнений (4), (10) совместно с граничными условиями (3), (7) полностью описывает продольно-изгибные колебания стержня при температурном воздействии.

Перейдем к безразмерным переменным

$$u = \tilde{u}h, \quad w = \tilde{w}h, \quad x = \tilde{x}L, \quad t = \tau T, \quad (11)$$

где $T = \sqrt{\frac{\rho SL^4}{EJ}}$.

Введем следующие обозначения для безразмерных температурных силовых факторов:

$$\tilde{N}^T(\tilde{x}, \tau) = \frac{L^2}{EJ} N^T(L\tilde{x}, T\tau), \quad (12)$$

$$\tilde{N}_x^T(\tilde{x}, \tau) = \frac{L^2}{ESh} \frac{\partial N^T}{\partial x}(L\tilde{x}, T\tau), \quad (13)$$

$$\tilde{M}_{xx}^T(\tilde{x}, \tau) = \frac{L^4}{EJh} \frac{\partial^2 M^T}{\partial x^2}(L\tilde{x}, T\tau). \quad (14)$$

Также введем безразмерный параметр $\beta = \frac{1}{12} \frac{h}{L}$, характеризующий тонкость стержня.

Подставляя (11) в (4), (10) и (3), (7), отбрасывая символ $\sim$ и сохраняя обозначения $(\cdot)', (\cdot)\dot{}$ за производными по безразмерной продольной координате и времени, получим уравнения движения в следующей форме:

$$u'' + 12\beta w'w'' = 12\beta^2\ddot{u} + \tilde{N}_x^T, \quad (15)$$

$$w^{IV} + \ddot{w} + \tilde{N}^T w'' = -\tilde{M}_{xx}^T + \frac{1}{\beta} u'w'' + 6(w')^2 w'' + 12\beta\ddot{u}w' \quad (16)$$

с граничными условиями

$$u(0, \tau) = w(0, \tau) = w'(0, \tau) = 0, \quad u(1, \tau) = w(1, \tau) = w'(1, \tau) = 0. \quad (17)$$

Рассмотрим сценарий произвольного по пространственной конфигурации и гармонического по времени лазерного термооптического воздействия на микрорезонатор, моделируемого как объемное тепловыделение. Установившееся гармоническое распределение температуры в объеме резонатора в общем случае примет вид

$$T(x, z, t; \Omega) = T_s(x, z; \Omega) + T_d^{amp}(x, z; \Omega) \cos \left[\Omega t + T_d^{phase}(x, z; \Omega) \right], \quad (18)$$

где Ω — частота термооптического воздействия, T_s — статическая компонента температурного состояния резонатора, T_d^{amp}, T_d^{phase} — амплитудная и фазовая характеристики гармонической компоненты температурного поля.

В соответствии с (8), (9) температурная осевая сила и температурный изгибающий момент могут быть записаны как

$$N^T(x, t; \Omega) = N^{TS}(x; \Omega) + N^{TD}(x, t; \Omega), \quad (19)$$

$$M^T(x, t; \Omega) = M^{TS}(x; \Omega) + M^{TD}(x, t; \Omega), \quad (20)$$

где статические (N^{TS}, M^{TS}) и динамические (N^{TD}, M^{TD}) компоненты теплового воздействия имеют вид

$$N^{TS}(x; \Omega) = Eb\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_s(x, z; \Omega) dz, \quad (21)$$

$$M^{TS}(x; \Omega) = Eb\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z T_s(x, z; \Omega) dz, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} N^{TD}(x, t; \Omega) = & Eb\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_d^{amp}(x, z; \Omega) \cos \left[T_d^{phase}(x, z; \Omega) \right] dz \cdot \cos(\Omega t) - \\ & - Eb\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_d^{amp}(x, z; \Omega) \sin \left[T_d^{phase}(x, z; \Omega) \right] dz \cdot \sin(\Omega t), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} M^{TD}(x, t; \Omega) = & Eb\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z T_d^{amp}(x, z; \Omega) \cos \left[T_d^{phase}(x, z; \Omega) \right] dz \cdot \cos(\Omega t) - \\ & - Eb\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z T_d^{amp}(x, z; \Omega) \sin \left[T_d^{phase}(x, z; \Omega) \right] dz \cdot \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (24)$$

С использованием введенных обозначений уравнения (15), (16) продольно-изгибных колебаний резонатора в безразмерной форме примут вид

$$u'' + 12\beta w' w'' = 12\beta^2 \ddot{u} + \tilde{N}_x^{TS}(x; \Omega) + \tilde{N}_x^{TD}(x, \tau; \Omega), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} w^{IV} + \ddot{w} + \left[\tilde{N}^{TS}(x; \Omega) + \tilde{N}^{TD}(x, \tau; \Omega) \right] w'' = \\ = -\tilde{M}_{xx}^{TS}(x; \Omega) - \tilde{M}_{xx}^{TD}(x, \tau; \Omega) + \frac{1}{\beta} u' w'' + 6(w')^2 w'' + 12\beta \ddot{u} w'. \end{aligned} \quad (26)$$

3. Исследование вынужденных продольно-изгибных колебаний.

3.1. Конкретизация условий внутреннего резонанса. Исследуем нелинейное модальное взаимодействие некоторой продольной формы колебаний стержня с некоторой изгибной формой. Задача о свободных колебаниях стержня в отсутствие теплового воздействия имеет вид

$$u'' + 12\beta w' w'' = 12\beta^2 \ddot{u}, \quad (27)$$

$$w^{IV} + \ddot{w} = \frac{1}{\beta} u' w'' + 6(w')^2 w'' + 12\beta \ddot{u} w' \quad (28)$$

с граничными условиями (17).

Примечательно, что в исследуемую систему уравнений входит лишь один параметр — β . Вышесказанное условие внутреннего резонанса накладывает определенные условия на его возможные значения.

В настоящей работе исследуется возможность лазерной термооптической генерации изгибных колебаний по сценарию главного параметрического резонанса. При этом задача рассматривается в связанной продольно-изгибной постановке, и одним из предметов исследования является влияние фактора продольных колебаний на динамику системы. Рассматриваемый случай внутреннего резонанса записывается как

$$2\omega_l \simeq \bar{\omega}_n, \quad (29)$$

где ω_l — некоторая из частот изгибных колебаний, $\bar{\omega}_n$ — некоторая из частот продольных колебаний.

Уравнение малых свободных продольных колебаний в принятых обозначениях имеет вид

$$u'' = 12\beta^2 \ddot{u}. \quad (30)$$

Спектр собственных частот продольных колебаний заземленного с двух концов стержня определяется соотношением

$$\bar{\omega}_n = \frac{n\pi}{\sqrt{12}\beta}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Далее будем рассматривать случаи колебаний по первой и второй продольным формам: $n = 1, 2$.

Спектр изгибных колебаний $\{\omega_l\}$ заделанной с двух концов балки находится из краевой задачи на собственные значения для уравнения

$$w^{IV} + \ddot{w} = 0 \quad (32)$$

с граничными условиями (17).

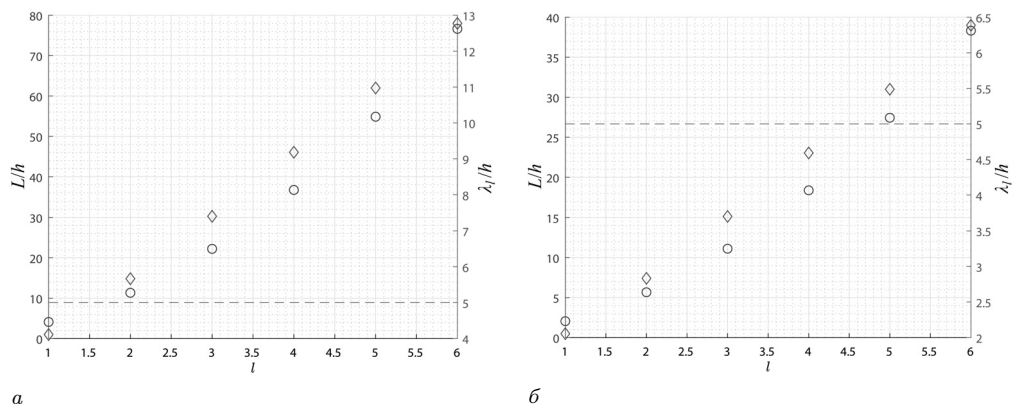


Рис. 1. К вопросу о применимости модели балки Бернулли — Эйлера: зависимость отношения L/h от индекса l при $n = 1$ (а), $n = 2$ (б).

Таким образом, соотношение (29), определяющее диапазон значений параметра β , а значит, отношений высоты сечения балки к ее длине, необходимый для реализации внутреннего резонанса в системе, имеет следующий вид:

$$2\omega_l \simeq \frac{n\pi}{\sqrt{12}\beta}. \quad (33)$$

Соотношение (33) может быть иначе записано как

$$\frac{h}{L} \simeq \frac{\sqrt{3}n\pi}{\omega_l}. \quad (34)$$

При рассмотрении различных комбинаций значений индексов l, n необходимо учитывать границы применимости механической модели Бернулли — Эйлера, описывающей напряженно-деформированное состояние стержня при изгибе. Характерным показателем здесь является отношение длины λ полуволны учитываемой изгибной формы колебаний (в наших обозначениях — λ_l) к толщине стержня h . Предельно низким допустимым значением этого показателя можно считать 5.

На рис. 1 показана зависимость отношения L/h от индекса l при точном выполнении условия внутреннего резонанса (33) для $n = 1$ и $n = 2$. Также на рисунке приведены соответствующие значения отношения λ_l/h .

Как видно из рисунка, приемлемые отношения λ_l/h достигаются при $l \geq 2$ для $n = 1$ и при $l \geq 5$ для $n = 2$. В дальнейшем будем исследовать случаи $n = 1, l = 2$ и $n = 2, l = 5$. Согласно (34) и рис. 1, для возникновения внутреннего резонанса должны выполняться приближительные равенства $\frac{h}{L} \simeq 0.088$ и $\frac{h}{L} \simeq 0.036$ соответственно.

3.2. Дискретизация континуальной системы методом Галёркина.

Для исследования нелинейной динамики системы (25), (26) применим процедуру Галёркина по рассматриваемым формам продольных и изгибных колебаний:

$$u(x, \tau) = \phi_n(x) U_n(\tau), \quad w(x, \tau) = \psi_l(x) W_l(\tau). \quad (35)$$

Изучая сценарий параметрического возбуждения колебаний, пренебрежем в уравнении (26) моментными температурными факторами $\tilde{M}_{xx}^{TS}(x; \Omega)$ и $\tilde{M}_{xx}^{TD}(x, \tau; \Omega)$.

С учетом условий нормировки

$$\int_0^1 \phi_n^2 dx = \int_0^1 \psi_l^2 dx = 1 \quad (36)$$

редуцированные уравнения продольно-изгибных колебаний стержня примут вид

$$\ddot{U}_n + \bar{\omega}_n^2 U_n = \frac{A_1}{\beta} W_l^2 + \frac{1}{12\beta^2} [F_u^S(\Omega) + F_u^D(\tau; \Omega)], \quad (37)$$

$$\ddot{W}_l + [\omega_l^2 + k_w^S(\Omega) + k_w^D(\tau; \Omega)] W_l = \frac{B_1}{\beta} U_n W_l + 6B_2 W_l^3 + 12B_3 \beta \ddot{U}_n W_l, \quad (38)$$

где

$$A_1 = \int_0^1 \psi_l' \psi_l'' \phi_n dx, \quad B_1 = \int_0^1 \psi_l \psi_l'' \phi_n' dx, \quad B_2 = \int_0^1 \psi_l \psi_l'^2 \psi_l'' dx, \quad B_3 = \int_0^1 \psi_l \psi_l' \phi_n dx, \quad (39)$$

$$F_u^S(\Omega) = - \int_0^1 \tilde{N}_x^{TS}(x; \Omega) \phi_n dx, \quad F_u^D(\tau; \Omega) = - \int_0^1 \tilde{N}_x^{TD}(x, \tau; \Omega) \phi_n dx, \quad (40)$$

$$k_w^S(\Omega) = \int_0^1 \tilde{N}^{TS}(x; \Omega) \psi_l \psi_l'' dx, \quad k_w^D(t; \Omega) = \int_0^1 \tilde{N}^{TD}(x, \tau; \Omega) \psi_l \psi_l'' dx. \quad (41)$$

Представим решение уравнения (37) в виде

$$U_n = U_n^{(s)} + U_n^{(d)}(\tau), \quad (42)$$

где статическое деформированное состояние стержня в продольном направлении $U_n^{(s)}$ находится из соотношения

$$\bar{\omega}_n^2 U_n^{(s)}(\Omega) = \frac{1}{12\beta^2} F_u^S(\Omega). \quad (43)$$

Обозначая в дальнейшем $U_n^{(d)} \equiv U_n$, система (37), (38) примет вид

$$\ddot{U}_n + 2\bar{\omega}_n \xi_u \dot{U}_n + \bar{\omega}_n^2 U_n = \frac{A_1}{\beta} W_l^2 + \frac{1}{12\beta^2} [f_u^{\cos}(\Omega) \cos(\Omega\tau) + f_u^{\sin}(\Omega) \sin(\Omega\tau)], \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \ddot{W}_l + 2\omega_l \xi_w \dot{W}_l + \left[\omega_l^2 + k_w^S(\Omega) - \frac{B_1}{\beta} U_n^{(s)}(\Omega) + f_w^{\cos}(\Omega) \cos(\Omega\tau) + f_w^{\sin}(\Omega) \sin(\Omega\tau) \right] W_l = \\ = \frac{B_1}{\beta} U_n W_l + 6B_2 W_l^3 + 12B_3 \beta \ddot{U}_n W_l. \end{aligned} \quad (45)$$

В системе (44), (45) учитывается наличие линейного вязкого трения с коэффициентами относительного затухания ξ_u, ξ_w . Параметры $f_u^{\cos}(\Omega), f_u^{\sin}(\Omega)$ и $f_w^{\cos}(\Omega), f_w^{\sin}(\Omega)$ характеризуют амплитуды синус- и косинус-гармоник функций $F_u^D(\tau; \Omega)$ и $k_w^D(\tau; \Omega)$ соответственно.

В конкретном рассматриваемом случае главного параметрического резонанса

$$\Omega = 2\omega_l + \sigma_\Omega, \quad (46)$$

где σ_Ω — частотная расстройка лазерного излучения по отношению к удвоенной частоте изгибных колебаний резонатора. Параметры теплового воздействия могут быть с достаточной точностью представлены своими линейными приближениями по величине σ_Ω :

$$\begin{aligned}
 f_u^{\cos}(\Omega) &= f_u^{\cos}(2\omega_l) + \left. \frac{df_u^{\cos}}{d\sigma_\Omega} \right|_{\sigma_\Omega=0} \cdot \sigma_\Omega, \\
 f_u^{\sin}(\Omega) &= f_u^{\sin}(2\omega_l) + \left. \frac{df_u^{\sin}}{d\sigma_\Omega} \right|_{\sigma_\Omega=0} \cdot \sigma_\Omega, \\
 U_n^{(s)}(\Omega) &= U_n^{(s)}(2\omega_l) + \left. \frac{dU_n^{(s)}}{d\sigma_\Omega} \right|_{\sigma_\Omega=0} \cdot \sigma_\Omega, \\
 k_w^S(\Omega) &= k_w^S(2\omega_l) + \left. \frac{dk_w^S}{d\sigma_\Omega} \right|_{\sigma_\Omega=0} \cdot \sigma_\Omega, \\
 f_w^{\cos}(\Omega) &= f_w^{\cos}(2\omega_l) + \left. \frac{df_w^{\cos}}{d\sigma_\Omega} \right|_{\sigma_\Omega=0} \cdot \sigma_\Omega, \\
 f_w^{\sin}(\Omega) &= f_w^{\sin}(2\omega_l) + \left. \frac{df_w^{\sin}}{d\sigma_\Omega} \right|_{\sigma_\Omega=0} \cdot \sigma_\Omega.
 \end{aligned} \tag{47}$$

Числовые значения приведенных выше коэффициентов разложения определяются на основе решения температурной задачи для конкретной конфигурации теплового воздействия.

В предшествующем изложении подчеркивалась зависимость тепловых факторов, входящих в уравнения колебаний стержня, от частоты воздействия Ω . Теперь необходимо отметить два обстоятельства. Во-первых, коэффициенты (47) пропорциональны интенсивности лазерного излучения. Во-вторых, названные коэффициенты зависят от геометрических характеристик резонатора (от размеров области, в которой решается тепловая задача) — а значит, от параметра внутренней частотной расстройки σ_ω , определяющего близость к внутреннему резонансу (29):

$$\bar{\omega}_n = 2\omega_l - \sigma_\omega. \tag{48}$$

Таким образом, конкретный вид линейных приближений (47) должен поочередно определяться для ряда фиксированных значений параметра внутренней частотной расстройки σ_ω .

Соотношения (48), (31) позволяют представить геометрический параметр $\beta = \frac{1}{12} \frac{h}{L}$, входящий в систему (44), (45), как

$$\beta(\sigma_\omega) = \frac{n\pi}{\sqrt{12}(2\omega_l - \sigma_\omega)}. \tag{49}$$

В дальнейшем при параметрическом исследовании нелинейных колебаний стержня в качестве активных (продолжаемых) параметров мы будем рассматривать параметр внешней частотной расстройки σ_Ω и параметр мощности теплового воздействия. Расчеты будут проводиться для ряда фиксированных значений параметра внутренней частотной расстройки σ_ω .

3.3. Построение приближенного решения асимптотическим методом многих масштабов. Исследование нелинейной динамики системы (44), (45)

выполним с помощью метода многих масштабов. Введем в уравнения колебаний малый параметр ε следующим образом:

$$\ddot{U}_n + 2\varepsilon\bar{\omega}_n\xi_u\dot{U}_n + \bar{\omega}_n^2 U_n = \frac{\varepsilon A_1}{\beta} W_l^2 + \frac{\varepsilon^3}{12\beta^2} [f_u^{\cos}(\Omega) \cos(\Omega\tau) + f_u^{\sin}(\Omega) \sin(\Omega\tau)], \quad (50)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{W}_l + 2\varepsilon^2\omega_l\xi_w\dot{W}_l + \\ & + \left[\omega_l^2 + \varepsilon \left(k_w^S(\Omega) - \frac{B_1}{\beta} U_n^{(s)}(\Omega) \right) + \varepsilon^2 (f_w^{\cos}(\Omega) \cos(\Omega\tau) + f_w^{\sin}(\Omega) \sin(\Omega\tau)) \right] W_l = \\ & = \frac{B_1}{\beta} U_n W_l + 6B_2 W_l^3 + 12B_3\beta\ddot{U}_n W_l. \end{aligned} \quad (51)$$

Параметр ε является символом порядка малости и имеет числовое значение, равное единице.

Следуя методу многих масштабов, будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} U_n &= \varepsilon^2 U_{0n}(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \varepsilon^3 U_{1n}(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + O(\varepsilon^4), \\ W_l &= \varepsilon W_{0l}(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \varepsilon^2 W_{1l}(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + \varepsilon^3 W_{2l}(\tau_0, \tau_1, \tau_2) + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (52)$$

где $\tau_k = \varepsilon^k \tau$ — различные масштабы времени.

В представлении (52) учитывается тот факт, что принятая механическая модель взаимодействия продольных и изгибных движений стержня (1), (2), (5), (6) соответствует предположению о соотношении между амплитудами компонент перемещений $u = O(w^2)$ [33].

Производные по безразмерному времени τ выразим через производные по аргументам τ_k :

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + O(\varepsilon^3), \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + O(\varepsilon^3), \quad (53)$$

где $D_k = \partial/\partial\tau_k$. Подставляя (52), (53) в уравнения (50), (51) и группируя члены по степеням параметра ε , получим итерационную последовательность систем линейных ОДУ.

Уравнения первого приближения:

$$D_0^2 W_{0l} + \omega_l^2 W_{0l} = 0. \quad (54)$$

Уравнения второго приближения:

$$\begin{aligned} D_0^2 U_{0n} + \bar{\omega}_n^2 U_{0n} &= 0, \\ D_0^2 W_{1l} + \omega_l^2 W_{1l} &= -2D_0 D_1 W_{0l} - \left(k_w^S(\Omega) - \frac{B_1}{\beta} U_n^{(s)}(\Omega) \right) W_{0l}. \end{aligned} \quad (55)$$

Уравнения третьего приближения:

$$\begin{aligned} D_0^2 U_{1n} + \bar{\omega}_n^2 U_{1n} &= \frac{A_1}{\beta} W_{0l}^2 - 2D_0 D_1 U_{0n} - 2\bar{\omega}_n \xi_u D_0 U_{0n} + \\ &+ \frac{1}{12\beta^2} [f_u^{\cos}(\Omega) \cos(\Omega\tau_0) + f_u^{\sin}(\Omega) \sin(\Omega\tau_0)], \end{aligned}$$

$$D_0^2 W_{2l} + \omega_l^2 W_{2l} = 6B_2 W_{0l}^3 - 2D_0 D_2 W_{0l} - D_1^2 W_{0l} - \left(k_w^S(\Omega) - \frac{B_1}{\beta} U_n^{(s)}(\Omega) \right) W_{1l} - \\ - \left(f_w^{\cos}(\Omega) \cos(\Omega \tau_0) + f_w^{\sin}(\Omega) \sin(\Omega \tau_0) \right) W_{0l} - 2D_0 D_1 W_{1l} + \\ + 12B_3 \beta D_0^2 U_{0n} W_{0l} - 2\omega_l \xi_w D_0 W_{0l} + \frac{B_1}{\beta} U_{0n} W_{0l}. \quad (56)$$

Условия внутреннего (48) и параметрического (46) резонансов запишем с формальным введением параметра ε :

$$\bar{\omega}_n = 2\omega_l - \varepsilon \sigma_\omega, \\ \Omega = 2\omega_l + \varepsilon \sigma_\Omega. \quad (57)$$

Решение порождающих уравнений представим в виде

$$U_{0n} = A_u(\tau_1, \tau_2) e^{i\bar{\omega}_n \tau_0} + \bar{A}_u(\tau_1, \tau_2) e^{-i\bar{\omega}_n \tau_0}, \\ W_{0l} = A_w(\tau_1, \tau_2) e^{i\omega_l \tau_0} + \bar{A}_w(\tau_1, \tau_2) e^{-i\omega_l \tau_0}, \quad (58)$$

где комплексные амплитуды колебаний могут быть записаны как

$$A_{u,w}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} a_{u,w}(\tau_1, \tau_2) e^{i\beta_{u,w}(\tau_1, \tau_2)}. \quad (59)$$

Здесь $a_{u,w}$ и $\beta_{u,w}$ — подлежащие определению амплитуды и сдвиги фаз колебаний как функции медленных переменных τ_1, τ_2 .

Условия отсутствия секулярных слагаемых в решениях уравнений для старших приближений позволяют записать систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно величин a_u, a_w, χ_u, χ_w :

$$24\beta^2 \bar{\omega}_n \frac{da_u}{d\tau} = 6A_1 \beta a_w^2 \sin(\chi_w) - 24\beta^2 \bar{\omega}_n^2 \xi_u a_u - f_u^{\sin} \cos(\chi_u) + f_u^{\cos} \sin(\chi_u), \\ 4\beta \omega_l \frac{da_w}{d\tau} = -a_w \left(\beta f_w^{\cos} \sin(\chi_u - \chi_w) - \beta f_w^{\sin} \cos(\chi_u - \chi_w) + B_1 a_u \sin(\chi_w) + \right. \\ \left. + 4\beta \xi_w \omega_l^2 - 12B_3 \beta^2 \bar{\omega}_n^2 a_u \sin(\chi_w) \right), \\ 24\beta^2 \bar{\omega}_n a_u \frac{d\chi_u}{d\tau} = 24\beta^2 \bar{\omega}_n (\sigma_\Omega + \sigma_\omega) a_u + 6A_1 \beta a_w^2 \cos(\chi_w) + f_u^{\cos} \cos(\chi_u) + f_u^{\sin} \sin(\chi_u), \\ 24\beta^2 \omega_l^3 \bar{\omega}_n a_u \frac{d\chi_w}{d\tau} = \omega_l^3 f_u^{\cos} \cos(\chi_u) + \omega_l^3 f_u^{\sin} \sin(\chi_u) - 6B_1^2 \bar{\omega}_n \left(U_n^{(s)} \right)^2 a_u - 6\beta^2 \bar{\omega}_n \left(k_w^S \right)^2 a_u + \\ + 24\beta^2 \omega_l^2 \bar{\omega}_n \left(k_w^S + \omega_l \sigma_\omega \right) a_u + 6A_1 \beta \omega_l^3 a_w^2 \cos(\chi_w) + \\ + 12\beta^2 \omega_l^2 \bar{\omega}_n a_u \left(f_w^{\cos} \cos(\chi_u - \chi_w) + f_w^{\sin} \sin(\chi_u - \chi_w) \right) + \\ + 144B_3 \beta^3 \omega_l^2 \bar{\omega}_n^3 a_u^2 \cos(\chi_w) + 12B_1 \beta \bar{\omega}_n U_n^{(s)} \left(k_w^S - 2\omega_l^2 \right) a_u - \\ - 108B_2 \beta^2 \omega_l^2 \bar{\omega}_n a_u a_w^2 - 12B_1 \beta \omega_l^2 \bar{\omega}_n a_u^2 \cos(\chi_w), \quad (60)$$

где модифицированные фазовые переменные χ_u, χ_w связаны с β_u, β_w соотношениями

$$\chi_u = -\beta_u + (\sigma_\Omega + \sigma_\omega) \tau, \\ \chi_w = 2\beta_w - \beta_u + \sigma_\omega \tau. \quad (61)$$

3.4. Результаты моделирования и их анализ. Система (50), (51) может быть рассмотрена как специальный случай общей задачи о взаимодействии продольных и изгибных форм колебаний стержня в геометрически нелинейной постановке. Представляет отдельный интерес вопрос о важности обмена энергией между данными формами колебаний в условиях совместного внутреннего и главного параметрического резонансов.

Выполним исследование этого вопроса на базе построенного приближенного асимптотического решения (60). Абстрагируясь от тепловой природы механических воздействий на систему, пренебрежем в уравнении (51) статическими факторами изменения жесткости рассматриваемой изгибной формы колебаний: $k_w^S(\Omega) \equiv 0, U_n^{(s)}(\Omega) \equiv 0$. Не нарушая общности, примем, что параметрическое возбуждение имеет фазу косинуса ($f_w^{\sin} \equiv 0$) с амплитудой, выражаемой в соотношении с силой потери устойчивости по выбранной изгибной форме: $f_w^{\cos} = \kappa \omega_l^2$, где κ — введенный параметр амплитуды воздействия. В уравнении продольных колебаний (50) учтем сдвиг фазы воздействия γ по отношению к параметрическому; амплитуду продольного возбуждения f_u^{amp} свяжем с амплитудой параметрического возбуждения с помощью коэффициента q .

В этих предположениях исследуемая система примет вид

$$\ddot{U}_n + 2\varepsilon \bar{\omega}_n \xi_u \dot{U}_n + \bar{\omega}_n^2 U_n = \frac{\varepsilon A_1}{\beta} W_l^2 + \frac{\varepsilon^3}{12\beta^2} q \kappa \omega_l^2 \cos(\Omega \tau - \gamma), \quad (62)$$

$$\ddot{W}_l + 2\varepsilon^2 \omega_l \xi_w \dot{W}_l + \omega_l^2 [1 + \varepsilon^2 \kappa \cos(\Omega \tau)] W_l = \frac{B_1}{\beta} U_n W_l + 6B_2 W_l^3 + 12B_3 \beta \ddot{U}_n W_l. \quad (63)$$

Далее представлены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) рассматриваемых компонент поперечных и продольных колебаний стержня для различных значений параметра внутренней частотной расстройки σ_ω . Результаты приведены при варьировании параметров κ и γ . Везде далее принято, что $q = 10^{-5}$; добротности колебательных свойств системы $Q_u = 10000, Q_w = 1000$, что выражает то физическое обстоятельство, что поперечные колебания, в отличие от продольных, приводят к существенному рассеянию механической энергии за счет взаимодействия резонатора с окружающей газовой средой. Рассматривается конструкция резонатора, соответствующая взаимодействию второй продольной формы колебаний с пятой изгибной ($n = 2, l = 5$).

На рис. 2 представлены резонансные кривые стержня в случае точной настройки на внутренний кратный резонанс ($\sigma_\omega = 0$) при $\gamma = 0$.

Как видно из рисунка, наблюдается существенное отличие в характере АЧХ по сравнению с «классическим» случаем главного параметрического резонанса по рассматриваемой изгибной форме. Во-первых, наблюдается интенсивное модальное взаимодействие с возбуждением значительных по величине продольных колебаний (с амплитудой порядка толщины стержня). Во-вторых, резонансная кривая поперечных колебаний ответвляется от тривиального нулевого решения посредством неустойчивых ветвей, далее образующих широкую устойчивую ветвь с пологой амплитудной характеристикой. В-третьих, бифуркационный анализ показывает существование (в определенном диапазоне значений параметра κ) точек бифуркации Хопфа, соответствующих рождению и развитию предельных циклов (эти точки обозначены на рисунке). Механический смысл этих предельных циклов состоит в появлении режимов продольно-изгибных биений.

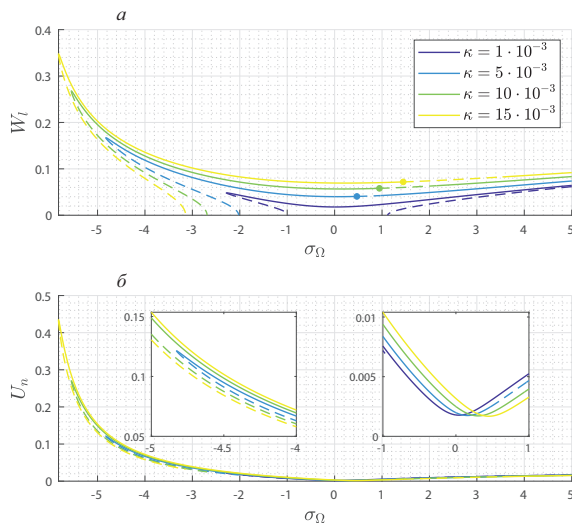


Рис. 2. АЧХ поперечных (а) и продольных (б) колебаний при $\sigma_\omega = 0$.

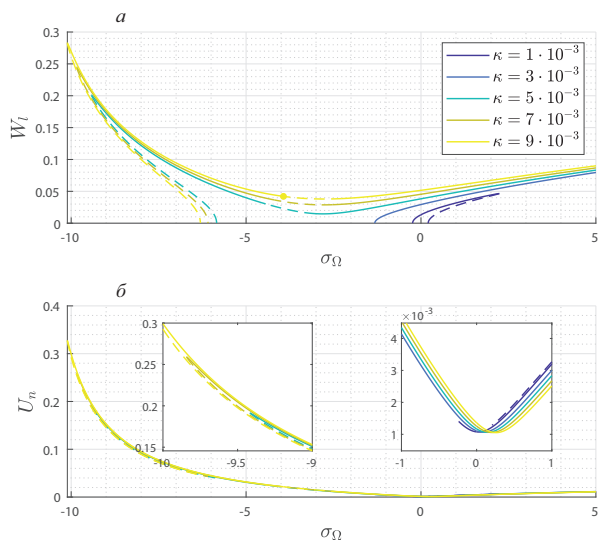


Рис. 3. АЧХ поперечных (а) и продольных (б) колебаний при удалении от зоны внутреннего резонанса при $\sigma_\omega = 5$.

На рис. 3 приведены аналогичные результаты при постепенном удалении от зоны внутреннего кратного резонанса (при увеличении параметра σ_ω).

Из рис. 3 отчетливо виден процесс перехода от классического режима параметрических колебаний с типичной кривой затягивания ($\kappa = 1 \cdot 10^{-3}$) к сложному режиму нелинейного модального взаимодействия между изгибными и продольными колебаниями. В целом рис. 3 и 4 показывают смещение вверх нижней грани-

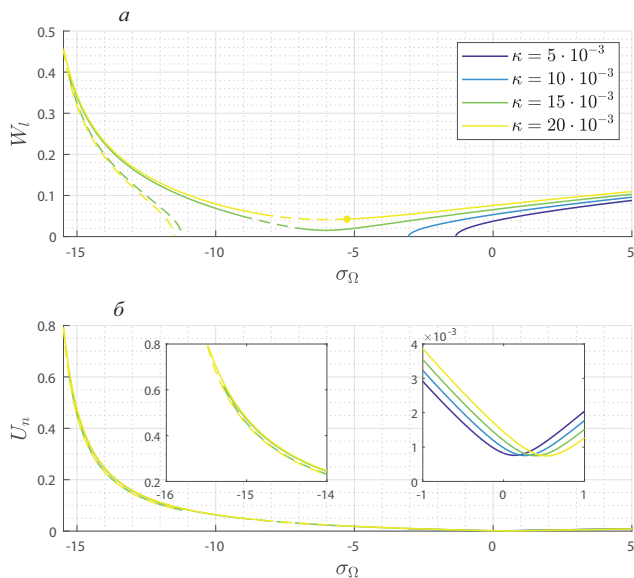


Рис. 4. АЧХ поперечных (а) и продольных (б) колебаний при удалении от зоны внутреннего резонанса при $\sigma_\omega = 10$.

цы значений параметра амплитуды воздействия κ , определяющей зону продольно-изгибных колебаний, при росте параметра σ_ω .

Исследуем теперь влияние фактора сдвига фазы γ внешнего продольного воздействия по отношению к параметрическому поперечному (см. уравнения (62), (63)). Соответствующие результаты для $\sigma_\omega = 0, \kappa = 10^{-2}$ приведены на рис. 5.

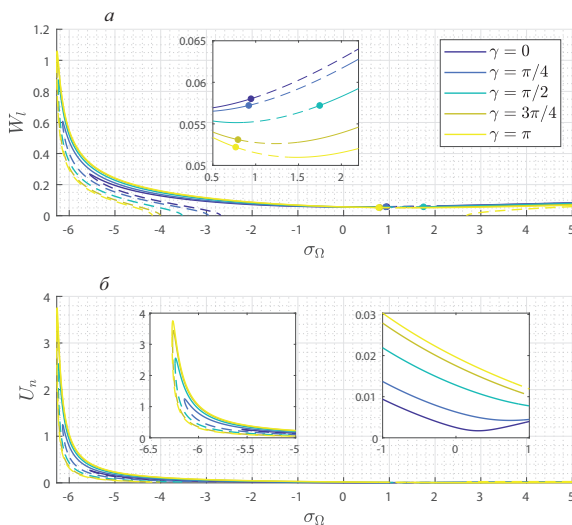


Рис. 5. АЧХ поперечных (а) и продольных (б) колебаний при варьировании γ .

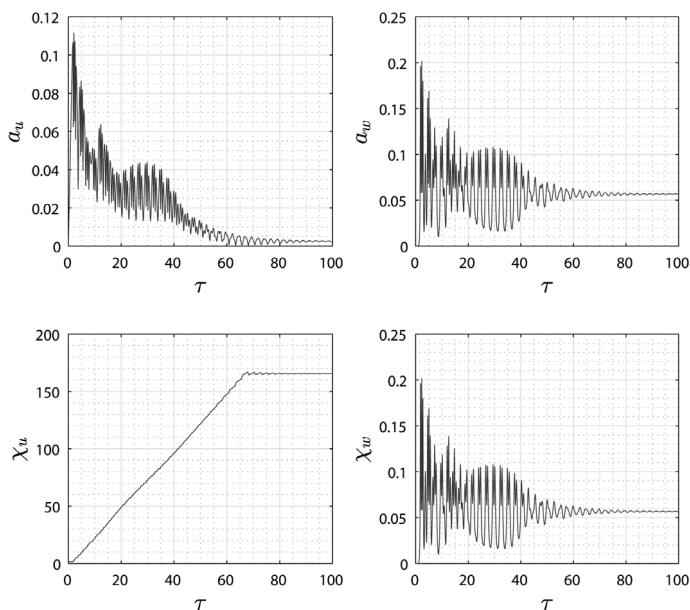


Рис. 6. Эволюция медленных переменных в случае установившихся одночастотных колебаний.

Примечательно, что параметр сдвига фазы воздействий оказывает существенное влияние на динамику системы, в том числе на расположение точек ответвления режимов продольно-изгибных биений. Обращаясь к полной исходной задаче о термооптической генерации колебаний стержня (50), (51), необходимо отметить, что конкретные значения параметров q и γ определяются структурой теплового воздействия (его пространственной и временной конфигурацией) и конструкцией (геометрией и физико-механическими свойствами материала) резонатора.

Подчеркнем, что одним из перспективных направлений использования микромеханических балочных резонаторов, действующих в режиме совместных продольно-изгибных колебаний, являются высокоточные измерения различных физических величин (задачи детектирования массы и положения нано-/микрочастиц, измерение осевой компоненты переносного ускорения — акселерометры и др.). В этой связи особый интерес представляет изучение обнаруженных в системе предельных циклов и соответствующих им режимов продольно-изгибных биений. Биения по своей природе характеризуются наличием стабильной низкочастотной компоненты в измеряемом выходном сигнале, удобной для высокоточного детектирования. Далее мы изучим характер этих биений, в т. ч. зависимость их периода от параметров системы, подверженных слабым вариациям при наличии внешнего воздействия, подлежащего измерению.

Вернемся к рис. 2 и исследуем более подробно характер возможных стационарных режимов колебаний в системе. На рис. 6 показана эволюция и выход на установившийся режим медленных амплитудно-фазовых переменных (см. (60)) для кривой на рис. 2, соответствующей $\kappa = 10^{-2}$ при $\sigma_\Omega = 0$.

В соответствии с АЧХ на рис. 2, для выбранной комбинации параметров мы видим выход на установившийся режим с постоянными амплитудами и относительными фазами поперечных и продольных колебаний.

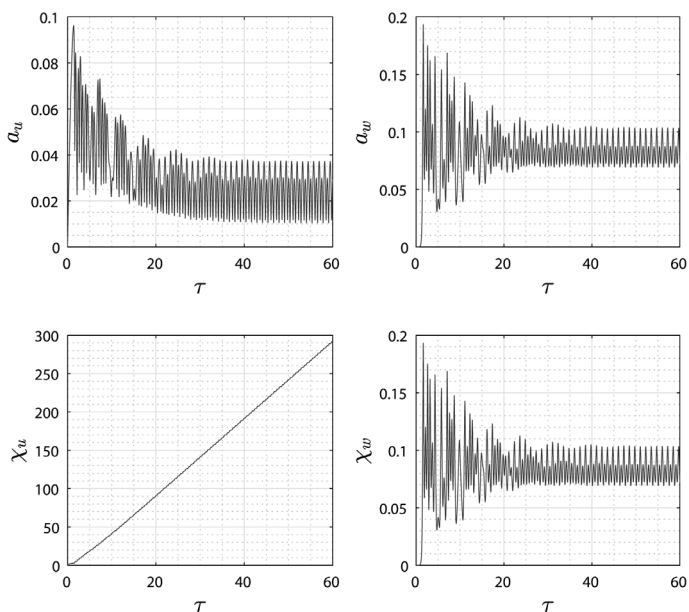


Рис. 7. Эволюция медленных переменных в случае установившихся продольно-изгибных биений.

На рис. 7 представлены аналогичные результаты для $\kappa = 15 \cdot 10^{-3}$ и $\sigma_\Omega = 2$.

В согласии с рис. 2, в рассматриваемом случае мы наблюдаем установившееся периодическое изменение медленных амплитуд a_u, a_w и относительной фазы χ_w , что соответствует биениям с определенной низкочастотной огибающей. Отметим при этом, что рассматриваемый режим не является предельным циклом в строгом смысле теории динамических систем, так как фазовая переменная χ_u является бегущей. Таким образом, представляет интерес прослеживание эволюции предельного цикла, рожденного из стационарного режима с постоянными амплитудами в бифуркации Хопфа, с изменением параметра внешней частотной расстройки σ_Ω .

На рис. 8 показана эволюция формы предельного цикла в подпространстве (a_u, a_w) в окрестности точки своего отщепления от установившегося стационарного режима.

Как видно из рисунка, характер режима биений достаточно быстро усложняется при удалении от точки бифуркации Хопфа; возникает тенденция к многочастотным биениям. Продолжение соответствующих решений с помощью численных методов теории динамических систем представляет определенные затруднения, поэтому на рисунке дан результат расчета для весьма малого диапазона значений σ_Ω .

Как отмечено выше, значительный практический интерес составляет изучение характера зависимости временных параметров рассматриваемого режима биений (частоты соответствующего предельного цикла) от тех параметров системы, которые отражают действие на чувствительный элемент внешних измеряемых факторов. В наших обозначениях указанный смысл имеет параметр внутренней частотной расстройки σ_ω (см. (48)), характеризующий относительное изменение спектрального состава продольно-изгибных колебаний резонатора. Данные изменения при фик-

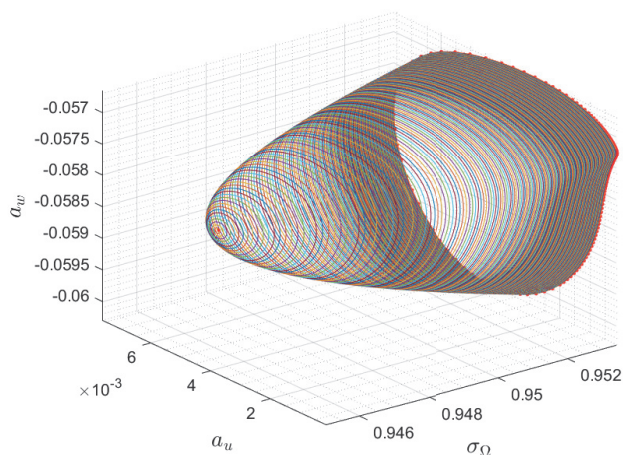


Рис. 8. Эволюция характера режима продольно-изгибных биений при изменении параметра σ_{Ω} .

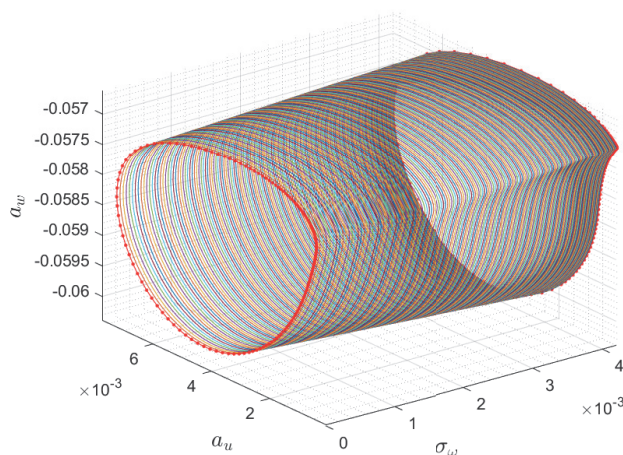


Рис. 9. Эволюция характера режима продольно-изгибных биений при изменении параметра σ_{ω} .

сированной геометрии резонатора могут быть вызваны появлением механической силы в продольном направлении (связанной, в случае проектирования резонансного МЭМС-акселерометра, с действием переносного ускорения подвижного объекта) или, к примеру, перераспределением инерционных характеристик резонатора по причине осаждения на его поверхность нано-/микрочастицы. В связи с этим далее мы исследуем эволюцию найденных предельных циклов при изменении параметра σ_{ω} .

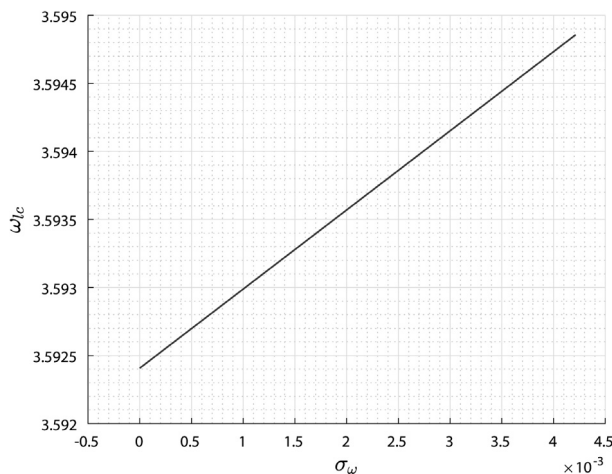


Рис. 10. Зависимость частоты продольно-изгибных биений от параметра σ_ω .

На рис. 9 показано изменение формы предельного цикла в подпространстве (a_u, a_w) при его продолжении по параметру σ_ω ; внешняя частотная расстройка при этом фиксирована: $\sigma_\Omega = 0.9518$.

Наконец, на рис. 10 показана зависимость медленной частоты продольно-изгибных биений ω_{lc} от величины внешнего возмущения, выражаемого в изменении параметра σ_ω . Результаты соответствуют расчетному случаю, приведенному на рис. 9.

Как видно из рисунка, наблюдается линейная и существенная зависимость частоты возбужденных биений от величины внешнего измеряемого воздействия. Данный результат дает принципиальное обоснование возможности использования сложных режимов продольно-изгибных резонансных колебаний микробалочного резонатора в целях высокоточных измерений различных физических величин (переносного ускорения в осевом направлении резонатора, массы и положения микрочастиц, давления, скорости потока жидкости и др.).

Литература/References

1. Vorobyev R. I., Sergeichev I. V., Karabutov A. A., Mironova E. A., Savateeva E. V., Akhatov I. Sh. Application of the Optoacoustic Method to Assess the Effect of Voids on the Crack Resistance of Structural Carbon Plastics. *Acoust. Phys.* **66**, 132–136 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1063771020020153>
2. Yan G., Raetz S., Chigarev N., Blondeau Ja., Gusev V. E., Tournat V. Cumulative fatigue damage in thin aluminum films evaluated non-destructively with lasers via zero-group-velocity Lamb modes. *NDT & E International* **116**, 102323 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2020.102323>
3. Pan Y. Acoustic waves generated by a laser line pulse in a transversely isotropic cylinder. *Appl. Phys. Lett.* **82**, 4379 (2003). <https://doi.org/10.1063/1.1583135>
4. Chow G., Uchaker E., Cao G., Wang Ju. Laser-induced surface acoustic waves: An alternative method to nanoindentation for the mechanical characterization of porous nanostructured thin film electrode media. *Mechanics of Materials* **91**, 333–342 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2015.10.005>
5. Champion A., Bellouard Y. Direct volume variation measurements in fused silica specimens exposed to femtosecond laser. *Optical Materials Express* **2** (6), 789–798 (2012). <https://doi.org/10.1364/OME.2.000789>

6. Otsuka P.H., Mezil S., Matsuda O., Tomoda M., Maznev A.A., Gan T., Fang N., Boechler N., Gusev V.E., Wright O.B. Time-domain imaging of gigahertz surface waves on an acoustic metamaterial. *New J. Phys.* **20**, 013026 (2018).
7. Li Ch., Guan G., Zhang F., Nabi Gh., Wang R.K., Huang Zh. Laser induced surface acoustic wave combined with phase sensitive optical coherence tomography for superficial tissue characterization: a solution for practical application. *Biomed. Opt. Express.* **5** (5), 1403–1419 (2014). <https://doi.org/10.1364/BOE.5.001403>
8. Phinney L.M., Klody K.A., Sackos J.T., Walraven J.A. Damage of MEMS thermal actuators heated by laser irradiation. *Proceedings of Reliability, Packaging, Testing, and Characterization of MEMS/MOEMS IV* **5716**, 81–88 (2005). <https://doi.org/10.1117/12.594408>
9. Serrano J.R., Phinney L.M. Displacement and Thermal Performance of Laser-Heated Asymmetric MEMS Actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems* **17** (1), 166–174 (2008). <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2007.911945>
10. Mai A., Bunce Ch., Hübner R., Pahner D., Dauderstädt U.A. In situ bow change of Al-alloy MEMS micromirrors during 248-nm laser irradiation. *J. of Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS* **15** (3), 035502 (2016). <https://doi.org/10.1117/1.JMM.15.3.035502>
11. Zook J.D., Burns D.W., Herb W.R., Guckel H., Kang J.-W., Ahn Y. Optically excited self-resonant microbeams. *Sensors and Actuators A: Physical* **52** (1–3), 92–98 (1996). [https://doi.org/10.1016/0924-4247\(96\)80131-2](https://doi.org/10.1016/0924-4247(96)80131-2)
12. Yang T., Bellouard Y. Laser-Induced Transition between Nonlinear and Linear Resonant Behaviors of a Micromechanical Oscillator. *Phys. Rev. Applied* **7**, 064002 (2017). <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.7.064002>
13. Dolleman R. J., Hourri S., Chandrashekar A., Alijani F., Zant H.S.J. van der, Steeneken P.G. Opto-thermally excited multimode parametric resonance in graphene membranes. *Scientific Reports* **8**, 9366 (2018). <https://doi.org/10.1038/s41598-018-27561-4>
14. Zehnder A.T., Rand R.H., Krylov S. Locking of electrostatically coupled thermo-optically driven MEMS limit cycle oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **102**, 92–100 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.03.009>
15. Morozov N.F., Tovstik P.E. Dynamic loss of stability of a rod under longitudinal load lower than the Eulerian load. *Dokl. Phys.* **58**, 510–513 (2013). <https://doi.org/10.1134/S102833581311013X>
16. Carvalho E. Ch., Gonçalves P. B., Rega G. Multiple internal resonances and nonplanar dynamics of a cruciform beam with low torsional stiffness. *International Journal of Solids and Structures* **121**, 117–134 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.05.020>
17. Ribeiro E.A.R., Lenci S., Mazzilli C.E.N. Modal localization in a beam modelled as a continuous system: A discussion on the use of auxiliary oscillators. *Journal of Sound and Vibration* **485**, 115595 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115595>
18. Lenci S. Isochronous Beams by an Inclined Roller Support. *J. Appl. Mech.* **85** (9), 091008 (2018). <https://doi.org/10.1115/1.4040453>
19. Lacarbonara W., Rega G., Nayfeh A.H. Resonant non-linear normal modes. Part I: analytical treatment for structural one-dimensional systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **38** (6), 851–872 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(02\)00033-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(02)00033-1)
20. Manevitch L. New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains. *Arch. Appl. Mech.* **77**, 301–312 (2007). <https://doi.org/10.1007/s00419-006-0081-1>
21. Clementi F., Lenci S., Rega G. 1:1 internal resonance in a two d.o.f. complete system: a comprehensive analysis and its possible exploitation for design. *Meccanica* **55**, 1309–1332 (2020). <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01171-9>
22. Leamy M.J., Gottlieb O. Internal resonances in whirling strings involving longitudinal dynamics and material non-linearities. *Journal of Sound and Vibration* **236** (4), 683–703 (2000). <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3039>
23. Srinil N., Rega G. Nonlinear longitudinal/transversal modal interactions in highly extensible suspended cables. *Journal of Sound and Vibration* **310** (1–2), 230–242 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.07.056>
24. Yang X.D., Zhang W. Nonlinear dynamics of axially moving beam with coupled longitudinal-transversal vibrations. *Nonlinear Dyn.* **78**, 2547–2556 (2014). <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1609-5>
25. Saetta E., Settini V., Rega G. Minimal thermal modeling of two-way thermomechanically coupled plates for nonlinear dynamics investigation. *Journal of Thermal Stresses* **43** (3), 345–371 (2020). <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1704669>
26. Indeitsev D.A., Osipova E.V. A two-temperature model of optical excitation of acoustic waves in conductors. *Dokl. Phys.* **62**, 136–140 (2017). <https://doi.org/10.1134/S1028335817030065>

27. Sun Yu., Liu Sh., Rao Zh., Li Yu., Yang J. Thermodynamic Response of Beams on Winkler Foundation Irradiated by Moving Laser Pulses. *Symmetry* **10** (8), 328 (2018). <https://doi.org/10.3390/sym10080328>
28. Wen Ch., Tang L., Yang G. Buckling and post-buckling of pinned Euler beams on weakened Winkler foundation under thermal loading. *Journal of Thermal Stresses* **43** (5), 529–542 (2020). <https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1734128>
29. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Privalova O. V., Shtukin L. V. Stability of the Bernoulli—Euler Beam in Coupled Electric and Thermal Fields. *Dokl. Phys.* **63**, 342–347 (2018). <https://doi.org/10.1134/S1028335818080086>
30. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Privalova O. V., Semenov B. N., Shtukin L. V. Bernoulli—Euler Beam Under Action of a Moving Thermal Source: Characteristics of the Dynamic Behavior. *Dokl. Phys.* **64**, 185–188 (2019). <https://doi.org/10.1134/S1028335819040050>
31. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Privalova O. V., Shtukin L. V. Stability of the Bernoulli—Euler Beam under the Action of a Moving Thermal Source. *Dokl. Phys.* **65**, 67–71 (2020). <https://doi.org/10.1134/S102833582002007X>
32. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. Nonlinear interaction of longitudinal and transverse vibrations of a rod at an internal combinational resonance in view of optothermal excitation of N/MEMS. *Journal of Sound and Vibration* **509**, 116247 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116247>
33. Nayfeh A. H., Moo D. T. *Nonlinear Oscillations*. Wiley (1995).

Статья поступила в редакцию 18 октября 2021 г.;
доработана 26 ноября 2021 г.;
рекомендована к печати 2 декабря 2021 г.

Контактная информация:

Морозов Никита Федорович — д-р физ.-мат. наук, академик РАН; morozov@NM1016.spb.edu
Индеев Дмитрий Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, член-корр. РАН;
 indeitsev_da@spbstu.ru
Лукин Алексей Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, ассистент; lukin_av@spbstu.ru
Попов Иван Алексеевич — ассистент; popov_ia@spbstu.ru
Штукин Лев Васильевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; shtukin_lv@spbstu.ru

Nonlinear modal interaction between longitudinal and bending vibrations of a beam resonator under periodic thermal loading*

N. F. Morozov^{1,2}, D. A. Indeitsev^{2,3}, A. V. Lukin³, I. A. Popov³, L. V. Shtukin^{2,3}

¹ St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

² Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61, V. O., Bolshoi pr., St Petersburg, 199178, Russian Federation

³ Peter the Great St Petersburg Polytechnic University, 29, ul. Polytechnicheskaya, St Petersburg, 195251, Russian Federation

For citation: Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. Nonlinear modal interaction between longitudinal and bending vibrations of a beam resonator under periodic thermal loading. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 317–337. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.212> (In Russian)

The paper investigates the nonlinear modal interaction of longitudinal and bending vibrations of a beam resonator under periodic thermal loading. The mode of parametric oscillations is investigated under conditions of internal multiple resonance between some

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00537).

flexural and longitudinal forms of free oscillations of the resonator. The possibility of generation in the system of the longitudinal-bending mode was found, the frequency of the slow envelope of which essentially depends on the parameter of the internal frequency detuning, which is directly related to the magnitude of external disturbances subject to high-precision measurement.

Keywords: nonlinear dynamics, parametric oscillations, Bernoulli — Euler beam, modal interaction, beats.

Received: October 18, 2021

Revised: November 26, 2021

Accepted: December 2, 2021

Authors' information:

Nikita F. Morozov — morozov@NM1016.spb.edu

Dmitriy A. Indeitsev — indejtsev_da@spbstu.ru

Alexei V. Lukin — lukin_av@spbstu.ru

Ivan A. Popov — popov_ia@spbstu.ru

Lev V. Shtukin — shtukin_lv@spbstu.ru