УДК 532.517.4 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2
MSC 76F02

Степенное обобщение формулы Ньютона для касательного напряжения в жидкости в форме тензорного реологического соотношения*

В. А. Павловский

Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,
Российская Федерация, 190121, Санкт-Петербург, Лоцманская ул., 3

Для цитирования: *Павловский В. А.* Степенное обобщение формулы Ньютона для касательного напряжения в жидкости в форме тензорного реологического соотношения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 338–345. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.213

Выполнено обобщение формулы Ньютона для касательного напряжения в жидкости за счет придания ей степенного вида и записи соответствующего реологического соотношения в тензорном виде. В зависимости от показателя степени в этом реологическом соотношении можно прийти к описанию или ламинарного, или турбулентного режима течения. В последнем случае имеет место система дифференциальных уравнений с граничным условием прилипания. Предлагаемая система уравнений турбулентного движения жидкости может быть полезна для получения предварительных, оценочных характеристик турбулентного течения перед началом численного моделирования с использованием современных дифференциальных моделей турбулентности. Эта система при некоторых значениях показателя степени может быть использована для описания поведения степенных жидкостей, а также жидкостей с малыми добавками полимеров при проявлении эффекта Томса.

Ключевые слова: степенные формулы, обобщение формулы Ньютона, формула Блазиуса, тензор напряжений, дифференциальные уравнения турбулентного течения, аналитические решения.

1. Введение. Поиск все более совершенных методов расчета осредненных характеристик турбулентных течений является актуальным до сих пор. В настоящее время в гидродинамике накоплен огромный экспериментальный материал, позволяющий оценить качество тех или иных получаемых формул для коэффициентов сопротивления и профилей скорости [1–3]. Но в отличие от ламинарного для турбулентного режима течения точных аналитических решений не существует. Формулы и соотношения имеют или эмпирический, или полуэмпирический характер, опирающийся на понятие турбулентной вязкости. С помощью этого понятия Л. Прандтль разработал теорию длины перемешивания — первую феноменологическую теорию турбулентности, которая была апробирована на расчетах турбулентного течения в трубах. Эта теория позволила получить методы решения многих прикладных задач, важных для инженерных приложений. В дальнейшем полуэмпирические теории турбулентности на основе понятия турбулентной вязкости интенсивно развивались и в настоящее время они приобрели вид дифференциальных моделей турбулентности

*Настоящее исследование выполнено в рамках государственного задания на выполнение научно-исследовательских работ № 075-03-2020-094/1 от 10.06.2020.

типа $k - \epsilon$, $k - \omega$ и других. В качестве эмпирического соотношения, используемого в современной теории турбулентности, выступает универсальный профиль скорости, пригодный для описания пристенных течений жидкости. Он состоит из нескольких участков, для каждого из которых дается своя формула его описания. Центральным является логарифмический участок, формулу для которого дает теория Прандтля. Эта формула не может быть распространена на зону течения вблизи стенки, где имеет место условие прилипания. Поэтому Прандтль, а затем и Т. Карман обратили внимание на возможность описания профиля скорости с помощью степенной формулы — зависимости скорости от расстояния до стенки в степени 1/7 [3]. Названное ими «законом одной седьмой», это описание обеспечивает выполнение условия прилипания и приводит к степенной зависимости сопротивления от числа Рейнольдса в виде формулы Блазиуса. Недостатком этого закона является то, что он не дает нулевого значения производной скорости на оси трубы. В целом степенная формула для распределения осредненных скоростей в трубе не хуже логарифмической, сравнение этих формул до настоящего времени является предметом обсуждения [4, 5]. Формулы в виде степенных зависимостей до настоящего времени широко используются в различных разделах гидродинамики, как при исследовании турбулентных течений, так и при записи реологических соотношений для неньютоновских жидкостей.

Формула Блазиуса для коэффициента сопротивления при течении жидкости с кинематической вязкостью v в прямой круговой трубе радиусом R имеет вид

$$\lambda = 0.3164/\mathrm{Re}^{0.25}, \tag{1}$$

где $\mathrm{Re} = \frac{2RU_{\text{ср}}}{v}$ — число Рейнольдса, вычисляемое по средней скорости $U_{\text{ср}}$. Эта формула дает хорошее согласование с экспериментальными данными для диапазона чисел Рейнольдса $10^4 < \mathrm{Re} < 10^6$, но она, в отличие от формулы Пуазейля для ламинарного режима течения, является эмпирической, она не является результатом аналитического решения задачи о течении жидкости в трубе. Полуэмпирический характер всех современных моделей турбулентности не позволяет трактовать задачи турбулентных течений как краевые задачи математической физики и применять аналитические подходы к решению такого рода задач. Для турбулентного течения не существует точных аналитических решений задач простых сдвиговых течений несжимаемой жидкости — течений, когда имеется лишь одна, продольная, компонента скорости, зависящая от одной, поперечной, координаты. Это связано с тем, что в отличие от ламинарного режима течения, описываемого уравнениями Навье — Стокса, для турбулентного режима течения пока нет дифференциальных уравнений, позволяющих рассматривать задачи расчета турбулентных течений как задачи математической физики. Поэтому разработка новых, даже приближенных, подходов к описанию осредненных характеристик турбулентных течений с целью сведения задач расчета таких течений к задачам математической физики в настоящее время является актуальной. В русле поисков таких подходов и находится данная работа.

В работе выполнено степенное обобщение формулы Ньютона для касательного напряжения в жидкости, которое в зависимости от значения показателя степени может описывать поведение различных жидкостей, в том числе и их режимы течения — как ламинарный, так и турбулентный. Это обобщение для задачи о течении в трубе приводит к формуле Блазиуса. Далее в работе записано тензорное реологическое соотношение и получена соответствующая система дифференциальных уравнений, позволяющая решать для разных значений показателя степени краевые задачи механики жидкости, в том числе и задачи турбулентных течений.

2. Степенное обобщение формулы Ньютона. Формулу Ньютона [3, 6] для касательного напряжения при обтекании плоской поверхности $\tau = \rho v \frac{du}{dy}$, где ρ — плотность, u — продольная скорость, y — поперечная координата, можно обобщить в следующем виде:

$$\tau = \rho \chi_n \left(v \frac{du^{(2n-1)}}{dy} \right)^{1/n}. \tag{2}$$

В этом выражении n — показатель степени, который может принимать значения $n \geqslant 1$, χ_n — безразмерный коэффициент, зависящий от этого показателя степени. Тем самым модель является двухпараметрической. Формулу (2) также можно представить в удобном для дальнейшего обобщения тензорном виде:

$$\tau = \rho \chi_n (2n-1)^{1/n} \left(u^2\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(v \frac{du}{dy} \right)^{1/n}. \tag{3}$$

При $n = 1$ и $\chi_n = 1$ эта формула приводит к реологическому соотношению Ньютона, а при $n = 4$ и $\chi_n = 0.019746$ она дает реологическое соотношение для турбулентного течения жидкости.

3. Течения в трубе при произвольном значении показателя степени. В случае установившегося течения в круговой цилиндрической трубе радиуса R величиной y будет координата, отсчитываемая от стенки ($0 \leqslant y \leqslant R$). Введем в рассмотрение безразмерные переменные — безразмерную координату и безразмерную скорость:

$$\eta = \frac{y}{R}, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad V = \frac{u}{V_*}, \tag{4}$$

где V_* — динамическая скорость, выражаемая через касательное напряжение на стенке.

Тогда, учитывая обозначения (4), формулу (2) для течения в трубе можно представить в виде

$$\tau = \rho \chi V_*^2 \left(\frac{1}{\mathrm{Re}_*} \cdot \frac{dV^{(2n-1)}}{d\eta} \right)^{1/n}, \tag{5}$$

где Re_* — число Рейнольдса, вычисленное по динамической скорости, $\mathrm{Re}_* = \frac{V_* R}{v}$. С другой стороны, модуль касательного напряжения в трубе можно представить как

$$\tau = \rho V_*^2 (1 - \eta). \tag{6}$$

Сравнение выражений (5) и (6) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dV^{(2n-1)}}{d\eta} = \frac{\mathrm{Re}_*}{\chi_n^n} (1-\eta)^n. \tag{7}$$

Интегрирование этого уравнения с граничным условием прилипания дает следующий безразмерный профиль скорости:

$$V = \left(\frac{\mathrm{Re}_*}{(n+1)\,\chi_n^n} \right)^{1/(2n-1)} \left[1 - (1-\eta)^{(n+1)} \right]^{1/(2n-1)}. \tag{8}$$

В этом случае формула для средней безразмерной скорости по сечению трубы $V_{\text{ср}} = 2\int_0^1 V(\eta)(1-\eta)\,d\eta$ приводит к соотношению

$$V_{\text{ср}} = 2\left(\frac{\text{Re}_*}{n+1\chi_n^n}\right)^{1/(2n-1)} Y(n)\,, \tag{9}$$

где величина $Y(n)$ для течения в трубе выражается через гипергеометрические функции:

$$Y(n) = \int_0^1 \left[1-(1-\eta)^{(n+1)}\right]^{1/(2n-1)} (1-\eta)\,d\eta. \tag{10}$$

Так при $n = 1$ получаем $Y(1) = 0.25$, для $n = 4$ — $Y(4) = 0.467138$, для $n = 20$ — $Y(20) = 0.498156$ и т. д. Истинное число Рейнольдса $\text{Re} = \frac{2RU_{\text{ср}}}{v}$ можно вычислить через число Рейнольдса по динамической скорости Re_* по формуле $\text{Re} = 2\text{Re}_* V_{\text{ср}}$. Тогда, учитывая выражение (9), получаем связь между этими числами Рейнольдса в виде

$$\text{Re} = 4Y(n)\left(\frac{1}{(n+1)\chi_n^n}\right)^{1/(2n-1)} \text{Re}_*^{2n/(2n-1)}. \tag{11}$$

Коэффициент сопротивления $\lambda = 8\,|\tau_w|/\rho u^2$, который можно представить как $\lambda = 8/V^2$, для произвольного значения показателя степени n с учетом (9) принимает вид

$$\lambda = 2^{\frac{n+2}{n}} \cdot \frac{(n+1)^{1/n}}{Y(n)^{\frac{2n-1}{n}}} \cdot \frac{\chi_n}{\text{Re}^{\frac{1}{n}}}. \tag{12}$$

4. Частные случаи значений показателя степени. В частных случаях $n = 1$ и $n = 4$ полученные формулы приводят к выражениям для ламинарного и турбулентного режимов течения соответственно. При $n = 4$ и $\chi_n = 0.019746$ реологическое соотношение (2) имеет вид

$$\tau = \rho\chi_n\left(v\frac{du^7}{dy}\right)^{1/4}. \tag{13}$$

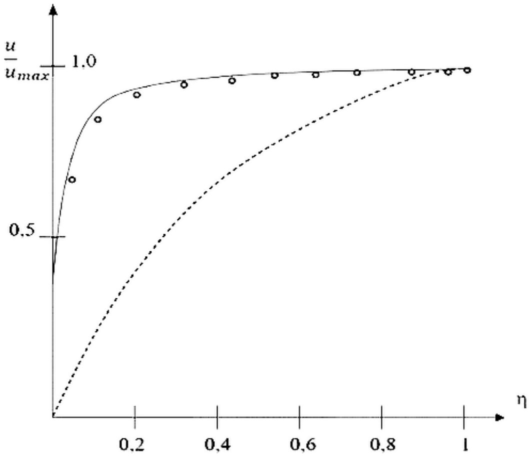
Тогда безразмерный профиль скорости согласно (8) можно записать как

$$V = \left(\frac{\text{Re}_*}{5{\chi_n}^4}\right)^{1/7}\left[1-(1-\eta)^5\right]^{1/7}. \tag{14}$$

В размерном виде профилю скоростей (14) соответствует выражение

$$u = 0.93677 \cdot \frac{1}{v^{1/7}}\left(\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\triangle\rho}{l}\right)^{4/7}\left(R^5 - r^5\right)^{1/7}. \tag{15}$$

Профиль скорости здесь близок по форме к турбулентному распределению скорости, описываемому известным «законом одной седьмой» [3], но в отличие от него имеет производную скорости на оси трубы, равную нулю. Коэффициент сопротивления согласно (12) при $n = 4$ будет выражаться формулой Блазиуса (1). При этом, как и для всех степенных реологических соотношений, производная скорости на стенке является бесконечно большой величиной: $\frac{du}{dy}|_{y=0} = \infty$, но при этом величина $\frac{du^7}{dy}|_{y=0}$



Безразмерный профиль скорости турбулентного течения на фоне ламинарного профиля Пуазейля (показанного пунктиром).

будет конечной, обеспечивая нулевое значение скорости u на стенке. Безразмерный профиль скорости в трубе, согласно выражению (14), определяется формулой

$$\frac{u}{u_{\max}} = \frac{V}{V_{\max}} = \left[1 - (1-\eta)^5\right]^{1/7}, \tag{16}$$

показан на рисунке, точками помечены экспериментальные данные для числа Рейнольдса, равного $3.24 * 10^6$ [2, 3].

Зависимости от числа Рейнольдса для этого профиля здесь нет, так же, как и для профиля при ламинарном режиме течения. Это связано с тем, что блазиусовские законы для коэффициента сопротивления и соответствующего профиля скорости пригодны для ограниченного диапазона чисел Рейнольдса: $10^4 < \mathrm{Re} < 10^6$. При необходимости описания течения за пределами этого диапазона можно использовать, например, значение $n = 6$ при $\chi_n = 0.00910904$. Тем самым, в принципе, можно получить кривую сопротивления Прандтля — Никурадзе как огибающую семейств кривых сопротивления для разных значений параметров n и χ_n, состоящую, для простоты, из набора кусочно-гладких функций. Для гладкого сопряжения решений следует накладывать дополнительные условия для их «склейки».

5. Обобщение степенного реологического соотношения на трехмерный случай течения. Формулу (3) для произвольного значения показателя n можно обобщить на трехмерный случай течения и записать соответствующее реологическое соотношение в тензорном виде. При этом производной скорости du/dy следует [7] сопоставить градиент вектора скорости $\mathbf{V}$ в виде $\nabla\mathbf{V}$, где ∇ — вектор Гамильтона (набла). Для декартовой прямоугольной системы координат симметричную часть этого тензора 2-го ранга можно представить в виде разложения по тензорному базису $\mathbf{e_i} \bigotimes \mathbf{e_j}$, где $\bigotimes$ — знак тензорного произведения базисных векторов (16):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\mathbf{e_i} \bigotimes \mathbf{e_j}. \tag{17}$$

Тогда тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$, обобщающий формулу (3), следует записать в виде

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mathrm{B}\left(\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{\sqrt{Y_2}}\right)^{(n-1)/n}\mathbf{S}, \tag{18}$$

где величина Y_2 — второй инвариант тензора скоростей деформаций $\mathbf{S}$,

$$Y_2 = 0.5\ S_{ij}S_{ji}, \tag{19}$$

и введено обозначение

$$B = \rho\chi_n(2n-1)^{1/n}v^{1/n}. \tag{20}$$

Для каждого показателя степени n безразмерная величина χ_n определяется из опыта.

Уравнение движения жидкости в напряжениях (при пренебрежении массовыми силами) будет содержать дивергенцию тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}$:

$$\rho\frac{dV}{dt} = -\nabla p + \nabla\cdot\boldsymbol{\tau}. \tag{21}$$

Здесь точка — символ скалярного произведения, $\frac{d}{dt}$ — оператор материальной производной, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)$, p — давление.

Уравнение движения (21) в скалярном виде записывается следующим образом:

$$\rho\frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + B\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\frac{V_j\ V_j}{\sqrt{Y_2}}\right)^{(n-1)/n}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right)\right]. \tag{22}$$

При $n = 1$, когда $\chi_n = 1$, имеем обычное уравнение Навье—Стокса, на основе которого описывается ламинарный режим течения. Частным случаем уравнения (22) при $n = 4$ и $\chi_n = 0.019746$ будет дифференциальное уравнение, описывающее произвольные турбулентные течения для диапазона чисел Рейнольдса, который соответствует «блазиусовскому» диапазону $10^4 < \mathrm{Re} < 10^6$ в случае течения в трубе:

$$\rho\frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho\chi_n(7v)^{1/4}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\frac{V_j\ V_j}{\sqrt{Y_2}}\right)^{3/4}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right)\right]. \tag{23}$$

Для замыкания системы в случае течения несжимаемой жидкости необходимо записать также уравнение неразрывности $\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$. Граничным условием для этой системы уравнений будет условие прилипания.

6. Заключение. Задачи о турбулентных течениях жидкости, в том числе и при обтекании тел произвольной геометрии, можно решать на основе полученной системы уравнений (23). Результаты расчетов будут справедливы и будут иметь согласование с экспериментальными данными для сравнительно узкого, «блазиусовского» диапазона чисел Рейнольдса: $10^4 < \mathrm{Re} < 10^6$ для течения в трубе, $10^5 < \mathrm{Re} < 10^8$ при обтекании плоской пластины. В зависимости от показателя степени n и соответствующего значения коэффициента χ_n в уравнении (22) можно прийти или к описанию ламинарного режима течения, или к описанию течения в турбулентном режиме. Однако здесь следует заметить, что, как и все другие степенные реологические соотношения, предложенное обобщение формулы Ньютона не обладает инвариантностью по отношению к преобразованию Галилея. Поэтому круг возможных «турбулентных» приложений этого обобщения ограничен случаями обтекания неподвижных стенок. В последнем случае имеет место система дифференциальных уравнений, существенно отличающаяся от таковой для ламинарного режима, но позволяющая находить аналитические решения для простых сдвиговых течений. Этим рассматриваемый подход к решению задач турбулентных течений выгодно отличается от современных дифференциальных моделей турбулентности [7]. Но согласование получаемых решений в части профилей скорости и коэффициентов сопротивления для него несколько хуже, нежели при использовании дифференциальных моделей турбулентности, которые приводят к более точным результатам за счет большого количества эмпирических констант, зачастую подобранных под решение конкретной задачи. Поэтому предлагаемая система уравнений турбулентного движения жидкости (23) может быть полезна, по крайней мере, для получения предварительных, оценочных, характеристик турбулентного течения перед началом численного моделирования с использованием дифференциальных моделей турбулентности, которые к тому же кроме осредненных характеристик течения позволяют вычислять и пульсационные.

Предлагаемая система уравнений (22) при некоторых значениях показателя степени n также может быть использована для описания поведения степенных жидкостей, а также жидкостей с малыми добавками полимеров при проявлении эффекта Томса [1].

Литература

1. Артюшков Л. С. *Динамика неньютоновских жидкостей.* Санкт-Петербург, Изд. центр СПбГМТУ (1997).

2. Эртель Г. (мл.) *Путеводитель Прандтля по гидроаэродинамике.* Москва, Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика (2007).

3. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа.* Москва, Наука (1987).

4. Баренблатт Г. И., Корин А. Дж., Простокишин В. М. Турбулентные течения при очень больших числах Рейнольдса: уроки новых исследований. *УФН* **184**, 265–272 (2014).

5. Вигдорович И. И. Описывает ли степенная формула турбулентных профилей скорости в трубе? *УФН* **185**, 213–216 (2015).

6. Джайчибеков Н. Ж., Матвеев С. К., Сидоров Д. Г. Расчет стратифицированного двухфазного течения в трубе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4 (62)**, вып. 1, 131–135 (2017). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.115

7. Павловский В. А., Никущенко Д. В. *Вычислительная гидродинамика. Теоретические основы.* Санкт-Петербург, Лань (2018).

Статья поступила в редакцию 3 марта 2021 г.;
доработана 18 ноября 2021 г.;
рекомендована к печати 2 декабря 2021 г.

Контактная информация:

Павловский Валерий Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.a.pavlovsky@gmail.com

Power-law generalization of Newton's formula for shear stress in a liquid in the form of a tensor rheological relation*

V. A. Pavlovsky

St Petersburg State Marine Technical University,
3, Lotsmanskaya ul., St Petersburg, 190121, Russian Federation

For citation: Pavlovsky V. A. Power-law generalization of Newton's formula for shear stress in a liquid in the form of a tensor rheological relation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 338–345.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.213 (In Russian)

A generalization of Newton's formula for the shear stress in a fluid is carried out by giving it a power-law form and the corresponding rheological relation is written in tensor form. Depending on the exponent in this rheological ratio, one can come to a description of either a laminar or turbulent flow regime. In the latter case, there is a system of differential equations with the no-slip boundary condition. The proposed system of equations for turbulent fluid motion can be useful, at least, for obtaining preliminary, estimated characteristics of turbulent flow before starting numerical modeling using modern differential turbulence models. For some values of the exponent, this system can be used to describe the behavior of power-law fluids, as well as fluids with small additives of polymers in the manifestation of the Toms effect.

Keywords: power formulas, generalization of Newton's formula, Blasius formula, stress tensor, differential equations of turbulent flow, analytical solutions.

References

1. Artyushkov L. S. *Dynamics of non-Newtonian fluids*. St Petersburg, SMTU Publ. Center (1997). (In Russian)

2. Ertel G. Jr. *Prandl's guide to hydroaerodynamics*. Moscow, Izhevsk, Regular and chaotic dynamics Publ. (2007). (In Russian)

3. Loytsyansky L. G. *Mechanics of liquid and gas*. Moscow, Nauka Publ. (1987).

4. Barenblatt G. I., Korin A. J., Prostokishin V. M. Turbulent flows at very large Reynolds numbers: lessons from new research. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **184**, 265–272 (2014). (In Russian) [Eng. transl.: *Phys. Usp.* **57** (3), 250–256 (2014)].

5. Vigdorovich I. I. Does the power-law describe turbulent velocity profiles in a pipe? *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **185**, 213–216 (2015). (In Russian) [Eng. transl.: *Phys. Usp.* **58** (2), 196–198 (2015)].

6. Dzhaichibekov N. Zh., Matveev S. K., Sidorov D. G. Calculation of a stratified two-phase flow in a pipe. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4 (62)**, iss. 1, 131–135 (2017). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.115 (In Russian)

7. Pavlovsky V. A., Nikushchenko D. V. *Computational Fluid Dynamics. Theoretical basis*. St Petersburg, Lan' Publ. (2018). (In Russian)

Received: March 3, 2021
Revised: November 15, 2021
Accepted: December 2, 2021

Author's information:

Valerii A. Pavlovsky — v.a.pavlovsky@gmail.com

*This study was carried out within the framework of the state task for the implementation of research works no. 075-03-2020-094/1 of 10.06.2020.