

О решениях уравнения малых поперечных колебаний движущегося полотна

А. М. Романенков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Для цитирования: Романенков А. М. О решениях уравнения малых поперечных колебаний движущегося полотна // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 346–356.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.214>

В работе рассматривается модельная задача одномерных малых поперечных колебаний полотна, движущегося с постоянной скоростью, которое закреплено шарнирным образом. Колебательный процесс описывается линейным дифференциальным уравнением 4-го порядка с постоянными коэффициентами. В рассматриваемой модели происходит учет силы Кориолиса, что приводит к появлению в дифференциальном уравнении слагаемого со смешанной производной. Данный эффект делает невозможным применение классического метода разделения переменных. Однако построены семейства точных решений уравнения колебаний в виде бегущей волны. Для начально-краевой задачи установлено, что решение может быть построено в виде ряда Фурье по системе собственных функций вспомогательной задачи о колебаниях балки. Для рассматриваемого колебательного процесса установлен закон сохранения энергии и доказана единственность решения начально-краевой задачи.

Ключевые слова: уравнение колебаний движущегося полотна, закон сохранения энергии, точные решения.

1. Введение. В работе рассматривается начально-краевая задача для определения поперечных колебаний движущегося полотна. Центральным объектом изучения является уравнение

$$u_{tt} + 2v_0 u_{tx} + (v_0^0 - c^2) u_{xx} + \frac{D}{m} u_{xxxx} = 0, \quad (1)$$

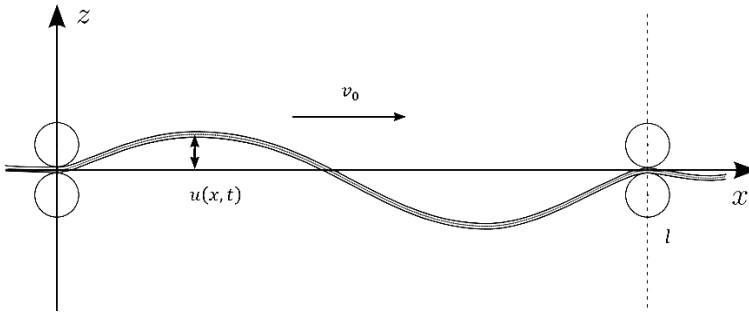
где $u = u(x, t)$ — отклонение движущегося полотна от положения равновесия в точке x в момент времени t , v_0 — постоянная скорость движения полотна, c — скорость распространения колебаний в покоящемся полотне, D — величина жесткости на изгиб, m — удельная масса полотна на единицу площади. В качестве краевых условий рассмотрим шарнирный тип закрепления полотна:

$$u|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = u|_{x=l} = u_{xx}|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

в качестве начальных — условия

$$u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = g(x), \quad (3)$$

На рисунке схематично показано отклонение от положения равновесия движущегося со скоростью v_0 полотна.



Колебания шарнирно закрепленного полотна.

Такие колебания можно наблюдать, например, в технологическом процессе проката бумаги.

В работе [1] для задачи (1)–(3) строятся пробные решения в виде тригонометрических многочленов, состоящие из конечного числа слагаемых, и устанавливаются механические свойства колебаний, которые возникают в движущемся полотне. Работа [2] содержит прием из вариационного исчисления для вывода уравнения колебаний движущейся струны. А именно, выписывается функционал энергии, находится его первая вариация, которая приравнивается к нулю. Полученное выражение для энергии используется для построения метода гашения колебаний в струне. Стоит отметить, что уравнение колебаний движущейся струны отличается от уравнения (1) только отсутствием слагаемого с четвертой производной, поэтому подходы из [2] могут быть перенесены на случай колебаний движущейся панели. Результаты работы [3] согласуются с результатами [2] и дополняют их конкретным видом решения начально-краевой задачи; кроме того, обосновывается единственность ее решения в соответствующем энергетическом пространстве. Важные результаты представлены в работе [4], а именно, рассмотрены вопросы устойчивости, исследованы задачи на собственные значения дифференциальных операторов по пространственным переменным, построены численные алгоритмы и проведен численный анализ колебаний. В [5] исследован вопрос колебаний движущегося полотна при наличии точечной нагрузки.

В [6] содержатся объемный список источников, которые посвящены динамике колебаний, и обширное описание математических моделей колебаний движущихся материалов. В работе [7] использован метод разложения по малому параметру для получения решения уравнения (1) с демпфирующим слагаемым. В ней получено решение в виде ряда Фурье вплоть до 1-го порядка малого параметра. В работе [8] с помощью интегрального преобразования уравнение (1) сводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Для этой системы выполнен поиск приближенного решения и с помощью численного эксперимента показана сходимость приближенных решений. Большое количество работ посвящено качественному исследованию колебаний при различных условиях закрепления и разного рода внешних воздействий на движущееся полотно. В качестве примера можно рассмотреть работы [9, 10].

Пусть $T, l \in \mathbb{R}_+$. Пусть $\Psi(\Omega)$ — пространство функций, определенных на множестве $\Omega = [0; l] \times [0; T]$, удовлетворяющих краевым условиям (2) и имеющих производные до 4-го порядка включительно по переменной x и до 2-го порядка включительно

по переменной t . На этом пространстве функций введем дифференциальный оператор L :

$$L := \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + (v_0^2 - c^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D}{m} \frac{\partial^4}{\partial x^4}. \quad (4)$$

Тогда уравнение (1) можем переписать следующим образом:

$$Lu = 0. \quad (5)$$

Выведем интегральное соотношение, которое будет полезно в дальнейшем. Для этого определим скалярное произведение (v, ω) . Пусть $v, \omega \in \Psi(\Omega)$. Тогда

$$(v, \omega) := \iint_{\Omega} v \cdot \omega dx dt.$$

Лемма 1. Пусть $v, \omega \in \Psi(\Omega)$. Пусть далее оператор L определен формулой (4). Тогда

$$(Lv, \omega) = \int_0^T \int_0^l \left((v_t \omega)_t - v_t \omega_t - 2v_0 v_t \omega_x - (v_0^2 - c^2) v_x \omega_x + \frac{D}{m} v_{xxx} \omega_{xx} \right) dx dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем скалярное произведение (Lv, ω) :

$$\begin{aligned} (Lv, \omega) &= \iint_{\Omega} Lv \cdot \omega dx dt = \int_0^T \int_0^l \left(v_{tt} + 2v_0 v_{tx} + (v_0^2 - c^2) v_{xx} + \frac{D}{m} v_{xxxx} \right) \omega dx dt = \\ &= \int_0^T \int_0^l \left(v_{tt} \omega + 2v_0 v_{tx} \omega + (v_0^2 - c^2) v_{xx} \omega + \frac{D}{m} v_{xxxx} \omega \right) dx dt. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством $(v_t \omega)_t = v_{tt} \omega + v_t \omega_t$ и формулой интегрирования по частям, получаем требуемое в лемме соотношение. \square

Установим закон сохранения энергии, используя лемму 1. Для этого положим $v = u, \omega = u_t$, где u — функция из формулы (5). Тогда получим

$$\begin{aligned} 0 = (Lu, u_t) &= \int_0^T \int_0^l \left((u_t^2)_t - u_t u_{tt} - 2v_0 u_t u_{tx} - (v_0^2 - c^2) u_x u_{tx} + \frac{D}{m} u_{xxx} u_{tx} \right) dx dt = \\ &= \int_0^T \int_0^l \left(\frac{1}{2} (u_t^2)_t - v_0 (u_t^2)_x - \frac{1}{2} (v_0^2 - c^2) (u_x^2)_t + \frac{D}{2m} (u_{xx}^2)_t \right) dx dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \left(u_t^2 - (v_0^2 - c^2) u_x^2 + \frac{D}{m} u_{xx}^2 \right) dx dt. \quad (6) \end{aligned}$$

Стоит обратить внимание, что интеграл от слагаемого $2v_0 u_t u_{tx}$ равен нулю. Это верно в силу тождества

$$\int_0^T \int_0^l v_{tx} \omega dx dt = - \int_0^T \int_0^l v_t \omega_x dx dt,$$

которое после подстановки $v = u, \omega = u_t$ преобразуется к следующему виду:

$$\int_0^T \int_0^l u_{tx} u_t dx dt = - \int_0^T \int_0^l u_t u_{tx} dx dt,$$

отсюда немедленно следует равенство

$$\int_0^T \int_0^l u_t u_{tx} dx dt = 0.$$

Далее из формулы (6) получаем, что

$$\int_0^l \left(u_t^2 - (v_0^2 - c^2) u_x^2 + \frac{D}{m} u_{xx}^2 \right) \Big|_{t=0}^{t=T} dx = 0. \quad (7)$$

Пусть далее

$$u_t^2 = k(x, t), \quad - (v_0^2 - c^2) u_x^2 + \frac{D}{m} u_{xx}^2 = p(x, t).$$

Тогда

$$\int_0^l (k(x, T) + p(x, T) - (k(x, 0) + p(x, 0))) dx = 0. \quad (8)$$

Пусть $E(t)$ — полная энергия движущегося полотна в момент времени t , которая определяется формулой

$$E(t) = \int_0^l (k(x, t) + p(x, t)) dx. \quad (9)$$

Тогда в силу (8) имеем $E(T) = E(0)$. Сформулируем этот результат в виде леммы.

Лемма 2. Пусть $E(t)$ — полная энергия движущегося полотна, которая определена формулой (9). Тогда эта энергия сохраняется, а именно, $\forall T > 0$ имеет место равенство $E(T) = E(0)$.

Из закона сохранения легко получить теорему единственности.

Теорема. Пусть u_1 и u_2 — два решения начально-краевой задачи (1)–(3). Тогда $u_1 - u_2 \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v = u_1 - u_2$. Данная функция является решением уравнения (1), удовлетворяет краевым условиям (2) и нулевым начальным условиям:

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0. \quad (10)$$

Это означает, что в начальный момент времени энергия равна нулю. В силу закона сохранения энергии (лемма 2) в произвольный момент времени энергия также будет нулевой. Из этого следует, что $\forall t_1 > 0$

$$E(t_1) = E(0) = 0,$$

и $v_t^2 = 0$ и $(v_0^2 - c^2) v_x^2 + \frac{D}{m} v_{xx}^2 = 0$ для всех точек $[0; l]$. Отсюда получаем $v \equiv \text{const}$. В силу начальных условий (10) имеем $v \equiv 0$, что и завершает доказательство. \square

2. Некоторые точные решения уравнения колебаний движущегося полотна. Основной трудностью, которая не позволяет применить метод Фурье, является наличие в уравнении (1) слагаемого со смешанной производной. Данный факт не дает разделить переменные и построить решение в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля. Поэтому попробуем найти семейства точных решений специального вида.

Начнем с семейства решений уравнения (1) в виде бегущей волны [6]. Пусть

$$u = W(At + Bx), \quad (11)$$

где A, B — некоторые постоянные числа. Введем переменную

$$z := At + Bx,$$

подставим выражение (11) в уравнение (1) и получим уравнение для определения функции W :

$$A^2 W''(z) + 2v_0 AB W''(z) + (v_0^2 - c^2) B^2 W''(z) + \frac{D}{m} B^4 W^{IV}(z) = 0.$$

Данное обыкновенное дифференциальное уравнение является уравнением 4-го порядка с постоянными коэффициентами для неизвестной функции W . Решение этого уравнения может быть получено стандартными методами. После замены второй производной искомой функции на новую величину $q(z) = W''(z)$, можно переписать уравнение следующим образом:

$$\frac{D}{m} B^2 q''(z) + \left(\left(\frac{A}{B} + v_0 \right)^2 - c^2 \right) q(z) = 0. \quad (12)$$

Исходя из физических соображений, потребуем выполнения неравенства $\frac{D}{m} B^2 > 0$. Вид решения уравнения (12) зависит от коэффициента при $q(z)$. Рассмотрим все возможные случаи. Пусть далее $\omega = \left(\left(\frac{A}{B} + v_0 \right)^2 - c^2 \right) \frac{m}{D}$.

Случай 1. Пусть $\frac{A}{B} \in (-\infty; -v_0 - c) \cup (c - v_0; +\infty)$. Тогда $\left(\frac{A}{B} + v_0 - c \right) \times \left(\frac{A}{B} + v_0 + c \right) > 0$. Обозначим $\sigma^2 := \frac{\omega}{B^2}$ и в новых обозначениях уравнение (12) можно записать так:

$$q''(z) + \sigma^2 q(z) = 0.$$

Теперь решения легко можно предъявить:

$$q(z) = C_1 \sin(\sigma z) + C_2 \cos(\sigma z). \quad (13)$$

Далее найдем исходную функцию W . После двукратного интегрирования уравнения (13) получаем

$$W(z) = -\frac{1}{\sigma^2} (C_1 \sin(\sigma z) + C_2 \cos(\sigma z) + C_3 z + C_4).$$

А искомая функция u будет определена следующей формулой:

$$u = \frac{-B^2}{\omega} \left(C_1 \sin \left(\sqrt{\omega} \left(\frac{A}{B} t + x \right) \right) + C_2 \cos \left(\sqrt{\omega} \left(\frac{A}{B} t + x \right) \right) + C_3 (At + Bx) + C_4 \right). \quad (14)$$

Случай 2. Пусть $\frac{A}{B} \in (-v_0 - c; c - v_0)$. Тогда $\left(\frac{A}{B} + v_0 - c \right) \left(\frac{A}{B} + v_0 + c \right) < 0$. Обозначим $-\sigma^2 := \frac{\omega}{B^2}$ и получим уравнение

$$q''(z) - \sigma^2 q(z) = 0,$$

решение которого определяется формулой

$$q(z) = C_1 e^{\sigma z} + C_2 e^{-\sigma z}. \quad (15)$$

Далее, аналогично случаю 1, найдем исходную функцию W . После двукратного интегрирования получаем

$$W(z) = \frac{1}{\sigma^2} (C_1 e^{\sigma z} + C_2 e^{-\sigma z} + C_3 z + C_4),$$

а искомая функция будет определена формулой

$$u = \frac{-B^2}{\omega} \left(C_1 e^{\sqrt{|\omega|}(\frac{A}{B}t+x)} + C_2 e^{-\sqrt{|\omega|}(\frac{A}{B}t+x)} + C_3 (At + Bx) + C_4 \right). \quad (16)$$

Случай 3. Пусть $\frac{A}{B} = -v_0 \pm c$, то есть $(\frac{A}{B} + v_0 - c)(\frac{A}{B} + v_0 + c) = 0$. Тогда имеем уравнение $q''(z) = 0$, или $W^{IV}(z) = 0$. Решение этого уравнения является многочленом третьей степени с произвольными коэффициентами:

$$W(z) = C_3 z^3 + C_2 z^2 + C_1 z + C_0.$$

Искомая функция $u(x, t)$ здесь имеет совсем простой вид:

$$u(x, t) = C_3 (At + Bx)^3 + C_2 (At + Bx)^2 + C_1 (At + Bx) + C_0. \quad (17)$$

В этих трех случаях выбором параметров A, B, C_1, C_2, C_3, C_4 можно распорядиться так, чтобы были удовлетворены краевые условия (2) и начальные условия (3).

Следующее семейство решений будем искать в следующем виде:

$$u(x, t) = T(t) e^{\lambda x}, \quad (18)$$

где λ — некоторый параметр. По аналогии с предыдущим разделом, подставим выражение (18) в уравнение (1):

$$T'' e^{\lambda x} + 2v_0 T' \lambda e^{\lambda x} + (v_0^2 - c^2) T \lambda^2 e^{\lambda x} + \frac{D}{m} T \lambda^4 e^{\lambda x} = 0.$$

После сокращения на общий множитель и приведения подобных членов получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$T'' + 2v_0 \lambda T' + \left((v_0^2 - c^2) + \frac{D}{m} \lambda^2 \right) \lambda^2 T = 0. \quad (19)$$

Далее используем стандартный подход для получения функции T . Выпишем характеристическое уравнение:

$$\mu^2 + 2v_0 \lambda \mu + \left((v_0^2 - c^2) + \frac{D}{m} \lambda^2 \right) \lambda^2 = 0.$$

Корни этого уравнения определяются формулой

$$\mu_{1,2} = \lambda \left(-v_0 \pm c \sqrt{1 - \frac{D}{mc^2} \lambda^2} \right), \quad (20)$$

а решение для функции T – формулой

$$T(t) = e^{-v_0 \lambda t} \left(C_1 e^{c \lambda \sqrt{1 - \frac{D}{mc^2} \lambda^2 t}} + C_2 e^{-c \lambda \sqrt{1 - \frac{D}{mc^2} \lambda^2 t}} \right). \quad (21)$$

Окончательно вид решения уравнения (1) запишется в виде

$$u(x, t) = \left(C_1 e^{c \lambda \sqrt{1 - \frac{D}{mc^2} \lambda^2 t}} + C_2 e^{-c \lambda \sqrt{1 - \frac{D}{mc^2} \lambda^2 t}} \right) e^{\lambda(x - v_0 t)}. \quad (22)$$

Для линейных уравнений известно, что если есть набор решений, то и любая их линейная комбинация будет также являться решением. Сформулируем лемму.

Лемма 3. *Если имеется конечный набор значений $\lambda : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, то для каждого значения имеем функцию, которая определяется по формуле (22) и является решением уравнения (1). Тогда линейная комбинация этих решений так же является решением и определяется следующей формулой:*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \left(C_{1n} e^{c \lambda_n \sqrt{1 - \frac{D}{mc^2} \lambda_n^2 t}} + C_{2n} e^{-c \lambda_n \sqrt{1 - \frac{D}{mc^2} \lambda_n^2 t}} \right) e^{\lambda_n(x - v_0 t)}. \quad (23)$$

Для начальных условий, которые представляют собой линейные комбинации экспонент, можно подобрать коэффициенты в формуле (23) так, чтобы получившаяся функция удовлетворяла краевым и начальным условиям.

Для начальных условий, которые не являются конечными линейными комбинациями экспонент, необходимо найти базис из экспоненциальных функций и выполнить их разложение по этому базису. Заметим, что источником базисных функций может являться начально-краевая задача с теми же условиями (2), (3) и тем же интегралом энергии (9).

В качестве примера рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$u_{tt} + 2v_0 u_{tx} + (v_0^2 - c^2) u_{xx} + \frac{D}{m} u_{xxxx} = 0,$$

$$u|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u_{xx}|_{x=\pi} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

По формуле Эйлера имеем $\sin x = \frac{1}{2i} e^{ix} - \frac{1}{2i} e^{-ix}$, что позволяет использовать соотношение (23) с $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Для более компактной записи введем параметр $\theta = \sqrt{1 - \frac{D}{mc^2} \lambda_n^2} = \sqrt{1 + \frac{D}{mc^2}}$ для $n = 1, 2$. Тогда искомое решение будет иметь вид

$$u(x, t) = (C_{11} e^{i\theta t} + C_{21} e^{-i\theta t}) e^{i(x - v_0 t)} + (C_{12} e^{-i\theta t} + C_{22} e^{i\theta t}) e^{-i(x - v_0 t)},$$

где константы $C_{11}, C_{21}, C_{12}, C_{22}$ могут быть определены из начальных условий.

Итак, имеем

$$u|_{t=0} = (C_{11} + C_{21}) e^{ix} + (C_{12} + C_{22}) e^{-ix} = \frac{1}{2i} e^{ix} - \frac{1}{2i} e^{-ix}. \quad (24)$$

и

$$u_t|_{t=0} = (C_{11}i(c\theta - v_0) - C_{21}i(c\theta + v_0))e^{ix} + (-C_{12}i(c\theta - v_0) + C_{22}i(c\theta + v_0))e^{-ix} = 0. \quad (25)$$

Из условий (24), (25) получаем системы для определения искоемых констант:

$$\begin{cases} C_{11} + C_{21} = \frac{1}{2i}, \\ C_{11}(c\theta - v_0) - C_{21}(c\theta + v_0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} C_{12} + C_{22} = -\frac{1}{2i}, \\ -C_{12}(c\theta - v_0) + C_{22}(c\theta + v_0) = 0. \end{cases}$$

После решения этих систем окончательно можем записать

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{v_0}{c\theta}\right) \sin(t(c\theta - v_0) + x) - \left(1 - \frac{v_0}{c\theta}\right) \sin(t(c\theta + v_0) - x) \right).$$

Лемма 4. *Колебательный процесс, описываемый уравнением*

$$u_{tt} + (v_0^2 - c^2)u_{xx} + \frac{D}{m}u_{xxxx} = 0 \quad (26)$$

с начально-краевыми условиями (2), (3), имеет интеграл энергии, определяемый формулой (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем действовать стандартным приемом из вариационного исчисления [11]. Выпишем лагранжиан (энергию) движущейся системы:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left((v_0^2 - c^2) u_x^2 + \frac{D}{m} u_{xx}^2 \right) dx.$$

Найдем первую вариацию действия по u и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l u_t \delta u_t dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left((v_0^2 - c^2) u_x \delta u_x + \frac{D}{m} u_{xx} \delta u_{xx} \right) dx dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(u_{tt} + (v_0^2 - c^2) u_{xx} + \frac{D}{m} u_{xxxx} \right) \delta u dx dt, \end{aligned}$$

откуда, в силу произвольности δu , следует $u_{tt} + (v_0^2 - c^2)u_{xx} + \frac{D}{m}u_{xxxx} = 0$. \square

В силу леммы 4 для отыскания базисных функций для решения задачи (1)–(3) можно найти собственные функции и собственные числа для задачи (26), (2), (3). Затем можно разложить начальные условия по найденным собственным функциям и искать решение по формуле (23), но уже в виде ряда при $N \rightarrow \infty$.

Уравнение (26) с условиями (2), (3) является известной задачей о колебаниях двутавровой балки с шарнирно опертыми концами. Опираясь на работу [12], можно выписать систему собственных функций для этой задачи:

$$\left\{ \sin \left(x \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} \left(a + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \right) - \frac{a}{2}} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad (27)$$

где $a = \frac{m}{D}(c^2 - v_0^2)$.

Система функций (27) является мнимой частью системы мнимых экспонент:

$$\left\{ e^{ix \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} \left(a + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \right) - \frac{a}{2}}} \right\}_{n=1}^{\infty},$$

поэтому в выражении (23) величина λ_n определяется формулой

$$\lambda_n = i \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2} \left(a + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) - \frac{a}{2}}. \quad (28)$$

3. Заключение. В работе рассмотрены поперечные колебания движущегося полотна. Математической моделью этого процесса является начально-краевая задача для уравнения 4-го порядка с постоянными коэффициентами. Для краевых условий шарнирного опирания получено интегральное тождество, удовлетворяющее решению данной задачи. Это тождество является законом сохранения энергии, благодаря которому доказана единственность решения задачи.

В работе также получены формулы, описывающие семейства точных решений в виде бегущей волны. Приведены рекомендации для поиска решений задачи колебаний шарнирно закрепленного движущегося полотна в виде ряда Фурье по базисным функциям специального вида.

Литература

1. Lei Lu, Xiao-Dong Yang, Wei Zhang, Siu-Kai Lai. On Travelling Wave Modes of Axially Moving String and Beam. *Shock and Vibration* **2019**, 9496180 (2019). <https://doi.org/10.1155/2019/9496180>
2. En Wei Chen, Jun Wang, Kai Zhong, Yimin Lu, Haozheng Wei. Vibration dissipation of an axially traveling string with boundary damping. *Journal of Vibroengineering* **19** (8), 5780–5795 (2017). <https://doi.org/10.21595/jve.2017.18651>
3. Муравей Л. А., Петров В. М., Романенков А. М. О задаче гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны. *Вестник Мордовского университета* **28** (4), 472–485 (2018). <https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201804.472-485>
4. Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksa, T., Tuovinen T. *Mechanics of Moving Materials*. In Ser.: Solid Mechanics and its Applications, vol. 207. Springer (2014).
5. Liu Ning, Yang Guolai, Chen Bo. Transverse vibration analysis of an axially moving beam with lumped mass. *Journal of Vibroengineering* **16** (7), 3209–3217 (2014).
6. Pham Ph.-T., Hong K.-Sh. Dynamic models of axially moving systems: A review. *Nonlinear Dyn.* **100**, 315–349 (2020). <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05491-z>
7. Malik Kh. H., Dehraj S., Jamali S., Sandilo S. H., Awan A. M. On transversal vibrations of an axially moving beam under influence of viscous damping. *Journal of mechanics of Continua and Mathematical Sciences* **15** (11) (2020). <https://doi.org/10.26782/jmcms.2020.11.00002>
8. Chen An, Jian Su. Dynamic response of clamped axially moving beams: Integral transform solution. *Applied Mathematics and Computation* **218** (2), 249–259 (2011).
9. Özhan B. B. Vibration and Stability Analysis of Axially Moving Beams with Variable Speed and Axial Force. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* **14** (6), 1450015 (2014). <https://doi.org/10.1142/S0219455414500151>
10. Pellicano F., Vestroni F. Nonlinear Dynamics and Bifurcations of an Axially Moving Beam. *J. Vib. Acoust.* **122** (1), 21–30 (2000). <https://doi.org/10.1115/1.568433>
11. Шубин М. А. *Лекции об уравнениях математической физики*. Москва, МЦНМО (2003).
12. Рудаков И. А. Задача о колебаниях двутавровой балки с закрепленным и шарнирно опертым концами. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, no. 3, 4–21 (2019). <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-3-4-21>

Статья поступила в редакцию 28 августа 2021 г.;
доработана 30 ноября 2021 г.;
рекомендована к печати 2 декабря 2021 г.

Контактная информация:

Романенков Александр Михайлович — канд. техн. наук, доц.; romanaleks@gmail.com

On solutions of the equation of small transverse vibrations of a moving canvas

A. M. Romanenkov

Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation

For citation: Romanenkov A. M. On solutions of the equation of small transverse vibrations of a moving canvas. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 346–356. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.214> (In Russian)

The paper considers a model problem of one-dimensional small transverse vibrations of a canvas moving at a constant speed, which is fixed in a hinged manner. The oscillatory process is described by a linear differential equation of the 4th order with constant coefficients. In the model under consideration, the Coriolis force is taken into account, which leads to the appearance of a term with a mixed derivative in the differential equation. This effect makes it impossible to use the classical method of separating variables. However, families of exact solutions of the oscillation equation in the form of a traveling wave have been constructed. For the initial-boundary value problem, it was established that the solution can be constructed in the form of a Fourier series according to the system of eigenfunctions of the auxiliary problem on beam vibrations. For the considered oscillatory process, the law of conservation of energy is established and the uniqueness of the solution to the initial-boundary value problem is proved.

Keywords: the equation of vibrations of a moving canvas, the law of conservation of energy, exact solutions.

References

1. Lei Lu, Xiao-Dong Yang, Wei Zhang, Siu-Kai Lai. On Travelling Wave Modes of Axially Moving String and Beam. *Shock and Vibration* **2019**, 9496180 (2019). <https://doi.org/10.1155/2019/9496180>
2. En Wei Chen, Jun Wang, Kai Zhong, Yimin Lu, Haozheng Wei. Vibration dissipation of an axially traveling string with boundary damping. *Journal of Vibroengineering* **19** (8), 5780–5795 (2017). <https://doi.org/10.21595/jve.2017.18651>
3. Muravei L. A., Petrov V. M., Romanenkov A. M. On the problem of damping the transverse vibrations of a longitudinally moving string. *Vestnik Mordovskogo universiteta* **28** (4), 472–485 (2018). <https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201804.472-485> (In Russian)
4. Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksa, T., Tuovinen T. *Mechanics of Moving Materials*. In Ser.: Solid Mechanics and its Applications, vol. 207. Springer (2014).
5. Liu Ning, Yang Guolai, Chen Bo. Transverse vibration analysis of an axially moving beam with lumped mass. *Journal of Vibroengineering* **16** (7), 3209–3217 (2014).
6. Pham Ph.-T., Hong K.-Sh. Dynamic models of axially moving systems: A review. *Nonlinear Dyn.* **100**, 315–349 (2020). <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05491-z>
7. Malik Kh. H., Dehraj S., Jamali S., Sandilo S. H., Awan A. M. On transversal vibrations of an axially moving beam under influence of viscous damping. *Journal of mechanics of Continua and Mathematical Sciences* **15** (11) (2020). <https://doi.org/10.26782/jmcms.2020.11.00002>
8. Chen An, Jian Su. Dynamic response of clamped axially moving beams: Integral transform solution. *Applied Mathematics and Computation* **218** (2), 249–259 (2011).
9. Özhan B. B. Vibration and Stability Analysis of Axially Moving Beams with Variable Speed and Axial Force. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* **14** (6), 1450015 (2014). <https://doi.org/10.1142/S0219455414500151>
10. Pellicano F., Vestroni F. Nonlinear Dynamics and Bifurcations of an Axially Moving Beam. *J. Vib. Acoust.* **122** (1), 21–30 (2000). <https://doi.org/10.1115/1.568433>
11. Shubin M. A. *Lectures on the equations of mathematical physics*. Moscow, MTsNMO Publ. (2003).

12. Rudakov I. A. Oscillation Problem for an I-Beam with Fixed and Hinged End Supports. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Natural Sciences*, no. 3, 4–21 (2019). <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-3-4-21> (In Russian)

Received: August 28, 2021
Revised: November 30, 2021
Accepted: December 2, 2021

Author's information:

Alexander M. Romanenkov — romanaleks@gmail.com