УДК 534.015.1 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2
MSC 70J99

Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. I. Постановка задачи

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29
Институт проблем машиноведения РАН,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Для цитирования: *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. I. Постановка задачи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 357–365. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.215

В работе обсуждаются вопросы оптимального гашения колебаний пространственного двойного маятника, шарнирные оси которого не коллинеарны друг другу. В качестве вариантов гашения рассматриваются как просто пассивное гашение, связанное с действием вязкого трения, так и совместное пассивное и активное гашение, причем активные воздействия формируются по принципу коллинеарного управления. Для обоих случаев приводится аналитическое решение уравнений движения системы в рамках линейной модели, отчетливо демонстрирующее гашение движений по собственным формам колебаний исходной консервативной модели. Рассматриваются критерии оптимизации, характеризующие эффективность процессов затухания движений системы. Отмечается, что для получения наиболее ярко выраженных режимов гашения следует максимизировать степень устойчивости или минимизировать интегральный энерго-временной показатель. Кроме того, обсуждаются основные достоинства и недостатки указанных критериев оптимизации. Данная статья является основой для последующего исследования, которое будет представлено в виде отдельной статьи «Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. II. Решение задачи и анализ результатов».

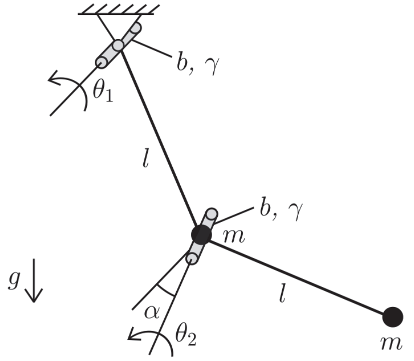
Ключевые слова: пространственный двойной маятник, вязкое трение, коллинеарное управление, критерий оптимизации, степень устойчивости, энерго-временной критерий.

1. Введение. Вопросам пассивного и активного гашения колебаний различных конструкций посвящено большое количество научных трудов [1, 2]. Особый интерес на этом пути вызывает подбор оптимальных параметров гашения, обеспечивающих функционирование системы в наилучших условиях [3, 4]. В силу развития робототехники в последние годы отдельное внимание привлекают многозвенные конструкции, имитирующие движения составных частей мобильных роботов [5–9]. Для гашения их нежелательных колебательных движений целесообразно использовать специальные демпфирующие и управляющие устройства, требующие специальной настройки.

В настоящей работе рассматривается интересная с практической точки зрения пространственная модификация обычного двойного маятника, испытывающая действие диссипативных моментов вязкого трения и управляющих моментов, построенных по принципу коллинеарного управления, которые позволяют подавлять колебания системы без искажения собственных форм колебаний исходной консервативной задачи. Основной целью статьи является нахождение наилучших параметров вязкого трения в отдельности и при совместном действии обоих факторов. Чтобы колебания затухали наиболее эффективно, следует предложить критерий оптимизации, на основе которого выбирались бы параметры гашения [10–14]. Представляет интерес использовать различные критерии и сопоставлять полученные по ним результаты.

Как правило, при решении задач оптимизации параметров многомерных механических систем приходится прибегать исключительно к численным методам анализа, так как построение точных решений оказывается трудоемким или вовсе невозможным. Это обстоятельство существенно снижает ценность полученного решения в качественном отношении. Однако в настоящем примере пространственного двойного маятника с диссипативными и управляющими воздействиями удается построить аналитическое решение и воспользоваться численными методами лишь для определения корней алгебраических уравнений, что оказывается крайне важной особенностью для наиболее наглядной и доступной интерпретации полученных результатов.

2. Пространственный двойной маятник. Рассмотрим двойной маятник, состоящий из двух идентичных математических маятников длиной l и массой концевого груза m (см. рисунок). Будем полагать, что этот двойной маятник является пространственным, т. е. оси его цилиндрических шарниров не коллинеарны друг другу, составляя между собой угол α. Не умаляя общности, можно считать этот угол острым при соответствующем его отсчете.



Пространственный двойной маятник.

Геометрия, кинематика и малые консервативные колебания этой системы были детально изучены в работе [5]. В частности, ее кинетическая и потенциальная энергии в рамках линейной модели имеют вид

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m l^2 \left(5\dot\theta_1^2 + 4\cos\alpha\,\dot\theta_1\dot\theta_2 + \dot\theta_2^2\right) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_0\dot{\boldsymbol{\theta}},\\
\Pi &= \frac{1}{2} m g l \left(3\theta_1^2 + 2\cos\alpha\,\theta_1\theta_2 + \theta_2^2\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_0\boldsymbol{\theta},
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2]^{\mathrm{T}}$ — столбец обобщенных координат, в качестве которых приняты углы поворота θ_1 и θ_2 в шарнирах, а матрицы инерционных ($\mathbf{A}_0$) и квазиупругих ($\mathbf{C}_0$) коэффициентов определяются выражениями

$$\mathbf{A}_0 = ml^2 \begin{bmatrix} 5 & 2\cos\alpha \\ 2\cos\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = mgl \begin{bmatrix} 3 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

В той же статье [5] из уравнения $\det(\mathbf{C}_0 - k_{s0}^2 \mathbf{A}_0) = 0$ были найдены безразмерные собственные частоты колебаний системы: $p_{s0} = k_{s0}/k$, где $k = \sqrt{g/l}$, а также собственные формы малых колебаний $\boldsymbol{\Theta}_{(s)}$, которые характеризуются соотношением β_{s0} амплитуд колебаний шарнирных углов поворота θ_2 и θ_1, где $s = 1, 2$:

$$p_{s0} = \sqrt{\frac{2(1+\sin^2\alpha) \pm \sqrt{2-\sin^2\alpha}}{1+4\sin^2\alpha}}, \quad \beta_{s0} = -\frac{3 \pm 2\sqrt{2-\sin^2\alpha}}{\cos 2\alpha \pm \sqrt{2-\sin^2\alpha}} \cos\alpha. \tag{3}$$

Подчеркнем, что здесь и везде далее нижний знак отвечает первой собственной частоте (при $s = 1$), а верхний знак — второй собственной частоте (при $s = 2$). Для определенности можно положить $\boldsymbol{\Theta}_{(s)} = [1, \beta_{s0}]^{\mathrm{T}}$. Отметим, что собственные формы колебаний удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\boldsymbol{\Theta}_{(1)}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\Theta}_{(2)} = 0, \quad \boldsymbol{\Theta}_{(1)}^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\Theta}_{(2)} = 0, \tag{4}$$

а для дальнейших действий также удобно ввести нормировочные коэффициенты N_s следующим образом:

$$\boldsymbol{\Theta}_{(s)}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\Theta}_{(s)} = N_s, \quad \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\Theta}_{(s)} = N_s k_{s0}^2. \tag{5}$$

3. Пассивное и активное гашение колебаний. В работе [15] была рассмотрена диссипативная модель пространственного двойного маятника, в которой учитывается действие вязкого трения в обоих шарнирах с одинаковым диссипативным коэффициентом b, представляющее собой пассивный вид гашения. В этом случае уравнение движения в матричной форме таково:

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta} = 0, \quad \mathbf{B}_0 = b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $\mathbf{B}_0$ — матрица диссипативных коэффициентов. Было показано, что в силу линейной связи между матрицами $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{C}_0$, которая имеет вид

$$\mathbf{A}_0 + \frac{1}{2n} \mathbf{B}_0 = \frac{2}{k^2} \mathbf{C}_0, \quad 2n = \frac{b}{ml^2}, \tag{7}$$

реализуется случай так называемого «пропорционального демпфирования» [16]. Это важное обстоятельство приводит к тому, что формы колебаний диссипативной системы остаются такими же, как и в исходной консервативной системе. Поэтому такое демпфирование позволяет гасить колебания системы по ее собственным, т. е. естественным, движениям, не искажая и не усложняя их качественного характера, а лишь убавляя амплитуды колебаний каждой из форм. Кроме того, в силу данной особенности легко найти корни λ характеристического уравнения $\det(\mathbf{A}_0 \lambda^2 + \mathbf{B}_0 \lambda + \mathbf{C}_0) = 0$:

$$\lambda_{1,2} = -n_1 \pm ik_1, \quad \lambda_{3,4} = -n_2 \pm ik_2, \quad k_s = \sqrt{k_{s0}^2 - n_s^2}, \tag{8}$$

где $n_s = \eta_s n$, а безразмерные коэффициенты η_s определяются по формулам

$$\eta_s = 2p_{s0}^2 - 1 = \frac{3 \pm 2\sqrt{2 - \sin^2\alpha}}{1 + 4\sin^2\alpha}, \quad s = 1, 2, \tag{9}$$

причем $\eta_2 > \eta_1$ при любом значении угла α. Также в [15] было показано, что величины k_s, представляющие собой частоты колебаний системы с учетом вязкого трения, будут вещественными при выполнении условий

$$\nu < \nu_{s0} = \frac{p_{s0}}{2p_{s0}^2 - 1} = \sqrt{\frac{(1 + 4\sin^2\alpha)\left[2(1 + \sin^2\alpha) \pm \sqrt{2 - \sin^2\alpha}\right]}{\left(3 \pm 2\sqrt{2 - \sin^2\alpha}\right)^2}}, \tag{10}$$

где $\nu = n/k$, причем $\nu_{20} < \nu_{10}$ при любом значении угла α. Общее решение уравнения (6) удобно записать в комплексной форме:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}_{(1)} e^{-n_1 t}\left(A_1 e^{ik_1 t} + B_1 e^{-ik_1 t}\right) + \boldsymbol{\Theta}_{(2)} e^{-n_2 t}\left(A_2 e^{ik_2 t} + B_2 e^{-ik_2 t}\right), \tag{11}$$

и оно сохраняет справедливость как для вещественных, так и для чисто мнимых значений величин k_s, которые будут иметь место при достаточно большом трении. Комплексные константы интегрирования A_s и B_s в этом решении находятся из начальных условий $\boldsymbol{\theta}_0$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}_0$ с учетом формул (4) и (5):

$$A_s = \frac{(n_s + ik_s)\boldsymbol{\Theta}_{(s)}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\Theta}_{(s)}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}_0}{2ik_s N_s}, \quad B_s = \overline{A_s}. \tag{12}$$

Для повышения эффективности процессов затухания движений можно использовать дополнительно и активные управляющие воздействия. Одним из рациональных управлений является коллинеарное управление, которое предполагает формирование управляющих моментов в шарнирах маятника в унисон с возникающими силами инерции, не изменяя их общего характера [17, 18]. Условие коллинеарности математически означает пропорциональность столбца управляющих воздействий $\mathbf{Q}$ столбцу обобщенных импульсов системы $\mathbf{K} = \partial T / \partial \dot{\boldsymbol{\theta}}$, т. е. его формирование в виде $\mathbf{Q} = \gamma \mathbf{K}$, где γ — коэффициент усиления, принимаемый постоянным. Такое управление является кинетическим, так как оно учитывает собственные динамические свойства системы [2, 19]. При добавлении коллинеарного управления в рассмотренную выше диссипативную систему уравнение (6) приобретет вид

$$\mathbf{A}_0 \ddot{\boldsymbol{\theta}} + (\mathbf{B}_0 - \gamma \mathbf{A}_0)\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\theta} = 0. \tag{13}$$

Отметим, что для плоского двойного маятника динамика такой системы рассмотрена в [20]. Уравнению (13) отвечает энергетическое соотношение:

$$\dot{E} = N(\dot{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_0 \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{D}_0 = 2ml^2 \begin{bmatrix} 5\delta - n & 2\delta\cos\alpha \\ 2\delta\cos\alpha & \delta - n \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где учтено, что $2n = b/(ml^2)$, а также введено обозначение $2\delta = \gamma$. Выражение (14) показывает, что суммарная мощность диссипативных и управляющих воздействий N есть квадратичная форма столбца обобщенных скоростей $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ с матрицей $\mathbf{D}_0$. Условие ее отрицательной определенности, гарантирующее гашение колебаний, имеет место при выполнении критерия Сильвестра, применение которого сводится к неравенству

$$\delta < \frac{3 - 2\sqrt{2 - \sin^2 \alpha}}{1 + 4\sin^2 \alpha} n = n_1, \tag{15}$$

или в безразмерном виде $\sigma < \eta_1 \nu$, где $\sigma = \delta/k$, $\nu = n/k$. Это неравенство показывает, что гашение может иметь место не только при отрицательных σ, но и при положительных, когда управление является разгонным, однако совместное действие диссипативных и управляющих воздействий при этом будет давать эффект подавления колебаний. Из уравнения (13) с учетом (7) также можно сделать вывод о том, что совместное действие диссипации и управления не нарушит форм колебаний исходной консервативной модели, а корни λ характеристического уравнения будут определяться формулами

$$\lambda_{1,2} = \delta - n_1 \pm ik_1, \quad \lambda_{3,4} = \delta - n_2 \pm ik_2, \quad k_s = \sqrt{k_{s0}^2 - (\delta - n_s)^2}. \tag{16}$$

Общее решение для этого случая можно записать по аналогии с (11) и (12).

Таким образом, задача оптимизации сводится к определению наилучших параметров указанных вариантов гашения. В этой связи необходимо предложить и детально обсудить критерии оптимизации, которые целесообразно принимать при решении задач о гашении колебательных движений механических систем.

4. Формирование критериев оптимизации. В существующей литературе в качестве критерия оптимизации для систем с несколькими степенями свободы наиболее часто принимается критерий, основанный на максимизации степени устойчивости системы [3, 21]. Как известно, *степенью устойчивости* линейной динамической системы называют расстояние Δ от мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения до ближайшего к ней корня при условии, что все эти корни лежат слева от мнимой оси [1, 2, 22, 23]:

$$\Delta = \min_i |\operatorname{Re} \lambda_i| = \max. \tag{17}$$

Этот критерий является максиминным, и его важным достоинством является то, что он не зависит от начальных условий движения системы. Однако его возможно построить лишь для линейной системы, так как в нелинейной системе понятие степени устойчивости лишено смысла, что является недостатком данного критерия. Кроме того, этот критерий не связан напрямую с энергетическими параметрами системы, характеризуя лишь степень затухания той составляющей решения, которая снижается медленнее всего. Поэтому данный критерий следует считать скорее чисто математическим, чем физическим. Тем не менее он широко применяется в различных практических задачах, что обусловлено его относительной простотой вычисления.

Однако в задачах механики более естественным с физической точки зрения является выбор параметров активного или пассивного гашения колебаний из соображения наилучшего рассеивания полной механической энергии во времени. Исходя из этого, в качестве критерия оптимизации можно принять величину интеграла [2, 24]

$$F = \int_0^\infty E(t)dt = \min, \tag{18}$$

где $E = T + \Pi$ — полная механическая энергия системы. Интегральные критерии такого рода также часто используются в теории автоматического управления [25–27]. Важно подчеркнуть, что критерий (18) имеет следующий геометрический смысл: величина F есть площадь под кривой энергии $E(t)$ на бесконечном промежутке времени, а задача оптимизации тогда сводится к определению таких параметров гашения, при котором эта площадь минимальна. Отметим также, что критерий (18) является *энерго-временным*, поскольку он гармонично сочетает в своей структуре как энергетические, так и временны́е характеристики процесса гашения свободных колебаний. Более того, в отличие от степени устойчивости, этот критерий можно использовать как для линейных, так и для нелинейных систем, что существенно расширяет сферу его применимости. Однако при использовании энерго-временного критерия на пути определения оптимальных параметров имеется значительная трудность, связанная с тем, что в общем случае эти параметры будут существенно зависеть от начальных условий движения, что свойственно любому интегральному критерию. В этом заключается главный недостаток обсуждаемого критерия, которого критерий, основанный на степени устойчивости, был лишен. Тем не менее поскольку начальные условия далеко не всегда бывают точно определенными, то целесообразно действовать по *принципу гарантированного успеха*, т. е. определять наилучшие параметры режима гашения для наихудшей совокупности начальных условий (таких, для которых значение критерия является наибольшим при заданных параметрах гашения). В этом случае мы приходим к минимаксной процедуре.

5. Заключение. В настоящей работе дана постановка задачи оптимизации режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника, шарнирные оси которого не коллинеарны друг другу. При этом сначала гашение предполагается чисто пассивным и основанным на действии вязкого трения, а затем осуществляется синтез пассивного и активного гашения, причем активные воздействия конструируются по принципу коллинеарного управления. Показано, что рассматриваемые диссипативные и управляющие воздействия не нарушают собственных форм колебаний исходной консервативной системы и гасят движения по этим формам. Были приведены все необходимые формулы, описывающие процессы затухания движений системы в упомянутых вариантах гашения. Также было отмечено, что для оценки эффективности этих процессов целесообразно выбирать либо критерий, основанный на степени устойчивости, либо энерго-временной критерий, причем каждый из указанных критериев обладает своими достоинствами и недостатками. В следующей статье «Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. II. Решение задачи и анализ результатов» будет представлено подробное аналитическое решение поставленной задачи, сопровождаемое серией наглядных графических иллюстраций.

Литература

1. Болотник Н. Н. *Оптимизация амортизационных систем.* Москва, Наука (1983).

2. Смольников Б. А. *Проблемы механики и оптимизации роботов.* Москва, Наука (1991).

3. Нагаев Р. Ф., Степанов А. В. Об оптимизации коэффициента затухания свободных колебаний двухмассовой системы. *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела* **4**, 24–28 (1979).

4. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Оптимальное гашение свободных колебаний в линейных механических системах. *Машиностроение и инженерное образование* **3**, 8–15 (2017).

5. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Oscillations of Double Mathematical Pendulum with Noncollinear Joints. *Lecture Notes in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference "Modern Engineering: Science and Education".* St Petersburg, Russia, June 2020, 185–193 (2021).

6. Гурский Н. Н., Скудняков Ю. А., Артющик В. С., Безручко А. Н. Управление мехатронной системой на базе многозвенных роботов-манипуляторов. *Наука и техника* **18** (4), 350–354 (2019).

7. Малыхин А. Ю. Типовые движения многозвенного шагающего робота для перемещения по произвольно ориентированным плоскостям. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана* **6** (6), 148–157 (2012).

8. Формальский А. М. *Управление движением неустойчивых объектов.* Москва, Физматлит (2014).

9. Перегудова О. А., Макаров Д. С. Синтез управления трехзвенным манипулятором. *Автоматизация процессов управления* **2** (40), 109–113 (2015).

10. Дегилевич Е. А., Смирнов А. С. Оптимизация демпфирования колебаний линейного осциллятора по временно́му критерию. *IX Поляховские чтения. Материалы международной научной конференции по механике.* 9–12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, 92–94 (2021).

11. Мирер С. А., Прилепский И. В. Оптимальные параметры гравитационной системы спутник — стабилизатор. *Космические исследования* **48** (2), 198–208 (2010).

12. Бесекерский В. А., Попов Е. П. *Теория систем автоматического регулирования.* Москва, Наука (1972).

13. Зайцев А. П. *Основы теории автоматического управления.* Томск, Изд-во ТПУ (2000).

14. Кумакшев С. А. Активное гашение колебаний несущих конструкций перемещением внутренней массы. *Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого). Материалы XV Международной научной конференции.* Москва, 3–5 июня 2020 г., 250–252 (2020).

15. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Dissipative Model of Double Mathematical Pendulum with Noncollinear Joints. *Lecture Notes in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference "Modern Engineering: Science and Education".* St Petersburg, Russia, June 2021, 38–47 (2022).

16. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний.* Москва, Высшая школа (1980).

17. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Collinear control of oscillation modes of spatial double pendulum with variable gain. *Cybernetics and Physics* **10** (2), 88–96 (2021).

18. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Управление резонансными колебаниями нелинейных механических систем на основе принципов биодинамики. *Машиностроение и инженерное образование* **4**, 11–19 (2017).

19. Меркин Д. Р., Смольников Б. А. *Прикладные задачи динамики твердого тела.* Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2003).

20. Леонтьев В. А., Смирнов А. С., Смольников Б. А. Коллинеарное управление колебаниями диссипативного двойного маятника. *Робототехника и техническая кибернетика* **7** (1), 65–70 (2019).

21. Муравьев А. С., Смирнов А. С. Оптимизация демпфирования колебаний маятника с упруго-подвижной точкой подвеса. *IX Поляховские чтения. Материалы международной научной конференции по механике.* 9–12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, 115–117 (2021).

22. Скубов Д. Ю. *Основы теории нелинейных колебаний.* Санкт-Петербург, Москва, Краснодар, Лань (2013).

23. Магнус К. *Колебания: введение в исследование колебательных систем*, пер. с нем. Москва, Мир (1982).

24. Воронов А. А. *Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем.* Москва, Энергия (1980).

25. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. *Математическая теория конструирования систем управления.* Москва, Высшая школа (2003).

26. Солодовников В. В. (ред.). *Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования.* Кн. 1. Москва, Машиностроение (1967).

27. Глушков В. М., Амосов Н. М., Артеменко И. А. *Энциклопедия кибернетики.* Т. 1. Киев, Главная редакция Украинской советской энциклопедии (1974).

Статья поступила в редакцию 20 октября 2021 г.;
доработана 29 ноября 2021 г.;
рекомендована к печати 2 декабря 2021 г.

Контактная информация:

Смирнов Алексей Сергеевич — ассистент, стажер-исследователь; smirnov.alexey.1994@gmail.com

Смольников Борис Александрович — доц., ст. науч. сотр.; smolnikovba@yandex.ru

Optimization of oscillation damping modes of spatial double pendulum. I. Formulation of the problem

A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov

Peter the Great St Petersburg Polytechnic University,
29, Polytechnicheskaya ul., St Petersburg, 195251, Russian Federation
Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
61, Bolshoy pr. V. O., St Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimization of oscillation damping modes of spatial double pendulum. I. Formulation of the problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 357–365.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.215 (In Russian)

The paper discusses the issues of optimal damping of oscillations of a spatial double pendulum, whose joint axes are not collinear to each other. As options for damping, both simply passive damping associated with the influence of viscous friction, and combined passive and active damping are considered, and active influences are formed according to the principle of collinear control. The analytical solution of the system motion equations is given for both cases in the framework of the linear model, and it clearly demonstrates the damping of motions on the natural oscillation modes of the original conservative model. The optimization criteria characterizing the efficiency of the damping processes of system movements are considered. It is noted that in order to obtain the most strongly marked damping modes, the degree of stability should be maximized or the integral energy-time indicator should be minimized. In addition, the main advantages and disadvantages of these optimization criteria are discussed. This article is the basis for further research, which will be presented as a separate article "Optimization of oscillation damping modes of spatial double pendulum. II. Solving the problem and analyzing the results".

Keywords: spatial double pendulum, viscous friction, collinear control, optimization criterion, degree of stability, energy-time criterion.

References

1. Bolotnik N. N. *Optimization of amortization systems.* Moscow, Nauka Publ. (1983). (In Russian)

2. Smolnikov B. A. *Problems of mechanics and robot optimization.* Moscow, Nauka Publ. (1991). (In Russian)

3. Nagaev R. F., Stepanov A. V. On optimization of the damping coefficient of free oscillations of a two-mass system. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of Rigid Body* **4**, 24–28 (1979). (In Russian)

4. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimal damping of free oscillations in linear mechanical systems. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie* **3**, 8–15 (2017). (In Russian)

5. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Oscillations of Double Mathematical Pendulum with Noncollinear Joints. *Lecture Notes in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference "Modern Engineering: Science and Education".* St Petersburg, Russia, June 2020, 185–193 (2021).

6. Hurski N. N., Skudnyakov Yu. A., Artsiushchyk V. S., Bezruchko A. N. Control of Mechatronic System Based on Multilink Robot-Manipulators. *Science and Technique* **18** (4), 350–354 (2019). (In Russian)

7. Malykhin A. Yu. Typical movements of a multi-link walking robot for traveling along arbitrarily oriented planes. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University* **6** (6), 148–157 (2012). (In Russian)

8. Formalskii A. M. *Motion control of unstable objects.* Moscow, Fizmatlit Publ. (2014). (In Russian)

9. Peregudova O. A., Makarov D. S. Control synthesis for three-link manipulator. *Automation of Control Processes* **2** (40), 109–113 (2015). (In Russian)

10. Degilevich E. A., Smirnov A. S. Optimization of oscillations damping of a linear oscillator by time criterion. *The Ninth Polyakhov's Reading. Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics.* March 9–12, 2021, St Petersburg, 92–94 (2021). (In Russian)

11. Mirer S. A., Prilepskiy I. V. Optimum parameters of a gravitational satellite-stabilizer system. *Kosmicheskie Issledovaniya* **48** (2), 198–208 (2010). (In Russian) [Eng. transl.: *Cosmic Research* **48** (2), 194–204 (2010). https://doi.org/10.1134/S0010952510020097].

12. Besekersky V. A., Popov E. P. *Theory of automatic control systems*. Moscow, Nauka Publ. (1972). (In Russian)

13. Zaitsev A. P. *Fundamentals of the automatic control theory*. Tomsk, Tomsk Polytechnic University Press (2000). (In Russian)

14. Kumakshev S. A. Active Damping of Vibrations of Load-bearing Structures by Moving the Internal Mass. *Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). Proceedings of the XV International Conference*. Moscow, June 3–5, 2020, 250–252 (2020). (In Russian)

15. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Dissipative Model of Double Mathematical Pendulum with Non-collinear Joints. *Lecture Notes in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference "Modern Engineering: Science and Education"*. St Petersburg, Russia, June 2021, 38–47 (2022).

16. Biderman V. L. *Theory of mechanical oscillations*. Moscow, Vysshaya shkola Publ. (1980). (In Russian)

17. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Collinear control of oscillation modes of spatial double pendulum with variable gain. *Cybernetics and Physics* **10** (2), 88–96 (2021).

18. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Resonance oscillations control of the non-linear mechanical systems based on the principles of biodynamics. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie* **4**, 11–19 (2017). (In Russian)

19. Merkin D. R., Smolnikov B. A. *Applied problems of rigid body dynamics*. St Petersburg, St Petersburg University Press (2003). (In Russian)

20. Leontev V. A., Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Collinear control of dissipative double pendulum. *Robotics and Technical Cybernetics* **7** (1), 65–70 (2019). (In Russian)

21. Muravyov A. S., Smirnov A. S. Optimization of damping of oscillations of a pendulum with an elastic-movable suspension point. *The Ninth Polyakhov's Reading. Proceedings of the International Scientific Conference on Mechanics*. March 9–12, 2021, St Petersburg, 115–117 (2021). (In Russian)

22. Skubov D. Yu. *Fundamentals of the nonlinear oscillations' theory*. St Petersburg, Moscow, Krasnodar, Lan' Publ. (2013). (In Russian)

23. Magnus K. *Schwingungen. Eine Einführung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. Stuttgart, Teubner (1961). [Rus. ed.: Magnus K. *Kolebanija: vvedenie v issledovanie kolebatel'nyh system*. Moscow, Mir Publ. (1982)].

24. Voronov A. A. *Fundamentals of the theory of automatic control. Automatic control of continuous linear systems*. Moscow, Energiya Publ. (1980). (In Russian)

25. Afanasyev V. N., Kolmanovskiy V. B., Nosov V. R. *Mathematical theory of design of control systems*. Moscow, Vysshaya shkola Publ. (2003). (In Russian)

26. Solodovnikov V. V. (ed.). *Technical cybernetics. Automatic control theory*. Book 1. Moscow, Mashinostroenie Publ. (1967). (In Russian)

27. Glushkov V. M., Amosov N. M., Artemenko I. A. *Encyclopedia of Cybernetics*. Vol. 1. Kiev, The main editorial office of the Ukrainian Soviet Encyclopedia Publ. (1974). (In Russian)

Received: October 20, 2021
Revised: November 29, 2021
Accepted: December 2, 2021

Authors' information:

Alexey S. Smirnov — smirnov.alexey.1994@gmail.com
Boris A. Smolnikov — smolnikovba@yandex.ru