УДК 517.925 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4
MSC 34D10

Об устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения второго порядка в критическом случае

А. А. Дороденков

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»,
Российская Федерация, 197376, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5

Для цитирования: *Дороденков А. А.* Об устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения второго порядка в критическом случае // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4. С. 572–579. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.402

Рассматривается дифференциальное уравнение вида $\ddot{x} + x^2\mathrm{sgn}x = Y(t, x, \dot{x})$, правая часть которого есть малое периодическое по t возмущение, достаточно гладкая функция в окрестности начала координат по переменным $x, \dot{x}$. Будем предполагать, что возмущение X имеет порядок малости не ниже пятого, если x приписывать второй порядок, $\dot{x}$ — третий. Вводятся периодические функции, являющиеся решением уравнения, указанного выше с нулевой правой частью. Так как гладкость квадратичной части ограничена, то гладкость введенных функций также ограничена. С помощью этих функций осуществляется переход от первоначального уравнения к системе в координатах, аналогичных полярным. Данная система с помощью полиномиальной замены приводится к системе с константами Ляпунова. Коэффициенты замены находятся методом неопределенных коэффициентов. По знаку первой ненулевой константы делается вывод о характере устойчивости нулевого решения. Из-за ограниченной гладкости введенных функций степень полиномиальной замены должна быть ограничена. Система дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов замены решается рекуррентно. Для разрешения проблем, возникающих из-за ограниченной гладкости, используется метод выделения главной части введенных функций и их комбинаций в результате разложении последних в ряды Фурье. Остаток ряда предполагается достаточно малым, и показывается, что его наличием можно пренебречь. Переход к главным частям вместо функций позволяет скомпенсировать недостаток гладкости введенных функций. При рассмотрении таких систем можно снова использовать полиномиальную замену и найти константу Ляпунова для каждой главной части. Показано, что знак константы для любой главной части будет сохраняться. Указываются достаточные условия устойчивости и неустойчивости.

Ключевые слова: устойчивость, малые периодические возмущения, осциллятор, константа Ляпунова, периодические функции.

1. Введение. В работе [1] А. М. Ляпунов исследовал на устойчивость нулевое решение системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x^{2n-1} + X(x, y), \tag{1}$$

где $n > 1$, $X(x, y)$ — аналитическая функция переменных x, y в окрестности начала координат, причем разложение X по степеням x, y не содержит членов порядка меньше $2n$, если переменной x приписывать порядок единица, а переменной y — порядок n. Подход Ляпунова заключается в следующем. В системе (1) вводятся переменные r, φ согласно формулам $x = r\mathrm{Cs}(\varphi)$, $y = -r^n\mathrm{Sn}(\varphi)$, $r > 0$, где $(\mathrm{Cs}(\varphi), \mathrm{Sn}(\varphi))$ — решение системы $\frac{dx}{d\varphi} = -y$, $\frac{dy}{d\varphi} = x^{2n-1}$ с начальными данными $\mathrm{Cs}(0) = 1, \mathrm{Sn}(0) = 0$. При $n = 1$ функции $\mathrm{Cs}(\varphi), \mathrm{Sn}(\varphi)$ превращаются в $\cos(\varphi), \sin(\varphi)$ соответственно. Основное тригонометрическое тождество отвечает тождеству $n\mathrm{Sn}^2(\varphi) + \mathrm{Cs}^{2n}(\varphi) = 1$. Обозначим период функций $\mathrm{Cs}(\varphi), \mathrm{Sn}(\varphi)$ через 2ω. В переменных r, φ система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = -\dfrac{1}{r^{n-1}} X(r\mathrm{Cs}(\varphi), -r^n\mathrm{Sn}(\varphi))\mathrm{Sn}(\varphi), \\ \dot{\varphi} = r^{n-1} - \dfrac{1}{r^n} X(r\mathrm{Cs}(\varphi), -r^n\mathrm{Sn}(\varphi))\mathrm{Cs}(\varphi). \end{cases} \tag{2}$$

Исключим из системы (2) переменную t. Получим уравнение

$$\frac{dr}{d\varphi} = R_2(\varphi)r^2 + R_3(\varphi)r^3 + \dots,$$

правая часть которого представляет собой сходящийся при достаточно малых r ряд с 2ω-периодическими коэффициентами. Тем самым вопрос об устойчивости при автономном возмущении нелинейного осциллятора решается аналогично случаю автономного возмущения линейного осциллятора.

Случай периодических возмущений системы (1) при $n = 2$, т. е. уравнение $\ddot{x} + x^3 = X(t, x, \dot{x})$, был исследован Ю. Н. Бибиковым [2]. Он показал, что ключевую роль в разрешении данной проблемы играет существование замены вида

$$\rho = r + \sum_{i=2}^{N} h_i(t, \varphi) r^i, \tag{3}$$

где $h_i(t, \varphi)$ — периодические по t, φ функции, N — любое число. Если N — первое число, когда константа Ляпунова $g_N \neq 0$, то по ее знаку устанавливается характер устойчивости.

Автором статьи в работе [3], в частности, изучалась устойчивость положения равновесия дифференциального уравнения вида

$$\ddot{x} + x^2\mathrm{sgn}x = Y(t, x, \dot{x}), \tag{4}$$

где Y — достаточно гладкая по x, $\dot{x}$ нелинейность. Ее порядок малости не ниже пятого, если полагать, что x имеет второй порядок, $\dot{x}$ — третий. Предполагалось также, что функция Y непрерывна и периодична по t с периодом 2π и выполняется соотношение $Y(t, 0, 0) = 0$. Таким образом, Y можно представить в виде

$$\begin{aligned} Y(t, x, y) = a_1(t)xy + a_2(t)y^2 + a_3(t)x^3 + a_4(t)x^2y + a_5(t)xy^2 + \\ + a_6(t)x^4 + a_7(t)y^3 + a_8(t)x^3y + Y^*, \end{aligned} \tag{5}$$

где порядок малости Y^* не ниже десятого в указанном выше смысле.

Следуя описанному подходу Ляпунова, вводятся обобщенные полярные координаты. Для этого в эквивалентной уравнению (4) системе

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x^2\mathrm{sgn}x + Y(t, x, y) \tag{6}$$

выполнялась замена переменных

$$x = \rho^2 C(\varphi), \quad y = -\rho^3 S(\varphi), \tag{7}$$

где $0 < \rho < \rho^*$, $(C(\varphi), S(\varphi))$ — решение системы

$$\frac{dx}{d\varphi} = -y, \quad \frac{dy}{d\varphi} = x^2 \mathrm{sgn} x$$

с начальными данными $C(0) = 1, S(0) = 0$. Очевидно, что функции $C(\varphi)$, $S(\varphi)$ — периодические, порядок их гладкости равен 3 и 2 соответственно (в отличие от бесконечной гладкости ляпуновских функций) и справедливо тождество

$$3S^2(\varphi) + 2C^3(\varphi)\mathrm{sgn} C(\varphi) = 2.$$

В результате замены (7) система (6) преобразовалась к виду

$$\dot\rho = -\frac{S}{2\rho^2} Y(t, \rho^2 C, -\rho^3 S), \quad \dot\varphi = \rho - \frac{C}{\rho^3} Y(t, \rho^2 C, -\rho^3 S),$$

или с учетом формулы (5) — к виду

$$\begin{cases} \dot\rho = P_3\rho^3 + P_4\rho^4 + P_5\rho^5 + O(\rho^6), \\ \dot\varphi = \rho + \Phi_2\rho^2 + \Phi_3\rho^3 + O(\rho^4). \end{cases}$$

Далее выполнялась замена переменных

$$\rho = r + h_2(\varphi)r^2 + h_3(t,\varphi)r^3 + h_4(t,\varphi)r^4 + h_5(t,\varphi)r^5, \tag{8}$$

где $h_i(t,\varphi)$ — периодические по t, φ функции. В результате получалась система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot\rho = g_5\rho^5 + P_6(t,\varphi)\rho^6 + P_7(t,\varphi)\rho^7 + O\left(\rho^8\right), \\ \dot\varphi = \rho + \Phi_2\rho^2 + O(\rho^3), \end{cases} \tag{9},$$

где коэффициенты при степенях есть непрерывные, 2π-, 2ω-периодические функции по переменным t, φ соответственно, а g_5 — константа Ляпунова. Следует заметить, что замена (8) аналогична замене (3), но, из-за ограниченной гладкости функций C, S, ее максимальная степень N равна 5.

Рассмотрим случай, когда константа g_5 равна нулю.

2. Устойчивость положения равновесия. Систему (9) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot\rho = P_6(t,\varphi)\rho^6 + P_7(t,\varphi)\rho^7 + O\left(\rho^8\right), \\ \dot\varphi = \rho + \Phi_2\rho^2 + O(\rho^3), \end{cases} \tag{10}$$

где $P_6(t,\varphi) = a_1^1(t)B_1^1(\varphi) + \dots + a_n^1(t)B_n^1(\varphi), P_7(t,\varphi) = a_1^2(t)B_1^2(\varphi) + \dots + a_m^2(t)B_m^2(\varphi)$. Среднее значение коэффициента $P_7(t,\varphi) = a(t)S^4(\varphi) + P(t,\varphi)$, вообще говоря, не равно нулю. Воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 1 [4]. *Пусть функция f имеет на отрезке $[0, 2\pi]$ непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно и кусочно непрерывную производную порядка*

k ($k \geq 1$), причем $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Тогда ряд Фурье функции f равномерно и абсолютно на всем отрезке $[0, 2\pi]$ сходится к самой функции f.

Запишем систему (10) в виде

$$\begin{cases} \dot{\rho} = P_6^1(t,\varphi)\rho^6 + P_7^2(t,\varphi)\rho^7 + E_6(t,\varphi)\rho^6 + E_7(t,\varphi)\rho^7 + O\left(\rho^7\right), \\ \dot{\varphi} = \rho + \Phi_2\rho^2 + O(\rho^3), \end{cases} \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} P_6^1 = a_1^1(t)b_1^1(\varphi) + \cdots + a_n^1(t)b_n^1(\varphi), \quad P_7^2 = a_1^2(t)b_1^2(\varphi) + \cdots + a_m^2(t)b_m^2(\varphi), \\ E_6(t,\varphi) = a_1^1(t)\varepsilon_1^1(\varphi) + \cdots + a_n^1(t)\varepsilon_n^1(\varphi), \\ E_7(t,\varphi) = a_1^2(t)\varepsilon_1^2(\varphi) + \cdots + a_m^2(t)\varepsilon_m^2(\varphi), \\ \forall\varepsilon > 0 \quad \exists k(\varepsilon) : b_i(\varphi) = \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\left(p_n\cos n\varphi + q_n \sin n\varphi\right), \\ |B_i(\varphi) - b_i(\varphi)| = |\varepsilon_i(\varphi)| < \varepsilon. \end{gathered} \tag{12}$$

Лемма. *Существует замена*

$$\rho = r + h_5(\varphi)r^5 + h_6(t,\varphi)r^6 + h_7(t,\varphi)r^7, \tag{13}$$

переводящая (11) *в систему*

$$\begin{cases} \dot{r} = g_6r^6 + g_7r^7 + E_6r^6 + E_7r^7 + O\left(r^8\right), \\ \dot{\varphi} = r + \Psi_2r^2 + O\left(r^3\right), \end{cases} \tag{14}$$

где g_6, g_7 — константы, $\Psi_2 = \Phi_2(t,\varphi), 0 < r < r^* < 1$.

Доказательство. Продифференцируем замену (13) по t. Получим равенство

$$\begin{gathered} \frac{dh_5}{d\varphi}\left(r + \Psi_2r^2 + O\left(r^3\right)\right)r^5 + \left(\frac{\partial h_6}{\partial t} + \frac{\partial h_6}{\partial \varphi}\left(r + \Psi_2r^2 + O\left(r^3\right)\right)\right)r^6 + \\ + \dot{r}\left(1 + 5h_5r^4 + 6h_6r^5 + 7h_7r^6\right) + \left(\frac{\partial h_7}{\partial t} + \frac{\partial h_7}{\partial \varphi}\left(r + O\left(r^2\right)\right)\right)r^7 = \\ = P_6^1r^6 + P_7^2r^7 + E_6r^6 + E_7r^7 + O\left(r^8\right). \end{gathered} \tag{15}$$

Используя (14) и приравнивая коэффициенты при степенях r^6, r^7 из (15), получим систему уравнений

$$\begin{cases} g_6 + \dfrac{dh_5}{d\varphi} + \dfrac{\partial h_6}{\partial t} = P_6^1(t,\varphi), \\ g_7 + \dfrac{dh_5}{d\varphi}\Psi_2 + \dfrac{\partial h_6}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial h_7}{\partial t} = P_7^2(t,\varphi). \end{cases}$$

В качестве решения первого уравнения возьмем

$$h_5 = \int_0^{\varphi} \bar{a}_1\left(b_1(\varphi) - \bar{b}_1\right) + \cdots + \bar{a}_n\left(b_n(\varphi) - \bar{b}_n\right)d\varphi, \quad h_6 = \tilde{h}_6(t,\varphi) + \hat{h}_6(\varphi),$$

где $\tilde{h}_6(t,\varphi) = \int\limits_0^t b_1(\varphi)\left(a_1(t) - \bar{a}_1\right) + \dots + b_n(\varphi)\left(a_n(t) - \bar{a}_n\right) dt$, а функция $\hat{h}_6(\varphi)$ подлежит определению, $g_6 = \bar{a}_1^1 \bar{b}_1^1 + \dots + \bar{a}_n^1 \bar{b}_n^1$, где черта над функцией обозначает среднее значение данной функции.

Подставим данное решение во второе уравнение. Получим уравнение

$$g_7 + \frac{d\hat{h}_6}{d\varphi} + \frac{\partial h_7}{\partial t} = P_7^2(t,\varphi) - \frac{dh_5}{d\varphi}\Psi_2 - \frac{\partial \tilde{h}_6}{\partial \varphi} = P_7^3(t,\varphi).$$

В качестве решения достаточно взять функции

$$\hat{h}_6(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \hat{P}_7^3(\varphi) d\varphi, \tilde{h}_7(t,\varphi) = \int\limits_0^t \tilde{P}_7^3(t,\varphi) dt, g_7 = \bar{P}_7^3. \qquad \square$$

Заметим, что для различных ε коэффициенты замены (13), вообще говоря, будут различными функциями. Однако все они будут ограничены одной константой. Действительно, из теоремы 1 следует, что любой отрезок ряда Фурье для функции ограничен той константой, которой будет ограничен абсолютно сходящийся ряд Фурье.

Обозначим константу g_7 через g_ε, так как она зависит от ε и можно показать, что $g_6 = 0$, аналогично тому, как это было сделано в работе [1].

Найдем значение g_ε. Запишем подробнее:

$$g_\varepsilon = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_7^2(t,\varphi) d\varphi dt - \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{dh_5}{d\varphi}\Psi_2 d\varphi dt. \tag{16}$$

Проведем оценку:

$$\frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} \frac{dh_5}{d\varphi}\hat{\Psi}_2 d\varphi = \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\varphi_1} \frac{dh_5}{d\varphi}\hat{\Psi}_2 d\varphi + \ldots + \frac{1}{2\omega}\int\limits_{\varphi_l}^{2\omega} \frac{dh_5}{d\varphi}\hat{\Psi}_2 d\varphi, \tag{17}$$

где $\hat{\Psi}_2(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_2(t,\varphi)dt$, а промежутки пределов интегрирования $0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_l < 2\omega$ есть промежутки постоянства знака для функции $\frac{dh_5}{d\varphi}\hat{\Psi}_2$. Используя неравенства (12), получим $|B_i^1(\varphi) - \bar{b}_i^1 - \left(b_i^1(\varphi) - \bar{b}_i^1\right)| = |\hat{B}_i^1(\varphi) - \hat{b}_i^1(\varphi)| = |\varepsilon_i(\varphi)| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\omega}\sum_{i=1}^n \int\limits_{\varphi_r}^{\varphi_{r+1}} \bar{a}_i^1(\hat{B}_i^1 \mp \varepsilon)\hat{\Psi}_2 d\varphi \le \frac{1}{2\omega}\int\limits_{\varphi_r}^{\varphi_{r+1}} \frac{dh_5}{d\varphi}\hat{\Psi}_2 d\varphi \le \frac{1}{2\omega}\sum_{i=1}^n \int\limits_{\varphi_r}^{\varphi_{r+1}} \bar{a}_i^1(\hat{B}_i^1 \pm \varepsilon)\hat{\Psi}_2 d\varphi,$$

где $r = 0, \dots, l$. Подставляя данные неравенства в формулу (17), получим

$$\frac{1}{2\omega}\sum_{i=1}^n \int\limits_0^{2\omega} \bar{a}_i^1 \hat{B}_i^1 \hat{\Psi}_2 d\varphi - \frac{1}{2\omega}\varepsilon \sum_{i=1}^n \int\limits_0^{2\omega} |\bar{a}_i^1 \hat{\Psi}_2| d\varphi \le \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{2\omega} \frac{dh_5}{d\varphi}\hat{\Psi}_2 d\varphi \le$$

$$\le \frac{1}{2\omega}\sum_{i=1}^n \int\limits_0^{2\omega} \bar{a}_i^1 \hat{B}_i^1 \hat{\Psi}_2 d\varphi + \frac{1}{2\omega}\varepsilon \sum_{i=1}^n \int\limits_0^{2\omega} |\bar{a}_i^1 \hat{\Psi}_2| d\varphi.$$

Используя (16), получим неравенства

$$\begin{cases} g_\varepsilon \leq \dfrac{1}{4\omega\pi} \int\limits_0^{2\omega} \int\limits_0^{2\pi} P_7^2(t,\varphi) d\varphi dt - \dfrac{1}{2\omega} \int\limits_0^{2\omega} \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i^1 B_i^1 \hat{\Psi}_2 d\varphi + \dfrac{1}{2\omega} \int\limits_0^{2\omega} \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{n} |\bar{a}_i^1 \hat{\Psi}_2| d\varphi, \\ g_\varepsilon \geq \dfrac{1}{4\pi\omega} \int\limits_0^{2\omega} \int\limits_0^{2\pi} P_7^2(t,\varphi) d\varphi dt - \dfrac{1}{2\omega} \int\limits_0^{2\omega} \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{a}_i^1 \hat{B}_i^1 \hat{\Psi}_2 d\varphi - \dfrac{1}{2\omega} \int\limits_0^{2\omega} \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{n} |\bar{a}_i^1 \hat{\Psi}_2| d\varphi. \end{cases} \tag{18}$$

Введем обозначения

$$g = \frac{1}{4\omega\pi} \int\limits_0^{2\omega} \int\limits_0^{2\pi} P_7^2(t,\varphi) d\varphi dt - \frac{1}{2\omega} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{2\omega} \bar{a}_i^1 \hat{B}_i^1 \hat{\Psi}_2 d\varphi, \quad M = \max \sum_{i=1}^{n} |\bar{a}_i^1 \hat{\Psi}_2|.$$

Теперь неравенства (18) запишутся в виде

$$|g_\varepsilon - g| \leq \varepsilon M. \tag{19}$$

Теорема 2. *Если* $g < 0$, *то нулевое решение системы* (1) *устойчиво; если* $g > 0$, *то оно неустойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$\dot{r} = g_\varepsilon r^7 + E_6(t,\varphi(t)) r^6 + E_7(t,\varphi(t)) r^7 + O\left(r^8\right), \tag{20}$$

где $\varphi(t)$ — вторая компонента решения $(r(t),\varphi(t))$ системы (14). Очевидно, что каждое решение уравнения (20) есть $r(t)$.

Устойчивость. Пусть $g < 0$. Учитывая условия теоремы, из (20) и равенств (12), (19) получим неравенство

$$\dot{r} = g_\varepsilon r^7 + E_6 r^6 + E_7 r^7 + O\left(r^8\right) < r^6 \left(\left(g + a^2 m\varepsilon + \varepsilon M\right) r + a^1 n\varepsilon + M_1 r^2\right), \tag{21}$$

где $a^1 > \max |a_i^1|$, $a^2 > \max |a_i^2|, M_1 = \mathrm{const}$.

Пусть выполняется неравенство

$$\sqrt{\varepsilon} = r(0) < a, \tag{22}$$

где $a = \min\left(r^*, \frac{-(a^1 n + M_1) + \sqrt{(a^1 n + M_1)^2 - 2g(a^2 m + M)}}{2(a^2 m + M)}\right)$. Тогда из (21) следует выполнение неравенства

$$\dot{r} \leq r^7 \left(g + r\left(\left(a^2 m + M\right) r + a^1 n + M_1\right)\right), \tag{23}$$

которое справедливо в точке $t = 0$. Из правой части (22) и из (23) следует неравенство $\dot{r} < \frac{g}{2} r^7$, из которого вытекает

$$r(t) \leq \sqrt{\varepsilon}. \tag{24}$$

Из формул (13), (22), (24) получим

$$r(t) l \leq \rho(t) \leq r(t) L, \quad \sqrt{\varepsilon} l \leq \rho(0) \leq \sqrt{\varepsilon} L.$$

Теперь можно утверждать, что $\forall\gamma > 0\ \exists\delta = \gamma\frac{l}{L} : \forall\rho(0) < \delta \Rightarrow \rho(t) \le Lr(t) \le Lr(0) \le \frac{L}{l}\rho(0) < \gamma$.

Неустойчивость. Пусть $g > 0$. Учитывая условия теоремы, из (20) и (12), (19) получим неравенство

$$\dot r = gr^7 + E_6 r^6 + E_7 r^7 + O\left(r^8\right) > r^6\left(\left(g - a^2 m\varepsilon - \varepsilon M\right) r - a^1 n\varepsilon - M_1 r^2\right), \qquad (25)$$

где $a^1 > \max|a_i^1|, a^2 > \max|a_i^2|, M_1 = \mathrm{const}$. Пусть выполняется $\sqrt{\varepsilon} = r(0) < a$, где $a = \min\left(r^*, \frac{-(a^1 n + M_1) + \sqrt{(a^1 n + M_1)^2 + 2g(a^2 m + M)}}{2(a^2 m + M)}\right)$.

Тогда из (25) следует выполнение неравенства

$$\dot r > r^7\left(g - r\left(\left(a^2 m + M\right) r + a^1 n + M_1\right)\right), \qquad (26)$$

которое справедливо при $t = 0$. Из правой части (22) и из (26) следует неравенство $\frac{\dot r}{r^7} > \frac{g}{2}$, откуда вытекает, что решение $r(t)$ строго монотонно возрастает в некоторой окрестности.

Предположим, что данная окрестность совпадает с положительной осью. Тогда левая часть (22) будет выполняться для всех t. Из (26) получим неравенство $\frac{\dot r}{r^7} > \frac{g}{2}$. Интегрируя обе его части, получим неравенство $-\frac{r^{-6}}{6} > \frac{gt}{2} - \frac{r^{-6}(0)}{6}$, из которого следует $r(t) > 1/\sqrt[6]{-3gt + \frac{1}{r^6(0)}}$, что противоречит предположению. Таким образом, получаем, что существует значение t такое, что $r(t) = a$. $\square$

Литература

1. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. В: *Собр. соч.* Т. 2, 272–331. Москва, Ленинград, Изд-во АН СССР (1956).

2. Бибиков Ю. Н. Устойчивость и бифуркация при периодических возмущениях положения равновесия осциллятора с бесконечно большой или бесконечно малой частотой. *Мат. заметки.* **65** (3), 323–335 (1999). https://doi.org/10.4213/mzm1056

3. Дороденков А. А. Устойчивость и бифуркация рождения инвариантных торов из положения равновесия существенно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 4, 20–27 (2009).

4. Кудрявцев Л. Д. *Курс математического анализа*: в 2 томах. Т. 2. Москва, Высшая школа (1981).

Статья поступила в редакцию 12 мая 2021 г.;
после доработки 12 июня 2021 г.;
рекомендована в печать 17 июня 2021 г.

Контактная информация:

Дороденков Александр Александрович — канд. физ.-мат. наук, ассистент; alex_math@mail.ru

On the stability of the zero solution of differential equation of the second order under critical case

A. A. Dorodenkov

St. Petersburg Electrotechnical University «LETI»,
5, ul. Professora Popova, St. Petersburg, 197376, Russian Federation

For citation: Dorodenkov A. A. On the stability of the zero solution of differential equation of the second order under critical case. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 4, pp. 572–579.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.402 (In Russian)

Differential equation of the form $\ddot{x}+x^2\mathrm{sgn}x = Y(t, x, \dot{x})$, is considered, where the right-hand side is a small periodic perturbation of t, a sufficiently differentiable function in the origin neighborhood with variables $x, \dot{x}$. It is assumed that X perturbation is of order smallness not lower than the fifth, if x is assigned the second order, and $\dot{x}$ is assigned the third order. Periodic functions are introduced that are the solution of the equation above with zero right-hand side. Since differentiability of the quadratic part is bounded, then differentiability of the introduced functions is also bounded. These functions are used to transfer from the initial equation to the system of equations in coordinates similar to polar. This system with the help of the polynomial replacement is reduced to a system with Lyapunov constants. Replacement coefficients are found by the partial fraction decomposition. The conclusion about the nature of stability of the zero solution is made by a sign of the first non zero constant. Due to the bounded differentiability of the introduced functions, the degree of the polynomial replacement must be limited. The system of differential equations for the replacement coefficients is solved recursively. The number of found Lyapunov constants is also bounded. This article considers the case when all found constants are zero. To study this problem there used the method of isolating the main part of the introduced functions and their combinations as a result of the expantion of the latter in the Fourier series. The remainder of the series is assumed to be sufficiently small and it is shown that its presence can be neglected. The transition to the main parts instead of functions allows to compensate for the lack of differentiability of the introduced functions. Considering such systems, polynomial replacement can be again used and the Lyapunov constant for each main part can be found. It is shown that the sign of the constant for any main part is preserved. Sufficient conditions for stability and instability are indicated.

Keywords: stability, small periodic perturbations, oscillator, Lyapunov constant, periodic function.

References

1. Lyapunov A. M. Research of one of the special cases of the problem of stability of movement. In: *Collected works.* Vol. 2, 272–331. Moscow, Leningrad, Acad. Sci. USSR Publ. (1956). (In Russian)

2. Bibikov Yu. N. Stability and bifurcation under periodic perturbations of the equilibrium position of the oscillator of an infinitely large or infinitely small frequency. *Mat. Zametki* **65** (3), 323–335 (1999). https://doi.org/10.4213/mzm1056 (In Russian) [Engl. transl.: *Math. Notes* **65** (3), 269–279 (1999). https://doi.org/10.1007/BF02675068].

3. Dorodenkov A. A. Stability and bifurcation of a production of invariant tori from the equilibrium position of an essential nonlinear second order differential equation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 4, 20–27 (2009). (In Russian)

4. Kudryavtsev L. D. *Mathematical Analysis Course*: in 2 vols. Vol. 2. Graduate School (1981). (In Russian)

Received: May 12, 2021
Revised: June 12, 2021
Accepted: June 17, 2021

Author's information:

Alexander A. Dorodenkov — alex_math@mail.ru