УДК 517.537 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4
MSC 30E10

Аппроксимация целыми функциями на счетном множестве континуумов. Обратная теорема*

О. В. Сильванович[1], *Н. А. Широков*[2,3]

[1] Санкт-Петербургский горный университет,
Российская Федерация, 199106, Санкт-Петербург, 21-я линия В. О., 2
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[3] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Российская Федерация, 190008, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16

Для цитирования: *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Аппроксимация целыми функциями на счетном множестве континуумов. Обратная теорема // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4. С. 600–607. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.405

В теории аппроксимации утверждения, в которых функции из определенных классов приближаются функциями из других фиксированных классов (например, полиномами, рациональными функциями, гармоническими функциями и т. д.) и точность приближения измеряется в некоторой шкале, называются прямыми теоремами приближения. Утверждения, в которых по известной точности приближения полиномами, рациональными функциями, гармоническими функциями какой-то функции выводится принадлежность упомянутой функции какому-то классу гладкости, называются обратными теоремами приближения. Обычно говорят, что какой-то класс, как правило, гладких функций конструктивно описан в терминах приближения полиномами, рациональными функциями, гармоническими функциями и т. д., если функции из этого класса могут быть приближены в выбранной шкале точности приближения, а также, если точность приближения в данной шкале дает принадлежность приближаемой функции рассматриваемому классу. Поскольку конструктивное описание классов функций является одним из приоритетных направлений теории аппроксимации, то к имеющимся прямым теоремам для каких-то классов функций стремятся добавить обратные утверждения. В работе авторов ранее была доказана прямая теорема о приближении целыми функциями экспоненциального типа набора аналитических функций, заданных на счетном множестве континуумов. В данной работе приводится обратное утверждение. В п. 1 собраны определения и формулировки, в п. 2 приводится доказательство основного результата.

Ключевые слова: обратные теоремы, теории аппроксимации, целые функции экспоненциального типа, классы Гёльдера.

1. Определение основных объектов и формулировка теоремы. Через $D_r(a)$ обозначим открытый круг $D_r(a) = \{z : |z-a| < r\}$, $\overline{D}_r(a)$ — его замыкание, $\mathbb{D} = D_1(0)$. У нас будут фигурировать жордановы области $G_n, n \in \mathbb{Z}$, $\Gamma_n = \partial G_n$, все кривые Γ_n предполагаем спрямляемыми. Для $z_1, z_2 \in \Gamma_n, z_1 \neq z_2$ через $\gamma_n(z_1, z_2)$ обозначим дугу наименьшей длины на Γ_n с концами z_1, z_2; для дуги $\gamma \subset \Gamma_n$ через $|\gamma|$ обозначаем ее длину.

*Работа Н. А. Широкова поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 20-01-00209).

Области G_n удовлетворяют условиям из работы [1].

A. Существует постоянная b, не зависящая от n и $z_1, z_2 \in \Gamma_n$ такая, что

$$|\gamma_n(z_1, z_2)| \leq b|z_2 - z_1|.$$

В дальнейшем считаем, что $G_n \cap \mathbb{R} \neq \emptyset,\ a_n \in G_n \cap \mathbb{R}$, функция $g_n(\lambda)$ конформно отображает $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ на $\mathbb{C} \setminus \overline{G}_n$ так, что в окрестности ∞ справедлива асимптотика $g_n(\lambda) = \beta_n\lambda + a_n + O_n(1) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, для постоянной $O_n(1)$ справедливо соотношение $|O_n(1)| \leq b_0,\ b_0$ не зависит от n, и пусть $v_n(\lambda) = \log g_n'(\lambda)$.

B. Предполагается, что семейство функций $\{v_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ равностепенно непрерывно в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$.

C. Существуют $\delta > 0, \Delta > 0$ такие, что $\overline{D_\delta}(a_n) \subset G_n \subset \overline{D_\Delta}(a_n)$.

D. Считаем a_n упорядоченными по возрастанию индекса, $a_n < a_{n+1}$ для любого n, и существуют $0 < A_1 < A_2$ такие, что $2\Delta + A_1 < a_{n+1} - a_n < 2\Delta + A_2$.

Далее полагаем $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \overline{G}_n$. Определим класс функций, участвующий в основной теореме. Пусть $\omega(t)$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t}dt + x\int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt \leq c_0\omega(x). \tag{1}$$

Напомним, что гёльдеровский модуль непрерывности $\omega_\alpha(t) = t^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, удовлетворяет соотношению (1). Через $\Lambda_B^{r+\omega}(E),\ r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, обозначаем множество функций f, заданных на E, аналитических в области $G_n,\ n \in \mathbb{Z}$, для которых существуют постоянные c_f и M_f такие, что $|f(z)| \leq M_f,\ z \in E$, модуль непрерывности функции $f^{(r)}|_{\overline{G}_n}$ не превосходит $c_f\omega(t)$.

Через T_σ обозначим множество функций F_σ экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси и типа $\leq \sigma$, т. е. таких целых функций F_σ, для которых справедлива оценка

$$|F_\sigma(z)| \leq c_{F_\sigma}e^{\sigma|\mathrm{Im} z|}, \tag{2}$$

где c_{F_σ} в соотношении (2) зависит от F_σ.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что для функции f, заданной на E, существуют постоянная b_f и целые функции экспоненциального типа $F_\sigma \in T_\sigma$ такие, что при $\sigma \geq 1$ и $z \in E$ выполнено соотношение*

$$|F_\sigma(z) - f(z)| \leq b_f\sigma^{-r}\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{3}$$

Тогда $f \in \Lambda_B^{r+\omega}(E)$.

2. Доказательство теоремы.

Лемма 1. *Положим $\Gamma_{n,h} \overset{\text{def}}{=} \{z = g_n(\lambda) : |\lambda| = 1 + h\}$, и $\rho_{n,h}(z) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{dist}(z, \Gamma_{n,h})$. Существуют постоянные $c_1 > 0,\ c_2 > 0$, не зависящие от $n \in \mathbb{Z}$ и $h > 0$ такие, что при $z \in \Gamma_n$ справедливы соотношения*

$$c_1h \leq \rho_{n,h}(z) \leq c_2h. \tag{4}$$

Доказательство леммы 1. Пусть $M_n = \max\limits_{|\lambda|\geq 1}|g_n'(\lambda)|,\ m_n = \min\limits_{|\lambda|\geq 1}|g_n'(\lambda)|$. В работе авторов [1] установлено, что существуют постоянные c_{01} и c_{02}, не зависящие от $n \in \mathbb{Z}$ такие, что имеются неравенства $0 < c_{01} \le m_n \le M_n \le c_{02}$. Пусть $z \in \Gamma_n$, $z = g_n(\lambda_0),\ |\lambda_0| = 1$, и пусть $\lambda_1 = (1+h)\lambda_0,\ z_1 = g_n(\lambda_1)$. Тогда $\rho_{n,h}(z) \le |z_1 - z_0|$ и

$$|z_1 - z_0| = \left|\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_1} g_n'(\lambda) d\lambda\right| \le \int\limits_{[\lambda_0,\lambda_1]} |g_n'(\lambda)||d\lambda| \le M_n|\lambda_1 - \lambda_0| \le c_{02}h, \tag{5}$$

где интегрирование в первом интеграле ведется по отрезку $[\lambda_0, \lambda_1]$. Обозначим через z_* такую точку на $\Gamma_{n,h}$ (или любую из таких), что имеем соотношение $|z_* - z| = \operatorname{dist}(z, \Gamma_{n,h})$ и пусть λ_* такова, что $g_n(\lambda_*) = z_*,\ l(\lambda_0, \lambda_*)$ — прообраз отрезка $[z, z_*]$ при отображении $g_n(\lambda),\ g_n(l(\lambda_0, \lambda_*)) = [z, z_*]$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned}\rho_{n,h}(z) = |z_* - z| = \left|\int\limits_{l(\lambda_0,\lambda_*)} g_n'(\lambda) d\lambda\right| = \int\limits_{l(\lambda_0,\lambda_*)} |g_n'(\lambda)||d\lambda| \ge \\ \ge \int\limits_{l(\lambda_0,\lambda_*)} m_n|d\lambda| = m_n|l(\lambda_0,\lambda_*)| \ge c_{01}h.\end{aligned} \tag{6}$$

Соотношения (5) и (6) доказывают лемму с $c_1 = c_{01},\ c_2 = c_{02}$. □

Из условий C и D, наложенных на континуумы G_n, и леммы 1 следует, что существует $h_0 > 0$ такое, что внутренности кривых Γ_{n,h_0} попарно не пересекаются. Не уменьшая общности, полагаем $h_0 \le 1$.

Лемма 2. *Пусть $\sigma_m = 2^m$, функции F_{σ_m} удовлетворяют условию* (3) *теоремы, $\Phi_m(z) = F_{\sigma_m}(z) - F_{\sigma_{m-1}}(z),\ n \ge 1$. Тогда существует постоянная b_1, не зависящая от n и m, такая, что при $z \in \Gamma_{n,2^{-m}h_0}$ справедлива оценка*

$$|\Phi_m(z)| \le b_1\sigma_m^{-r}\omega(\sigma_m^{-1}), \quad b_1 = b_1(f, E). \tag{7}$$

Доказательство леммы 2. Из (3) следует, что при $z \in \Gamma_n$ имеем

$$\begin{aligned}|\Phi_m(z)| = |\,(F_{\sigma_m}(z) - f(z)) - \big(F_{\sigma_{m-1}}(z) - f(z)\big)\,| \le \\ \le b_f\sigma_m^{-r}\omega(\sigma_m^{-1}) + b_f\sigma_{m-1}^{-r}\omega(\sigma_{m-1}^{-1}) \le b_f\sigma^{-r}\omega(\sigma_m^{-1}).\end{aligned} \tag{8}$$

Условие C, наложенное на континуумы G_n и (8), влечет, что при $z \in [a_n - \delta, a_n + \delta]$ справедливо неравенство

$$|\Phi_m(z)| \le b_{0f}\sigma_m^{-r}\omega(\sigma_m^{-1}). \tag{9}$$

Условия C и D, наложенные на расположение континуумов G_n, влекут соизмеримость отрезков $[a_n - \delta, a_n + \delta]$ с расстояниями между соседними отрезками. По результатам Б. Я. Левина [2] оценка (9), справедливая для отрезков с указанным расположением, влечет для целой функции Φ_m экспоненциального типа σ_m следующее неравенство для $x \in \mathbb{R}$, в котором постоянные $c_3, c_4 > 0$ зависят от множеств $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [a_n - \delta, a_n + \delta]$:

$$|\Phi_m(x)| \le c_3 b_{0f}\sigma_m^{-r}\omega(\sigma_m^{-1})e^{c_4\sigma_m}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Поскольку $\Phi_m = F_{\sigma_m} - F_{\sigma_{m-1}} \in T_{\sigma_m}$, то из (10) и (2) при $z \in \mathbb{C}$ вытекает оценка

$$|\Phi_m(z)| \le c_3 b_{0f} \sigma_m^{-r} \omega(\sigma_m^{-1}) e^{c_4 \sigma_m} e^{\sigma_m |\mathrm{Im} z|}. \tag{11}$$

Из леммы 1 и условия C следует, что существует c_5, зависящее от E, такое, что при $z \in \Gamma_{n,h_0}$ имеем соотношение $|\mathrm{Im} z| \le c_5,\ n \in \mathbb{Z}$. Тогда (11) влечет неравенство

$$|\Phi_m(z)| \le c_3 b_{0f} \sigma_m^{-r} \omega(\sigma_m^{-1}) e^{c_4 \sigma_m} e^{c_5 \sigma_m} \le c_6 e^{c_7 \sigma_m}, \quad z \in \Gamma_{n,h_0}. \tag{12}$$

Пусть $\lambda = \varphi_n(z)$ — обратное отображение к $z = g_n(\lambda)$, тогда $z \in \Gamma_{n,2^{-m}h_0}$ эквивалентно соотношению $|\varphi_n(z)| = 1 + 2^{-m} h_0$. Положим

$$\Psi_{n,m}(\lambda) = \Phi_m(g_n(\lambda)). \tag{13}$$

Из (7) и (13) заключаем, что требуется доказать оценку

$$|\Psi_{n,m}(\lambda)| \le b_1 \sigma_m^{-r} \omega(\sigma_m^{-1}), \quad |\lambda| = 1 + 2^{-m} h_0. \tag{14}$$

Функция $\log|\Psi_{n,m}(\lambda)|$ субгармонична в кольце $1 < |\lambda| < 1 + h_0$, при этом (8) влечет соотношение

$$\log|\Psi_{n,m}(\lambda)| \le \log(b_{0f} \sigma_m^{-r} \omega(\sigma_m^{-1})), \quad |\lambda| = 1, \tag{15}$$

и (12) влечет

$$\log|\Psi_{n,m}(\lambda)| \le \log(c_6 e^{c_7 \sigma_m}) = c_7 \sigma_m + \log c_6, \quad |\lambda| = 1 + h_0. \tag{16}$$

Субгармоничность функции $\log|\Psi_{n,m}(\lambda)|$ и неравенства (15) и (16) дают оценку

$$\log|\Psi_{n,m}(\lambda)| \le \frac{\log(b_{0f} \sigma_m^{-r} \omega(\sigma_m^{-1}))}{\log(1+h_0)} \log\frac{1+h_0}{|\lambda|} + \\ + \frac{c_7 \sigma_m + \log c_6}{\log(1+h_0)} \log|\lambda|, \quad 1 < |\lambda| < 1 + h_0. \tag{17}$$

При $|\lambda| = 1 + 2^{-m} h_0,\ 0 < h_0 \le 1,\ m \ge 1$, имеем

$$\frac{2}{3} \cdot 2^{-m} h_0 \le \log(1 + 2^{-m} h_0) \le 2^{-m} h_0,$$

поэтому (17) влечет соотношение

$$\log|\Psi_{n,m}(\lambda)| \le \log(b_{0f} \sigma_m^{-r} \omega(\sigma_m^{-1})) - \frac{2}{3} \cdot 2^{-m} h_0 \frac{\log(b_{0f} \sigma_m^{-r} \omega(\sigma_m^{-1}))}{\log(1+h_0)} + \\ + \frac{c_7 \cdot 2^m + \log c_6}{\log(1+h_0)} \cdot 2^{-m} h_0 \le \log(b_1 \sigma_m^{-r} \omega(\sigma_m^{-1})),$$

откуда следует неравенство (14), а вместе с ним и лемма. □

Обозначим через $K_{n,m}$ компакт: $K_{n,m} = g_n(\{\lambda : 1 \le |\lambda| \le 1 + 2^{-m} h_0\})$.

Лемма 3. *Пусть $F_{\sigma_m}(z)$ — функции, фигурирующие в соотношении* (3) *теоремы. Тогда при $z \in K_{n,m}$ справедлива оценка*

$$|F'_{\sigma_m}(z)| \le c_8 \sigma_m \omega\left(\frac{1}{\sigma_m}\right), \tag{18}$$

и c_8 не зависит от n и m.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим случай $m = 0,\ \sigma_m = 1$. Тогда по определению класса T_σ существует c_{10} такое, что $|F_1(x)| \le c_{10},\ x \in \mathbb{R}$ и $|F_1(z)| \le c_{10}e^{|\mathrm{Im}z|},\ z \in \mathbb{C}$. Применяя к любой точке $z \in K_{n,0}$ и функции $F_1'(\zeta)$ формулу Коши для окружности $\gamma_1(z) = \{\zeta : |\zeta - z| = 3c_5\}$, из вышеприведенных оценок получаем соотношение

$$|F_1'(z)| \le c_{11}. \tag{19}$$

При $m \ge 1$ имеем $F'_{\sigma_m}(z) = \sum_{k=1}^m \left(F_{\sigma_k}(z) - F_{\sigma_{k-1}}(z)\right)' + F_1'(z)$. Из леммы 1 следует, что существует постоянная c_{12}, не зависящая от n и m такая, что для $\forall z \in K_{n,k}$, $k \ge 1$, для окружности $\gamma_k(z) = \{\zeta : |\zeta - z| = c_{12}\sigma_k^{-1}\}$ имеем $\gamma_k(z) \subset K_{n,k-1} \cup G_n$. По лемме 2 при $\zeta \in K_{n,k-1} \cup G_n$ для функции $\Phi_k(\zeta) = F_{\sigma_k}(\zeta) - F_{\sigma_{k-1}}(\zeta)$ имеется оценка

$$|\Phi_k(\zeta)| \le b_1\sigma_k^{-r}\omega(\sigma_k^{-1}). \tag{20}$$

Применяя к функции $\Phi_k'(z)$ формулу Коши для окружности $\gamma_k(z)$, из (20) получим соотношение

$$|\Phi_k'(z)| \le b_1c_{12}^{-1}\sigma_k\omega(\sigma_k^{-1}). \tag{21}$$

Теперь из (19) и (21) следует, в силу свойства (1), оценка при $z \in K_{n,m}$:

$$|F'_{\sigma_m}(z)| \le \sum_{k=1}^m b_1c_{12}^{-1}\sigma_k\omega(\sigma_k^{-1}) + c_{11} \le c_8\sigma_m\omega(\sigma_m^{-1}).$$

Лемма 3 доказана. □

Следствие. *Определим функцию $f_1(z)$ следующим образом:*

$$f_1(z) = \begin{cases} f(z),\ z \in E, \\ F_{\sigma_m}(z),\ z \in K_{n,m} \setminus K_{n,m+1}, \\ 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} K_{n,0}. \end{cases} \tag{22}$$

Тогда $f_1 \in C(E)$.

Доказательство следствия. Проверка утверждения следствия сводится к проверке непрерывности функции $f_1(z)$ в любой точке $z_0 \in \Gamma_n$. Возьмем $z \in K_{n,m}$, пусть $\lambda = \varphi_n(z),\ |\lambda| \le 1 + 2^{-m}h_0,\ \lambda_1 = \frac{\lambda}{|\lambda|},\ z_1 = g_n(\lambda_1)$. Считаем, не уменьшая общности, что m такое, что $z \in K_{n,m} \setminus K_{n,m+1}$. Тогда при $z \to z_0$ будет $m \to \infty$ и $z_1 \to z_0$. Запишем

$$f_1(z) - f_1(z_0) = F_{\sigma_m}(z) - f(z_0) = (F_{\sigma_m}(z) - F_{\sigma_m}(z_1)) + \\ + (F_{\sigma_m}(z_1) - f(z_1)) + (f(z_1) - f(z_0)). \tag{23}$$

По условию теоремы $F_{\sigma_m}(z_1) - f(z_1) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, $|F_{\sigma_m}(z_1) - f(z_1)| \le b_0\sigma_m^{-r}\omega(\sigma_m^{-1})$. Положим также $\lambda_0 = \varphi(z_0) = e^{i\theta_0}, \lambda_1 = e^{i\theta_1}$, где $0 < \theta_0, \theta_1 \le 2\pi$, и выберем l из условия $h_02^{-l} \le |\theta_1 - \theta_0| < h_02^{-l+1}$. Поскольку мы будем рассматривать точки z_1, достаточно близкие к z_0, то можно полагать $l \ge 1$. Применение леммы 3 влечет оценку

$$|f_1(z) - f_1(z_0)| \le |f(z_1) - F_{\sigma_l}(z_1)| + |f(z_0) - F_{\sigma_l}(z_0)| + |F_{\sigma_l}(z_1) - F_{\sigma_l}(z_0)| \le \\ \le 2b_0\sigma_l^{-r}\omega(\sigma_l^{-1}) + c_8 \cdot h_0 \cdot 2^{-l+1} \cdot \sigma_l\omega(\sigma_l^{-1}) \le c_{13}\omega(\sigma_l^{-1}). \tag{24}$$

Поскольку $l \to \infty$ при $z_1 \to z_0$, то $f(z_1) - f(z_0) \to 0$ при $z \to z_0$. Для первого слагаемого в (23) вновь по лемме 3 получаем соотношение, которое для F_{σ_l} применялось в (24):

$$\begin{aligned} |F_{\sigma_m}(z) - F_{\sigma_m}(z_1)| &= |F_{\sigma_m}(g_n(\lambda)) - F_{\sigma_m}(g_n(\lambda_1))| \le \\ &\le \sup_{\zeta \in K_{n,m}} |F'_{\sigma_m}(\zeta)| \cdot \sup_{\mu \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}} |g'_n(\mu)| \cdot |\lambda - \lambda_1| \le \\ &\le c_8 \sigma_m \omega(\sigma_m^{-1}) \cdot c_{02} h_0 2^{-m} = c_{14} \omega(\sigma_m^{-1}). \end{aligned} \tag{25}$$

Соотношения (23)–(25) доказывают следствие, поскольку они влекут неравенство

$$|f_1(z) - f_1(z_0)| \le b_0 \sigma_m^{-r} \omega(\sigma_m^{-1}) + c_{14} \omega(\sigma_m^{-1}) + c_{13} \omega(\sigma_l^{-1}). \tag{26}$$

Следствие доказано. □

Закончим теперь доказательство теоремы. При $z \notin E$ пусть $d(z) = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(z, E)$, $B(z) = \{\zeta : |\zeta - z| \le d(z)\}$, $|B(z)| = \pi d^2(z)$, f_1 определена в (22), $dA(\zeta)$ — двумерная мера Лебега. Следуя Е. М. Дынькину [3], положим

$$f_0(z) = \frac{1}{|B(z)|} \int\limits_{B(z)} f_1(\zeta) dA(\zeta), \quad z \notin E, \tag{27}$$

$$f_0(z) = f(z), \quad z \in E. \tag{28}$$

Из следствия получаем, что $f_0 \in C^1(\mathbb{C} \setminus E)$. Если $z \in K_{n,m} \setminus K_{n,m+1}$, $m \ge 1$, то имеем оценку

$$\begin{aligned} |f'_{0\bar z}(z)| &= |(f_0(z) - F_{\sigma_{m_1}}(z))'_{\bar z}| = \\ &= \left| \left(\frac{1}{|B(z)|} \int\limits_{B(z)} f_1(\zeta) dA(\zeta) - \frac{1}{|B(z)|} \int\limits_{B(z)} F_{\sigma_{m_1}}(\zeta) dA(\zeta) \right)'_{\bar z} \right| \le \\ &\le \left| \mathrm{grad} \left(\frac{1}{|B(z)|} \int\limits_{B(z)} \left(f_1(\zeta) - F_{\sigma_{m_1}}(\zeta) \right) dA(\zeta) \right) \right| \le c_{15} \cdot \frac{1}{d(z)} \cdot \max_{\zeta \in B(z)} |f_1(\zeta) - F_{\sigma_{m_1}}(\zeta)|. \end{aligned} \tag{29}$$

В соотношении (29) m_1 — минимальное значение ν, для которого $B(z) \cap K_{n,\nu} \ne \emptyset$, и если m_2 — максимальное значение такого ν, то лемма 1 влечет неравенства $m - m_1 \le l_0$, $m_2 - m \le l_0$, где l_0 не зависит от n и m. Тогда из (29) и леммы 2 следует

$$|f'_{0\bar z}(z)| \le c_{16} \mathrm{dist}^{-r+1}(z, E) \omega(\mathrm{dist}^{-1}(z, E)). \tag{30}$$

Соотношение (30) и результаты Е. М. Дынькина [3] влекут $f \in \Lambda_B^{r+\omega}(E)$.

Теорема доказана. □

Литература

1. Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Approximation by entire functions on a countable set of continua. *Vestn. St. Petersb. Univ. Math.* **53**, iss. 3, 329–335 (2020).

2. Левин Б. Я. Мажоранты в классах субгармонических функций. *Теория функций, функциональный анализ и их приложения* **52**, 3–33 (1989).

3. Dyn'kin E. M. The pseudoanalytic extensions. *J. Anal. Math.* **60**, 45–70 (1993).

Статья поступила в редакцию 4 февраля 2021 г.;
после доработки 28 апреля 2021 г.;
рекомендована в печать 17 июня 2021 г.

Контактная информация:

Сильванович Ольга Васильевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; nikolai.shirokov@gmail.com
Широков Николай Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; olamamik@gmail.com

Approximation by entire functions on a countable set of continua. The inverse theorem*

O. V. Silvanovich[1], *N. A. Shirokov*[2,3]

[1] St. Petersburg Mining University,
2, 21-ya liniya V. O., St. Petersburg, 199106, Russian Federation
[2] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[3] HSE University,
16, ul. Soyuza Pechatnikov, St. Petersburg, 190008, Russian Federation

For citation: Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Approximation by entire functions on a countable set of continua. The inverse theorem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 4, pp. 600–607.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.405 (In Russian)

The approximation theory contains many statements where the rate of approximation of a function by polynomials, rational functions and so on is measured with the help of a scale. The statements where some points on the relevant scale are associated with the smoothness of the approximated function are called direct theorems of the theory of approximation. The statements where the smoothness of the approximated function is derived from the points on the scale of approximation by polynomials, rational functions etc., are called inverse theorems of the theory of approximation. The class of functions is constructively discribed in terms of the rate of approximation by polynomials, rational functions etc., if the direct theorems correspond to the inverse theorems, i. e. the smoothness of the approximated function and the points on the scale of approximation have one-to-one correspondence for the class under consideration. The authors have stated earlier the direct theorem concerning approximation by entire functions of exponential type. We considered a set of functions defined on the countable set of mutually disjoint continua and found the rate of their approximation by those entire functions. The present paper contains the inverse theorem to the menthioned above direct one.

Keywords: inverse theorems, theory of approximation, entire functions of exponential type, Hölder classes.

References

1. Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Approximation by entire functions on a countable set of continua. *Vestn. St. Petersb. Univ. Math.* **53**, iss. 3, 329–335 (2020).

*The work of N. A. Shirokov was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 20-01-00209).

2. Levin Y. A. Majorants in classes of subharmonic functions. *Theory functions, functionals analysis and applications* **52**, 3–33 (1989). (In Russian)

3. Dyn'kin E. M. The pseudoanalytic extensions. *J. Anal. Math.* **60**, 45–70 (1993).

Received: February 4, 2021
Revised: April 28, 2021
Accepted: June 17, 2021

Authors' information:

Olga V. Silvanovich — olamamik@gmail.com
Nikolay A. Shirokov — nikolai.shirokov@gmail.com