

## Применение поправочных коэффициентов в методе Рэлея при расчете основной частоты колебаний цилиндрической оболочки с прямоугольным сечением

*Г. Т. Дзедзисашвили*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Дзедзисашвили Г. Т.* Применение поправочных коэффициентов в методе Рэлея при расчете основной частоты колебаний цилиндрической оболочки с прямоугольным сечением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4. С. 646–652. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.410>

Рассматривается применение поправочных коэффициентов в методе Рэлея при расчете основной частоты колебаний цилиндрической оболочки с прямоугольным сечением. Систематизированы закономерности поведения поправочных коэффициентов. Проанализирована связь между видом поправочных коэффициентов и свойствами получаемой приближенной формулы.

*Ключевые слова:* колебания, цилиндрическая оболочка, метод Рэлея, поправочные коэффициенты.

**1. Введение.** Рассматриваются колебания цилиндрической оболочки с прямоугольным поперечным сечением при различных вариантах закрепления. При наличии квадратного сечения можно получить приближенное аналитическое решение путем численного решения уравнения, получаемого после разделения переменных в уравнении Лагранжа — Жермен [1, 2]. Для шарнирно опертой оболочки, когда сечение мало отличается от квадратного, возможно получение решения в виде асимптотического разложения [3]. В общем случае для прямоугольного сечения, помимо асимптотических разложений и метода конечных элементов, целесообразно использование метода Рэлея, позволяющего получить приближенную формулу для низшей частоты. В работе [4] формы колебаний представлены в виде разложения в двойной ряд Фурье, при этом результаты расчетов хорошо согласуются с результатами вычислений частот методом конечных элементов. В работе [5] для решения данной задачи был предложен подход, основанный на использовании метода Рэлея с поправочными коэффициентами, которые выбираются эмпирически. При рассмотрении некоторых примеров применения данного подхода было выявлено, что несмотря на то, что в общем случае координатные функции с поправочными коэффициентами не удовлетворяют всем геометрическим граничным условиям, они могут давать меньшую погрешность, чем функции с поправочными коэффициентами, которые этим условиям удовлетворяют. Цель настоящей работы — дальнейшее изучение и обобщение закономерностей поведения поправочных коэффициентов при их применении в методе Рэлея.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку с прямоугольным поперечным сечением, образованную сопряжением четырех прямоугольных пластин (рис. 1).

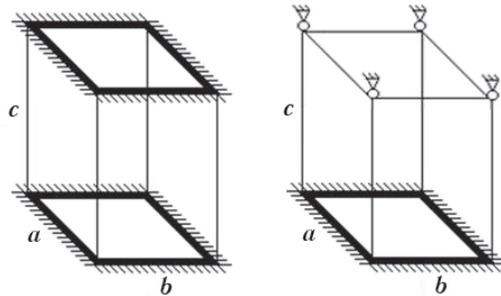


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка с прямоугольным поперечным сечением при разных граничных условиях ( $a, b, c$  — размеры).

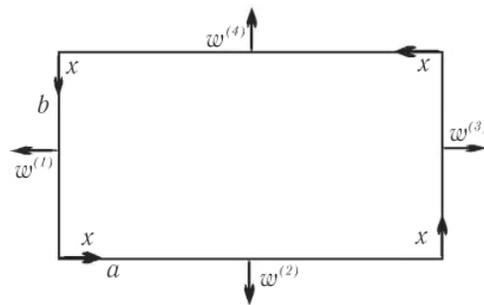


Рис. 2. Локальные координаты стенок оболочки (вид сверху).

Введем локальные прямоугольные координаты  $(x, y)$  в плоскости  $k$ -й пластины (рис. 2). Будем предполагать, что деформации в плоскости каждой пластины пренебрежимо малы, изгибающие моменты в местах пересечения равны, а углы между сопряженными пластинами остаются прямыми при изгибах. Эти предположения равносильны следующим условиям:

$$\begin{aligned} w^{(k)}(0, y) &= w^{(k)}(\chi, y) = 0, \\ w_x^{(k)}(\chi, y) &= w_x^{(k+1)}(0, y), \\ w_{xx}^{(k)}(\chi, y) &= w_{xx}^{(k+1)}(0, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k = \overline{1, 4}$  — номер пластины, при этом  $k + 1 = 1$  при  $k = 4$ ,  $\chi = a$  при четных  $k$  (либо  $b$  при нечетных  $k$ ),  $w^{(k)}(x, y)$  — прогиб  $k$ -й пластины, причем  $\forall k$  функция прогиба удовлетворяет уравнению Лагранжа — Жермен:

$$D\Delta\Delta w^{(k)} - ptw^{(k)}\omega^2 = 0, \quad k = \overline{1, 4}. \quad (2)$$

Далее под частотой оболочки понимается частотный параметр  $f = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho t}{D}}$ , где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  — изгибная жесткость,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\rho$  — плотность пластины,  $t$  — толщина пластины,  $\omega$  — собственная частота пластины.

**3. Получение приближенных решений.** Как было показано ранее в [3], пластины, образующие оболочку, совершают колебания независимо друг от друга. С учетом симметрии это позволяет рассматривать колебания пластины (квадратное сечение) или двух сопряженных пластин (прямоугольное сечение).

Частота пластины (пары пластин) по методу Рэлея определяется из отношения:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Pi}{T}}, \quad (3)$$

где  $\Pi$  — потенциальная энергия деформации пластины (пары пластин) при изгибе,  $T$  — максимальная кинетическая энергия пластины (пары пластин).  $\Pi$  и  $T$  зависят от координатной функции, характеризующей приближенную форму колебаний, при этом она должна удовлетворять геометрическим граничным условиям. Чем ближе вид координатной функции к истинной форме колебаний, тем точнее результат вычисления частоты.

Рассмотрим две смежные стенки оболочки. Выберем для стенки шириной  $\chi$  координатную функцию  $W_\chi$ . Геометрические граничные условия на стыках стенок будут иметь вид

$$\begin{aligned} W_a|_{x=0} = W_a|_{x=a} = 0, \quad W_b|_{x=0} = W_b|_{x=b} = 0, \\ \frac{\partial W_a}{\partial x}|_{x=a} = \frac{\partial W_b}{\partial x}|_{x=0}, \quad \frac{\partial W_b}{\partial x}|_{x=b} = \frac{\partial W_a}{\partial x}|_{x=0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда

$$\Pi = \int_0^c \left( \int_{-\chi_i}^0 \Pi_{\chi_i} dx + \int_0^{\chi_{i+1}} \Pi_{\chi_{i+1}} dx \right) dy, \quad (5)$$

$$T = \int_0^c \left( \int_{-\chi_i}^0 T_{\chi_i} dx + \int_0^{\chi_{i+1}} T_{\chi_{i+1}} dx \right) dy, \quad (6)$$

где

$$\Pi_{\chi_i} = D \left( \left( \frac{d^2 W_{\chi_i}}{dx^2} + \frac{d^2 W_{\chi_i}}{dy^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left( \left( \frac{d^2 W_{\chi_i}}{dx dy} \right)^2 - \frac{d^2 W_{\chi_i}}{dx^2} \frac{d^2 W_{\chi_i}}{dy^2} \right) \right), \quad (7)$$

$$T_{\chi_i} = \rho t W_{\chi_i}^2, \quad (8)$$

$$\chi_1 = a, \quad \chi_2 = b. \quad (9)$$

Координатная функция для стенки шириной  $\chi$  может быть записана в виде

$$W_\chi(\chi, c, x, y) = F_0(\chi) F_1(\chi, x) F_2(c, y), \quad (10)$$

где  $F_0$  — поправочный коэффициент,  $F_1$  и  $F_2$  — координатные функции, характеризующие колебания вдоль  $x$  и  $y$  соответственно. В качестве  $F_1$ ,  $F_2$  удобно брать тригонометрические функции или многочлены.

Будем рассматривать граничные условия «заделка — заделка»:

$$W_\chi|_{y=0} = W_\chi|_{y=c} = 0, \quad \frac{\partial W_\chi}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\partial W_\chi}{\partial y}|_{y=c} = 0, \quad (11)$$

и условия «заделка — шарнир»:

$$W_\chi|_{y=0} = W_\chi|_{y=c} = 0, \quad \frac{\partial W_\chi}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\partial^2 W_\chi}{\partial y^2}|_{y=c} = 0. \quad (12)$$

Далее рассмотрим случай «заделка — заделка», считая, что  $F_1$  и  $F_2$  — тригонометрические функции. Рассуждения для других вариантов функций и граничных условий могут быть проведены аналогично.

Будем оценивать точность решений, используя относительную погрешность  $J = \frac{f_R - f_N}{f_N}$ , где  $f_R$  — частота, полученная методом Рэлея,  $f_N$  — частота, полученная методом конечных элементов. Вычисления проводились при следующих размерах (шаг изменения 1):  $a = \overline{1,4}$ ,  $b = \overline{2,4}$ ,  $c = \overline{2,4}$ .

**4. Сравнение и анализ решений.** Возьмем координатные функции

$$W_\chi = \alpha_\chi \sin \frac{\pi x}{\chi} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{c} \right), \quad (13)$$

где  $\alpha_\chi = A$  ( $\chi = a$ ),  $\alpha_\chi = B$  ( $\chi = b$ ) — некоторые поправочные коэффициенты.

Проводя вычисления по формулам (3), (5)–(8), получим, что

$$f = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \sqrt{\frac{16A^2a^4b^3 + 8A^2a^2b^3c^2 + 3A^2b^3c^4 + 16B^2a^3b^4 + 8B^2a^3b^2c^2 + 3B^2a^3c^4}{a^3b^3c^4(A^2a + B^2b)}}. \quad (14)$$

При  $A \gg B$  ( $B \gg A$ ) частота по формуле (14) будет стремиться к частоте оболочки квадратного сечения со стороной  $a$  ( $b$ ). Это также верно, если положить  $A = 0$  или  $B = 0$ .

В случае прямоугольного сечения при  $A = 1$ ,  $B = \frac{b}{a}$  функции (13) удовлетворяют всем геометрическим граничным условиям. Погрешность такого решения изменяется в пределах от 2.1 до 14.9%, достигая минимума при  $a = b$ . Однако и при другом выборе  $A$  и  $B$  также возможно получение более точного решения. Для уточнения возможных вариантов выбора следует ввести дополнительные предположения. Будем предполагать, что в случае прямоугольного сечения значения производной прогиба в углу при подходе с разных сторон не равны друг другу, т. е. угол между стенками перестает быть прямым.

Исходя из этого, потребуем от координатных функций, чтобы они удовлетворяли всем геометрическим граничным условиям на нижнем и верхнем краях, а на боковых краях оболочки — только условиям отсутствия прогиба на линии пересечения стенок. Как будет показано далее, функции, удовлетворяющие таким ослабленным условиям, позволяют в данной задаче получить приближенные формулы, не уступающие по точности формулам с использованием координатных функций, удовлетворяющих всем геометрическим граничным условиям.

В частности, поправочные коэффициенты вида  $\chi^\alpha$ , где  $\alpha \geq 1$ , обеспечивают выполнение вышесказанных предположений. При подстановке их в формулу (14)

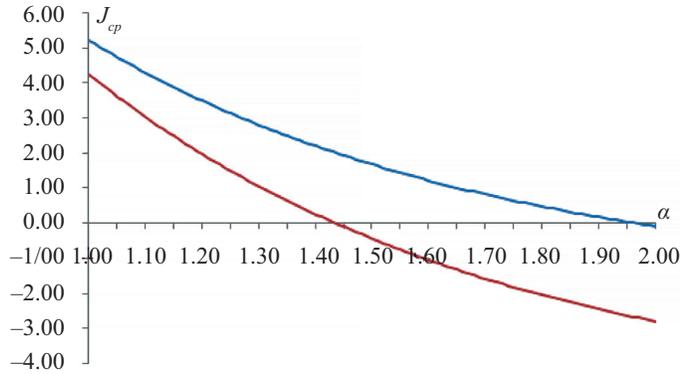


Рис. 3. Изменение средней погрешности приближенной формулы в зависимости от  $\alpha$  при граничных условиях «заделка — заделка» (синяя линия) и «заделка — шарнир» (красная линия).

получим, что

$$f = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \sqrt{\frac{16a^{2\alpha+4}b^3 + 8a^{2\alpha+2}b^3c^2 + 3a^{2\alpha}b^3c^4 + 16a^3b^{2\alpha+4} + 8a^3b^{2\alpha+2}c^2 + 3a^3b^{2\alpha}c^4}{a^3b^3c^4(a^{2\alpha+1} + b^{2\alpha+1})}}. \quad (15)$$

С ростом  $\alpha$  вычисляемое по (15) значение частоты убывает. При  $\alpha \gg 1$  оно стремится к частоте оболочки с квадратным сечением, сторона которого равна максимуму из  $a$  и  $b$ . Погрешность такого решения минимальна при  $a = b$ . При фиксированных  $a$  и  $c$  погрешность формул с увеличением  $b$  убывает при  $a < b$  и возрастает при  $a \geq b$ . При фиксированных  $a$  и  $b$  с увеличением  $c$  погрешность в случае прямоугольного сечения растет. Для квадратного сечения погрешность при варьировании  $a$  возрастает при  $a < c$  и убывает при  $a \geq c$ .

Исходя из поведения погрешности, для любой наперед заданной точности могут быть подобраны поправочные коэффициенты, обеспечивающие эту точность в приближенной формуле. В зависимости от  $\alpha$  получаемая формула может быть как относительно простой, так и достаточно громоздкой, что было показано в работе [5].

Для граничных условий «заделка — шарнир» результаты аналогичны. При  $A = B = 1$  погрешность изменяется в пределах от 0.1 до 15.7%. При этом погрешность с ростом  $\alpha$  уменьшается быстрее, чем при условиях «заделка — заделка» (рис. 3).

Из определения метода Рэлея следует, что он всегда дает оценку для частоты сверху. Поэтому решение будем называть корректным, если для него  $f_R > f_N$ . Из полученных результатов следует, что  $\forall \alpha \exists a_0, b_0, c_0$ , такие что  $\forall a \leq a_0, b \leq b_0, c \leq c_0 : f_R \leq f_N$ , что свидетельствует о наличии зависимости между  $\alpha$  и размерами оболочки. По мере роста  $\alpha$  это свойство сначала проявляется при выраженно прямоугольном сечении ( $\frac{b}{a} \geq 3$ ), затем отклонение сечения от квадратного, при котором решение перестает быть корректным, уменьшается. В рассматриваемом диапазоне размеров решение всюду корректно при  $\alpha \leq 1.37$  («заделка — заделка») и  $\alpha \leq 1.29$  («заделка — шарнир»).

Также можно заметить, что погрешность в формуле отчасти обусловлена присутствием высоких степеней  $a, b, c$  в знаменателе, и она наиболее быстро растет при

стремлении одной из сторон сечения к нулю. С увеличением  $\alpha$  вклад этой погрешности в формулу уменьшается.

**5. Заключение.** Из полученных результатов можно заключить, что применение поправочных коэффициентов  $\chi^\alpha$  в методе Рэлея способно приводить к более точному решению, несмотря на то, что координатные функции с такими поправочными коэффициентами в общем случае не удовлетворяют условию равенства углов. Точность решения связана с размерами оболочками, причем роль играет близость сечения к квадратному. При больших  $\alpha$  приближенные значения частот могут быть меньше, чем их значения, найденные методом конечных элементов, в большей части рассматриваемого диапазона размеров. В то же время при малых  $\alpha$  обеспечивается достаточный уровень точности для приложений.

## Литература

1. Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L. Free vibrations of square elastic tubes with a free end. *Mechanics Research Communications* **27**, iss. 4, 457–464 (2000).
2. Дзедзисашвили Г. Т. Колебания цилиндрических оболочек с квадратным поперечным сечением. В: *Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2017–2018 г.*, 13–29. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2019).
3. Амосов А. С. Колебания тонкой цилиндрической оболочки с прямоугольным сечением. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 1, 67–72 (2004).
4. Chen Yue Hua, Jin Guo Yong, Liu Zhi Gang. Free Vibration of a Thin Shell Structure of Rectangular Cross-section. *Key Engineering Materials* **486**, 107–110 (2011). <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.486.107>
5. Dzebisashvili G. T., Filippov S. B. Vibrations of cylindrical shells with rectangular cross-section. *Journal of Physics: Conference Series* **1479**, 012129 (2020). Доступно на: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1479/1/012129/pdf> (дата обращения: 26.08.2021).

Статья поступила в редакцию 14 апреля 2021 г.;  
после доработки 13 июня 2021 г.;  
рекомендована в печать 17 июня 2021 г.

Контактная информация:

Дзедзисашвили Георгий Тамазович — аспирант; d-g-t@bk.ru

## Applying adjustment factors in Rayleigh method to calculate vibrations principal frequency of a shell with rectangular cross-section

G. T. Dzebisashvili

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Dzebisashvili G. T. Applying adjustment factors in Rayleigh method to calculate vibrations principal frequency of a shell with rectangular cross-section. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 4, pp. 646–652. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.410> (In Russian)

The applying of adjustment factors in Rayleigh method to calculate vibrations principal frequency of a shell with rectangular cross-section is considered in the paper. Behavior patterns of the adjustment factors are generalized. Relationship between the adjustment factors and properties of the approximate formulae is analyzed.

**Keywords:** vibrations, cylindrical shell, Rayleigh method, adjustment factor.

## References

1. Filippov S. B., Haseganu E. M., Smirnov A. L. Free vibrations of square elastic tubes with a free end. *Mechanics Research Communications* **27**, iss. 4, 457–464 (2000).
2. Dzebisashvili G. T. Free vibrations of cylindrical shells with the square cross-section. *Trudy seminara "Compyuternye metody v mehanike sploshnoy sredy" 2017–2018*, 13–29. St. Petersburg, St. Petersburg Univ. Press (2019). (In Russian)
3. Amosov A. S. Free vibrations of a thin rectangular elastic tube. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss.1, 67–72 (2004). (In Russian)
4. Chen Yue Hua, Jin Guo Yong, Liu Zhi Gang. Free Vibration of a Thin Shell Structure of Rectangular Cross-section. *Key Engineering Materials* **486**, 107–110 (2011). <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.486.107>
5. Dzebisashvili G. T., Filippov S. B. Vibrations of cylindrical shells with rectangular cross-section. *Journal of Physics: Conference Series* **1479**, 012129 (2020). Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1479/1/012129/pdf> (accessed: August 26, 2021).

Received: April 14, 2021

Revised: June 13, 2021

Accepted: June 17, 2021

Author's information:

Georgii T. Dzebisashvili — d-g-t@bk.ru