Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4
УДК 517.926+531.384
MSC 70E18, 70F25, 34A30

Лиувиллевы решения в задаче о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения*

А. С. Кулешов, Д. В. Соломина

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119234, Москва, Ленинские горы, 1

Для цитирования: *Кулешов А. С., Соломина Д. В.* Лиувиллевы решения в задаче о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4. С. 653–660. https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.411

Задача о качении без скольжения тяжелого однородного шара по поверхности вращения является одной из классических задач механики неголономных систем. Еще из работ Э. Дж. Рауса и Ф. Нетера известно, что решение данной задачи сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты скорости центра шара в проекции на направление касательной к параллели опорной поверхности. Поэтому можно поставить вопрос: для каких поверхностей вращения соответствующее линейное уравнение второго порядка допускает общее решение, выраженное с помощью лиувиллевых функций? Ответ на этот вопрос можно получить, применив к уравнению алгоритм Ковачича. В работе дан вывод линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого сводится задача о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения. Для случая качения шара по эллипсоиду вращения доказано, что общее решение уравнения выражается через лиувиллевы функции.

Ключевые слова: качение без проскальзывания, однородный шар, поверхность вращения, алгоритм Ковачича, лиувиллевы решения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении однородного шара по произвольной выпуклой абсолютно шероховатой поверхности под действием сил, результирующая которых проходит через центр шара [1, 2]. Пусть G — центр тяжести шара, а подвижными осями GC, GA, GB будут соответственно нормаль к опорной поверхности и две перпендикулярные прямые, лежащие в касательной плоскости, построенной в точке соприкосновения шара с поверхностью. Направления прямых GA и GB определим позднее. Обозначим через $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ единичные базисные векторы осей GA, GB и GC соответственно. Пусть $\boldsymbol{\Omega} = \theta_1\boldsymbol{e}_1 + \theta_2\boldsymbol{e}_2 + \theta_3\boldsymbol{e}_3$ — угловая скорость выбранной подвижной системы координат; $\boldsymbol{v}_G = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2 + w\boldsymbol{e}_3$ — вектор скорости точки G (очевидно, что $w = 0$, поскольку шар не отрывается от опорной поверхности во время движения); $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3\boldsymbol{e}_3$ — угловая скорость шара. Обозначим через $\boldsymbol{N} = F_1\boldsymbol{e}_1 + F_2\boldsymbol{e}_2 + N\boldsymbol{e}_3$ силу реакции, действующей на шар со стороны опорной поверхности. Через $\boldsymbol{P} = X\boldsymbol{e}_1 + Y\boldsymbol{e}_2 + P\boldsymbol{e}_3$ обозначим результирующую силу, приложенную к центру тяжести шара. Пусть m — масса шара, R —

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 19-01-00140 и 20-01-00637).

его радиус, J — момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через его центр тяжести. Предполагая, что шар катится по выпуклой стороне неподвижной поверхности, и что положительное направление оси GC направлено наружу в сторону выпуклости, запишем уравнения движения шара в векторном виде:

$$m\dot{\boldsymbol{v}}_G + [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_G] = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N}, \tag{1}$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\Omega} \times J\boldsymbol{\omega}] = [\boldsymbol{GK} \times \boldsymbol{N}]\,. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) выражают, соответственно, законы изменения импульса и кинетического момента шара относительно выбранной подвижной системы координат. Здесь $\boldsymbol{GK} = -R\boldsymbol{e}_3$ — радиус-вектор из центра тяжести G шара в точку касания с опорной поверхностью. Поскольку скорость точки шара, находящейся в соприкосновении с опорной поверхностью, в каждый момент времени равна нулю, то имеем

$$\boldsymbol{v}_G + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{GK}] = 0. \tag{3}$$

В скалярной форме уравнения (1)–(3) записываются следующим образом:

$$m\dot{u} - m\theta_3 v = X + F_1, \quad m\dot{v} + m\theta_3 u = Y + F_2, \quad m\theta_1 v - m\theta_2 u = P + N; \tag{4}$$

$$J\dot{\omega}_1 + J\theta_2\omega_3 - J\theta_3\omega_2 = F_2 R,\ J\dot{\omega}_2 + J\theta_3\omega_1 - J\theta_1\omega_3 = -F_1 R,\ \dot{\omega}_3 + \theta_1\omega_2 - \theta_2\omega_1 = 0; \tag{5}$$

$$u - R\omega_2 = 0, \quad v + R\omega_1 = 0. \tag{6}$$

Исключая F_1, F_2, ω_1, ω_2 из уравнений (4)–(6), будем иметь

$$\dot{u} - \theta_3 v = \frac{R^2 X}{J + mR^2} + \frac{JR\theta_1\omega_3}{J + mR^2}, \quad \dot{v} + \theta_3 u = \frac{R^2 Y}{J + mR^2} + \frac{JR\theta_2\omega_3}{J + mR^2}. \tag{7}$$

Центр тяжести шара G движется по поверхности, полученной из данной поверхности смещением по нормали на расстояние, равное радиусу R шара. Направим оси GA и GB по касательным к линиям кривизны этой поверхности. Получим теперь линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к интегрированию которого сводится решение данной задачи.

2. Вывод основного уравнения. Найдем сначала выражение для угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ выбранной подвижной системы координат GA, GB, GC в зависимости от компонент u и v скорости центра масс G шара. Пусть поверхность, по которой движется центр шара, задается относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(q_1,\, q_2)\,, \tag{8}$$

где q_1 и q_2 — гауссовы координаты на поверхности. Предположим, что координатная сеть на поверхности (8) составлена из линий кривизны. Направления этих линий в каждой точке указываются ортогональными единичными векторами

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}, \quad (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) = \delta_{i\,j}. \tag{9}$$

Здесь через h_1, h_2 обозначены параметры Ламе:

$$h_i\,(q_1,\, q_2) = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right|, \quad i = 1, 2.$$

Вектор $\boldsymbol{e}_3 = [\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2]$ является вектором нормали к поверхности (8) в точке (q_1, q_2). Скорость центра масс $\boldsymbol{v}_G$ шара может быть определена по формуле

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2.$$

Отсюда следует, что компоненты скорости u и v связаны с координатами q_1, q_2 и их производными формулами

$$u = h_1\dot{q}_1, \quad v = h_2\dot{q}_2. \tag{10}$$

Обозначая через $k_i\,(q_1, q_2)$, $i = 1, 2$, главные кривизны поверхности (8), имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial q_1} = -h_1k_1\boldsymbol{e}_1, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial q_2} = -h_2k_2\boldsymbol{e}_2. \tag{11}$$

Формулы (11) являются следствием известной в дифференциальной геометрии теоремы Родрига [3], в которой дополнительно нужно учесть, что выбранная нами координатная сеть на поверхности (8) является ортогональной и составленной из линий кривизны. С помощью формул (9) и (11) можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q_1} = -\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2 + h_1k_1\boldsymbol{e}_3, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q_2} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_2,\\
&\frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_1, \quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial q_2} = -\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1 + h_2k_2\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned} \tag{12}$$

Угловая скорость системы координат GA, GB, GC находится по стандартной формуле

$$\boldsymbol{\Omega} = (\dot{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3)\,\boldsymbol{e}_1 + (\dot{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}_2 + (\dot{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}_3,$$

где обозначено

$$\dot{\boldsymbol{e}}_i = \frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Принимая во внимание формулы (11), (12), для угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ получим следующее выражение:

$$\boldsymbol{\Omega} = h_2k_2\dot{q}_2\boldsymbol{e}_1 - h_1k_1\dot{q}_1\boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{\dot{q}_2}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \frac{\dot{q}_1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\right)\boldsymbol{e}_3.$$

Учитывая формулы (10), перепишем выражение для угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ в виде

$$\boldsymbol{\Omega} = k_2v\boldsymbol{e}_1 - k_1u\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1}v - \frac{\partial h_1}{\partial q_2}u\right)\boldsymbol{e}_3.$$

Таким образом, для компонент θ_1, θ_2, θ_3 угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ подвижной системы координат GA, GB, GC мы имеем следующие выражения:

$$\theta_1 = k_2v, \quad \theta_2 = -k_1u, \quad \theta_3 = \frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1}v - \frac{\partial h_1}{\partial q_2}u\right). \tag{13}$$

Теперь предположим, что поверхность, по которой движется центр масс G шара, является поверхностью вращения, заданной относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\boldsymbol{r} = \left(\rho\left(q_1\right)\cos q_2,\ \rho\left(q_1\right)\sin q_2,\ \zeta\left(q_1\right)\right). \tag{14}$$

В этом случае параметры Ламе h_1 и h_2 имеют вид

$$h_1 = h_1\left(q_1\right) = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}, \quad h_2 = h_2\left(q_1\right) = \rho\left(q_1\right), \tag{15}$$

а главные кривизны k_1 и k_2 поверхности вычисляются по формулам

$$k_1 = k_1\left(q_1\right) = \frac{\left(\dfrac{d^2\zeta}{dq_1^2}\dfrac{d\rho}{dq_1} - \dfrac{d\zeta}{dq_1}\dfrac{d^2\rho}{dq_1^2}\right)}{\left(\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = k_2\left(q_1\right) = \frac{\dfrac{d\zeta}{dq_1}}{\rho\sqrt{\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}}. \tag{16}$$

Линиями кривизны на поверхности вращения являются ее меридианы и параллели. Пусть вертикальная ось Z является осью симметрии рассматриваемой поверхности вращения. Кроме координат q_1 и q_2 введем углы Эйлера θ, ψ и φ так, что угол, который ось GC составляет с осью Z, равен θ, а ψ — угол, который плоскость, содержащая оси Z и GC, составляет с некоторой фиксированной вертикальной плоскостью. Будем считать, что компоненты θ_1, θ_2, θ_3 угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ системы координат GA, GB, GC определяются при помощи стандартных кинематических формул Эйлера

$$\theta_1 = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \quad \theta_2 = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi, \quad \theta_3 = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi,$$

в которых значение угла φ положено равным $-\pi/2$. Поэтому получаем

$$\theta_1 = -\dot\psi\sin\theta, \quad \theta_2 = \dot\theta, \quad \theta_3 = \dot\psi\cos\theta. \tag{17}$$

С другой стороны, сравнивая (17) с формулами (13), находим

$$-\dot\psi\sin\theta = k_2 h_2\dot q_2, \quad \dot\theta = -k_1 h_1\dot q_1, \quad \dot\psi\cos\theta = \frac{1}{h_1}\frac{dh_2}{dq_1}\dot q_2. \tag{18}$$

Из второго уравнения системы (18) определяется связь между переменными θ и q_1. Поэтому можно считать, что поверхность (14) задана в зависимости от θ и q_2, то есть

$$\rho|_{q_1=q_1(\theta)} = \sigma\left(\theta\right), \quad \zeta|_{q_1=q_1(\theta)} = \tau\left(\theta\right). \tag{19}$$

Параметры Ламе h_1 и h_2 и главные кривизны k_1 и k_2 определяются теперь формулами вида (15), (16), в которых вместо ρ и ζ следует взять σ и τ, а все производные берутся по независимой переменной θ. Теперь учтем вторую из формул (18), которую представим в виде $\dot\theta = -k_1 u$, и найдем из нее, что

$$u = -\frac{\dot\theta}{k_1}. \tag{20}$$

Теперь рассмотрим третью из формул (5) и формулы (6). Из (6) следует, что

$$\omega_1 = -\frac{v}{R}, \quad \omega_2 = \frac{u}{R} = -\frac{\dot{\theta}}{Rk_1}.$$

Учитывая эти формулы, а также (13) и (18), из третьего уравнения системы (5) получаем

$$\dot{\omega}_3 = \theta_2\omega_1 - \theta_1\omega_2 = \frac{v\dot{\theta}}{Rk_1}\left(k_2 - k_1\right). \tag{21}$$

Окончательно, из формулы (21) имеем уравнение

$$\frac{d\omega_3}{d\theta} = \frac{v}{Rk_1}\left(k_2 - k_1\right). \tag{22}$$

Теперь предположим, что качение шара происходит под действием силы тяжести. Тогда

$$Y = 0, \quad \theta_3 = -\frac{k_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\theta}v,$$

и второе из уравнений (7) с учетом (20) принимает вид

$$\frac{dv}{d\theta} + \frac{v}{h_2}\frac{dh_2}{d\theta} = \frac{JR}{J + mR^2}\omega_3. \tag{23}$$

Дифференцируя повторно формулу (23) и принимая во внимание уравнение (22), найдем

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dv}{d\theta} + \frac{v}{h_2}\frac{dh_2}{d\theta}\right) = \frac{J}{J + mR^2}\cdot\frac{v}{k_1}\left(k_2 - k_1\right). \tag{24}$$

Таким образом, задача о качении шара по неподвижной выпуклой поверхности под действием силы тяжести в предположении, что центр G шара движется по поверхности вращения, сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (24). Коэффициенты данного уравнения определяются формой поверхности вращения, по которой движется центр шара. Можно поставить вопрос о том, для каких поверхностей вращения уравнение (24) интегрируется в явном виде, например, его общее решение выражается с помощью лиувиллевых функций. Для ответа на вопрос о существовании лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка обычно используется алгоритм Ковачича [4–6]. Ниже доказано, что если при качении шара его центр движется по эллипсоиду вращения, то задача интегрируется в лиувиллевых функциях.

3. Качение по эллипсоиду вращения. Пусть абсолютно шероховатая поверхность, по которой катится шар, такова, что при качении по этой поверхности центр шара принадлежит эллипсоиду вращения с полуосями a и b, уравнение которого запишем в виде (14):

$$\boldsymbol{r} = \left(a\sin q_1\cos q_2,\ a\sin q_1\sin q_2,\ b\cos q_1\right).$$

В рассматриваемом случае линейное дифференциальное уравнение второго порядка (24) может быть представлено в виде

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dv}{d\theta} + \frac{b^2\cos\theta}{\sin\theta\left(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)}v\right) = \frac{J}{J + mR^2}\cdot\frac{\left(b^2 - a^2\right)\sin^2\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}v. \tag{25}$$

Таким образом, задача о качении шара по абсолютно шероховатой поверхности такой, что при качении центр шара движется по эллипсоиду вращения, сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (25). Сделаем в уравнении (25) замену независимой переменной по формуле $x = \cos^2\theta$ и введем обозначения:

$$\frac{J}{J + mR^2} = n^2 < 1, \quad \frac{b^2}{a^2} = k^2.$$

Тогда уравнение (25) приводится к уравнению с рациональными коэффициентами:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + p_1(x)\frac{dv}{dx} + p_2(x)\, v = 0, \tag{26}$$

где

$$p_1(x) = \frac{2\left(k^2-1\right)x^2 + 3x - 1}{2x(x-1)\left(\left(k^2-1\right)x+1\right)},$$

$$p_2(x) = \frac{1}{4x(x-1)\left(\left(k^2-1\right)x+1\right)}\left[\frac{2k^2}{\left(\left(k^2-1\right)x+1\right)} - \frac{(2x-1)k^2}{x-1} - n^2\left(k^2-1\right)(x-1)\right].$$

Для того чтобы привести дифференциальное уравнение (26) к более простому виду, сделаем замену

$$y = v\sqrt{x-1}\left(\frac{x}{\left(k^2-1\right)x+1}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка (26) перепишется следующим образом:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{4\left(n^2-1\right)\left(k^2-1\right)^2 x^2 + 4\left(n^2-1\right)\left(k^2-1\right)x - 3}{16x^2\left(\left(k^2-1\right)x+1\right)^2}\, y. \tag{27}$$

Уравнение (27) имеет в точности вид, необходимый для того, чтобы применить к нему алгоритм Ковачича [4–6]. Применение к уравнению (27) алгоритма Ковачича [4–6] показывает, что общее решение данного уравнения может быть представлено в виде

$$y = \left(x\left(\left(k^2-1\right)x+1\right)\right)^{\frac{1}{4}}\left(C_1\left(\Phi(x)\right)^{\frac{n}{2}} + C_2\left(\Phi(x)\right)^{-\frac{n}{2}}\right),$$

$$\Phi(x) = 1 + 2\left(k^2-1\right)x + 2\sqrt{\left(k^2-1\right)x\left(\left(k^2-1\right)x+1\right)},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Таким образом, можно сделать вывод, что общее решение исходного уравнения (25) выражается через лиувиллевы функции.

Литература

1. Routh E. J. *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies: Being Part II of a Treatise on the Whole Subject.* Cambridge, Cambridge Univ. Press (2013). https://doi.org/10.1017/CBO9781139237284

2. Noether F. *Über rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen.* Leipzig, Teubner (1909).

3. Рашевский П. К. *Курс дифференциальной геометрии.* Москва, Ленинград, ГИТТЛ (1950).

4. Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *J. Symb. Comput.* **2**, iss. 1, 3–43 (1986).

5. Кулешов А. С., Черняков Г. А. Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о движении тяжелого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 4, 93–102 (2013).

6. Кулешов А. С., Ицкович М. О. Несуществование лиувиллевых решений в задаче о движении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4 (62)**, вып. 2, 291–299 (2017). https://doi.org/0.21638/11701/spbu01.2017.213

Статья поступила в редакцию 17 марта 2021 г.;
после доработки 2 июня 2021 г.;
рекомендована в печать 17 июня 2021 г.

Контактная информация:

Кулешов Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; kuleshov@mech.math.msu.su
Соломина Дарья Владимировна — студент; dasha.solomina@gmail.com

Liouvillian solutions in the problem of rolling of a heavy homogeneous ball on a surface of revolution*

A. S. Kuleshov, D. V. Solomina

Lomonosov Moscow State University,
1, Leninskie Gory, Moscow, 119234, Russian Federation

For citation: Kuleshov A. S., Solomina D. V. Liouvillian solutions in the problem of rolling of a heavy homogeneous ball on a surface of revolution. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 4, pp. 653–660.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.411 (In Russian)

The problem of rolling without sliding of a homogeneous ball on a fixed surface under the action of gravity is a classical problem of nonholonomic system dynamics. Usually, when considering this problem, following the E. J. Routh approach it is convenient to define explicitly the equation of the surface, on which the ball's centre is moving. This surface is equidistant to the surface, over which the contact point is moving. From the classical works of E. J. Routh and F. Noether it was known that if the ball rolls on a surface such that its centre moves along a surface of revolution, then the problem is reduced to solving the second order linear differential equation. Therefore it is interesting to study for which surface of revolution the corresponding second order linear differential equation admits Liouvillian solutions. To solve this problem it is possible to apply the Kovacic algorithm to the corresponding second order linear differential equation. In this paper we present our own method to derive the corresponding second order linear differential equation. In the case when the centre of the ball moves along the ellipsoid of revolution we prove that the corresponding second order linear differential equation admits a liouvillian solution.

Keywords: rolling without sliding, homogeneous ball, surface of revolution, Kovacic algorithm, Liouvillian solutions.

References

1. Routh E. J. *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies: Being Part II of a Treatise on the Whole Subject.* Cambridge, Cambridge Univ. Press (2013). https://doi.org/10.1017/CBO9781139237284

2. Noether F. *Über rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen.* Leipzig, Teubner (1909).

*This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (grants no. 19-01-00140 and 20-01-00637).

3. Rashevskii P. K. *Course of differential geometry.* Moscow, Leningrad, GITTL Publ. (1950). (In Russian)

4. Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *J. Symb. Comput.* **2**, iss. 1, 3–43 (1986).

5. Kuleshov A. S., Chernyakov G. A. Application of the Kovacic algorithm for investigation of the problem of motion of a heavy body of revolution on a perfectly rough plane. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 4, 93–102 (2013). (In Russian)

6. Kuleshov A. S., Itskovich M. O. Nonexistence of Liouvillian solutions in the problem of motion of a rotationally symmetric ellipsoid on a perfectly rough plane. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4 (62)**, iss. 3, 291–299 (2017). https://doi.org/0.21638/11701/spbu01.2017.213 (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **50**, 173–179 (2017). https://doi.org/10.3103/S106345411702008X].

Received: March 17, 2021
Revised: June 2, 2021
Accepted: June 17, 2021

Authors' information:

Alexander S. Kuleshov — kuleshov@mech.math.msu.su
Darya V. Solomina — dasha.solomina@gmail.com

ХРОНИКА

14 апреля 2021 г. состоялось заседание секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме ученых РАН, посвященное 60-летию первого полета человека в космос. На заседании выступили д-р техн. наук, профессор Н. Ф. Аверкиев, д-р техн. наук, доцент В. В. Салов, канд. техн. наук Т. А. Житников (Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского) с докладом на тему «Структура и особенности применения баллистически связанных групп космических аппаратов».

Краткое содержание доклада:

В докладе рассмотрена проблема повышения эффективности применения баллистически связанных групп космических аппаратов (КА), каждая из которых представляет собой совокупность функционально связанных КА, расположенных на заранее определенных орбитах. КА в составе таких групп движутся на сравнительно близком взаимном расстоянии — от нескольких десятков до сотни километров. Одной из проблем для реализации таких проектов является удержание относительного положения КА в баллистически связанных группах. Для ее разрешения необходимо определить баллистические параметры структуры такой группы КА и стратегию поддержания этих параметров в заданных пределах. Параметры баллистической структуры зависят в основном от системного эффекта, который требуется реализовать при применении баллистически связанных групп КА, а выбор стратегии поддержания параметров баллистической структуры — от воздействий окружающей среды на динамику движения КА в составе такой группы.