

## Неклассические колебания моноклинной композитной полосы

В. М. Рябов<sup>1</sup>, Б. А. Ярцев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

<sup>2</sup> Крыловский государственный научный центр,  
Российская Федерация, 196158, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

**Для цитирования:** Рябов В. М., Ярцев Б. А. Неклассические колебания моноклинной композитной полосы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2021. Т. 8 (66). Вып. 4. С. 695–708.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.415>

Предложена математическая модель затухающих изгибно-крутильных колебаний моноклинной композитной полосы постоянного по длине прямоугольного поперечного сечения. Модель строится на основе уточненной теории изгиба балки Тимошенко, теории обобщенного кручения Фойгта — Лехницкого и принципа упруго-вязкоупругого соответствия в линейной теории вязкоупругости. Разработан двухэтапный метод решения связанной системы дифференциальных уравнений. Сначала, используя преобразование Лапласа по пространственной переменной, находятся вещественные собственные частоты и собственные формы колебаний. Для определения комплексных собственных частот полосы в качестве их начальных значений используются найденные вещественные собственные частоты, а затем вычисляются комплексные частоты методом итераций третьего порядка. Приводится оценка достоверности математической модели и метода численного решения, выполненная путем сопоставления расчетных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь. Обсуждаются результаты численного исследования влияния углов ориентации армирующих волокон и длины на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь для безопорной и консольной моноклинных полос. Показано, что для безопорной полосы области взаимной трансформации собственных форм связанных мод колебаний возникают для квазиизгибных и квазикрутильных колебаний либо четных, либо нечетных тонов. В консольной полосе области взаимной трансформации собственных форм связанных мод колебаний возникают как для четных, так и для нечетных тонов.

*Ключевые слова:* композит, моноклинная полоса, связанные колебания, собственная частота, коэффициент механических потерь.

1. Основным достоинством моноклинных композитов является возможность создания на их основе адаптивных конструкций, способных реагировать на изменение внешних воздействий. К таким конструкциям, в первую очередь, относят адаптивные композитные крыльевые и лопастные системы, обеспечивающие наилучшее согласование с набегающим неоднородным потоком жидкости или газа за счет выбора составов и структур, наиболее рационально реализующих эффект изгибно-крутильной связанности [1]. Известны адаптивные композитные конструкции несущих поверхностей летательных аппаратов [2], лопастей роторов ветровых и приливных

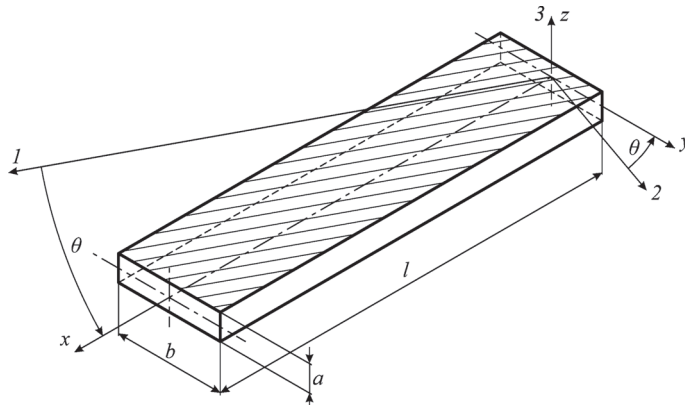


Рис. 1. Моноклинный композитный стержень.

турбин [3, 4], лопастей гребных винтов [5, 6]. Создание таких конструкций требует глубокого понимания неклассических особенностей их реакции на динамические внешние воздействия: зависимости собственных форм и собственных частот колебаний, а также диссипативных свойств от ориентации армирования. Простейшим объектом, позволяющим продемонстрировать эти особенности, является консольная полоса, вырезанная из пластины однонаправленного композита под произвольным углом к направлению армирования (рис. 1). В качестве еще одной причины, инициирующей интерес к изучению неклассических эффектов, порождаемых изгибно-крутильными колебаниями моноклинных композитных полос, следует отметить проблему разработки экспериментальных методов определения упругих и диссипативных свойств ортотропных композитов по измеренным величинам собственных частот и коэффициентов механических потерь различных форм колебаний безопорных опытных образцов [7–9]. Несмотря на существование множества работ, посвященных колебаниям ортотропных композитных балок, литература по свободным изгибно-крутильным колебаниям моноклинных балок крайне немногочисленна. При этом основная масса статей посвящена созданию математических моделей, а также численному исследованию упругих колебаний, в которых внутреннее трение не учитывается [10–14]. Последнее обстоятельство и послужило причиной написания данной работы.

**2.** Рассматривается квазиоднородная композитная полоса постоянного по длине прямоугольного поперечного сечения, армирующие волокна которой ориентированы в направлении  $\theta$  относительно срединной оси  $x$ . Математическая модель затухающих изгибно-крутильных колебаний моноклинной полосы строится на основе уточненной теории изгиба балки Тимошенко [15], теории обобщенного кручения Фойгта — Лехницкого [16, 17] и принципа упруго-вязкоупругого соответствия в форме комплексных модулей [18, 19]. В предположении квазигармонического характера колебаний связанная система дифференциальных уравнений движения записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{dx^4} + \rho\omega^2 \left[ \left( \frac{1}{E_x} + \frac{1}{kG_{xz}} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{E_x} \left( \rho\omega^2 \frac{1}{kG_{xz}} - \frac{A}{I_y} \right) w - \frac{\mu_{x,xy} I_p}{2G_{xy} I_y} \frac{d\Phi}{dx} \right] &= 0, \\ \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \rho\omega^2 \frac{I_p}{C} \Phi + \frac{\mu_{xy,x}}{2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{d^2 w}{dx^2} + \rho\omega^2 \frac{w}{kG_{xz}} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $w$  — линейное смещение оси полосы в направлении оси  $z$ ,  $\Phi$  — угол закручивания,  $E_x = E_x(\theta)$  — комплексный модуль упругости в направлении оси  $x$ ,  $G_{xy} = G_{xy}(\theta)$  — комплексный модуль сдвига в плоскости армирования  $xy$ ,  $G_{xz} = G_{xz}(\theta)$  — комплексный модуль межслойного сдвига в плоскости  $xz$ ,  $\mu_{x,xy} = \mu_{x,xy}(\theta)$ ,  $\mu_{xy,x} = \mu_{xy,x}(\theta)$  — коэффициенты взаимного влияния первого и второго рода,  $k$  — коэффициент сдвига, зависящий от формы поперечного сечения (для прямоугольного сечения  $k = 5/6$ ),  $A$  — площадь поперечного сечения полосы,  $I_y$  — момент инерции поперечного сечения полосы относительно оси  $y$ ,  $I_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения полосы,  $\omega$  — круговая частота колебаний,  $\rho$  — плотность материала,  $\bar{C}$  — крутильная жесткость при обобщенном кручении без изгиба оси полосы, вычисляемая по формуле [17]

$$\bar{C} = \frac{a^3 b \bar{G}_{xy}}{3} \left[ 1 - \frac{192 a}{\pi^5 b} \sqrt{\frac{\bar{G}_{xy}}{G_{xz}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \tanh \left( \frac{(2n+1)\pi b}{2a} \sqrt{\frac{G_{xz}}{\bar{G}_{xy}}} \right) \right],$$

где  $\bar{G}_{xy} = G_{xy}/(1 - \mu_{x,xy} \cdot \mu_{xy,x})$  — «чистый» комплексный модуль сдвига в плоскости  $xy$  [16].

Граничные условия записываются для свободного конца в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^3 w}{dx^3} + \rho \omega^2 \left( \frac{1}{E_x} + \frac{1}{k G_{xz}} \right) \frac{dw}{dx} - \rho \omega^2 \frac{\mu_{x,xy} I_p}{2 G_{xy} I_y} \Phi &= 0, \\ \frac{d^2 w}{dx^2} + \rho \omega^2 \frac{1}{k G_{xz}} w &= 0, \\ \frac{d\Phi}{dx} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

а для заземленного конца как

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0, \quad \Phi = 0. \quad (3)$$

Из анализа системы дифференциальных уравнений (1) следует, что связанность изгибно-крутильных колебаний моноклинной полосы обусловлена отличием от нуля коэффициентов взаимного влияния  $\mu_{x,xy}(\theta)$ ,  $\mu_{xy,x}(\theta)$  при  $\theta \neq 0^\circ, 90^\circ$ . При  $\theta = 0^\circ, 90^\circ$  имеем  $\mu_{x,xy} = \mu_{xy,x} = 0$ , и связанная система (1) распадается на два независимых уравнения. Первое из этих уравнений описывает поперечные колебания ортотропной балки Тимошенко, а второе — крутильные колебания ортотропного стержня постоянного по длине прямоугольного поперечного сечения:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \rho \omega^2 \left[ \left( \frac{1}{E_x} + \frac{1}{k G_{xz}} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{E_x} \left( \rho \omega^2 \frac{1}{k G_{xz}} - \frac{A}{I_y} \right) w \right] = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \rho \omega^2 \frac{I_p}{C} \Phi = 0. \quad (5)$$

**3. Нахождение комплексных собственных частот** выполняется в два этапа. Вначале решается вещественная задача на собственные значения, позволяющая определить собственные частоты и собственные формы колебаний упругой моноклинной композитной полосы. Для нахождения вещественных собственных чисел связанной

системы дифференциальных уравнений (1) с граничными условиями (2), (3) используется преобразование Лапласа функций  $w$  и  $\Phi$  по переменной  $x$ . Несложные преобразования приводят к бикубическому алгебраическому уравнению

$$\Delta(p) = 0, \quad (6)$$

корни которого позволяют получить точные выражения сначала для изображений, а затем и для оригиналов функций  $w(x)$  и  $\Phi(x)$ . Оригиналы  $w(x)$  и  $\Phi(x)$  содержат начальные значения функций  $w(x)$ ,  $w'(x)$ ,  $\Phi(x)$  при  $x = 0$ :  $w_0 = w(0)$ ,  $w_1 = w'(0)$ ,  $\Phi_0 = \Phi(0)$ . Подчиняя найденные функции  $w(x)$  и  $\Phi(x)$  граничным условиям при  $x = l$ , получим однородную систему уравнений относительно  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $\Phi_0$ . Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения этой системы является равенство нулю ее определителя  $\det(\omega^2) = 0$ .

Уравнение (6) представляет искомое частотное уравнение. Собственные частоты изгибно-крутильных колебаний  $\omega$  находятся методом последовательных приближений: задавая частотой  $\omega$ , можно решить уравнение (6) и вычислить  $\det(\omega^2)$ . Далее частоту изменяют, и цикл вычислений повторяется. Если при новом значении частоты  $\omega$  определитель  $\det(\omega^2)$  изменил знак, то в дальнейшем задача сводится к уменьшению интервала между старым и новым значениями  $\omega$ . Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет получена собственная частота  $\omega$  с необходимой точностью. После определения  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $\Phi_0$  из однородной системы вычисляются собственные функции (с точностью до нормировки), позволяющие идентифицировать найденную частоту.

В случае затухающих собственных колебаний моноклинной полосы искомые частоты суть комплексные числа, и указанный способ их нахождения неприменим. Поэтому выберем в качестве начального приближения к искомой комплексной частоте комплексное число  $\omega^{(0)}$ , вещественная часть которого равна частоте упругих собственных колебаний с модулями, равными вещественным частям соответствующих комплексных модулей, а мнимая часть — произвольное значение в пределах ожидаемого коэффициента механических потерь, после чего строим итерационную последовательность

$$\omega^{(k+1)} = \omega^{(k)} - \frac{F(\omega^{(k)})}{F'(\omega^{(k)})} - \frac{F^2(\omega^{(k)})F''(\omega^{(k)})}{2F'^3(\omega^{(k)})}.$$

Она сходится с третьим порядком к искомой частоте, т. е. погрешность на следующем шаге приближенно равна кубу предыдущей погрешности [20].

Необходимые в расчетах производные точно определить невозможно, поэтому они находятся приближенно по формулам численного дифференцирования второго порядка точности

$$F'(z) \approx \frac{F(z + h_z) - F(z - h_z)}{2h_z}, \quad F''(z) \approx \frac{F(z + h_z) - 2F(z) + F(z - h_z)}{h_z^2}$$

при подходящем выборе шага  $h_z$  в зависимости от точки  $z$ .

На каждом шаге итерации требуется трижды вычислять значение определителя высокого порядка, что и определяет основное время работы программы. По величинам вещественной и мнимой частей  $k$ -й комплексной собственной частоты  $\omega_k$  определим значения коэффициента механических потерь  $k$ -й собственной формы колебаний по приближенной формуле  $\eta_k = 2 \operatorname{Im} \omega_k / \operatorname{Re} \omega_k$ .

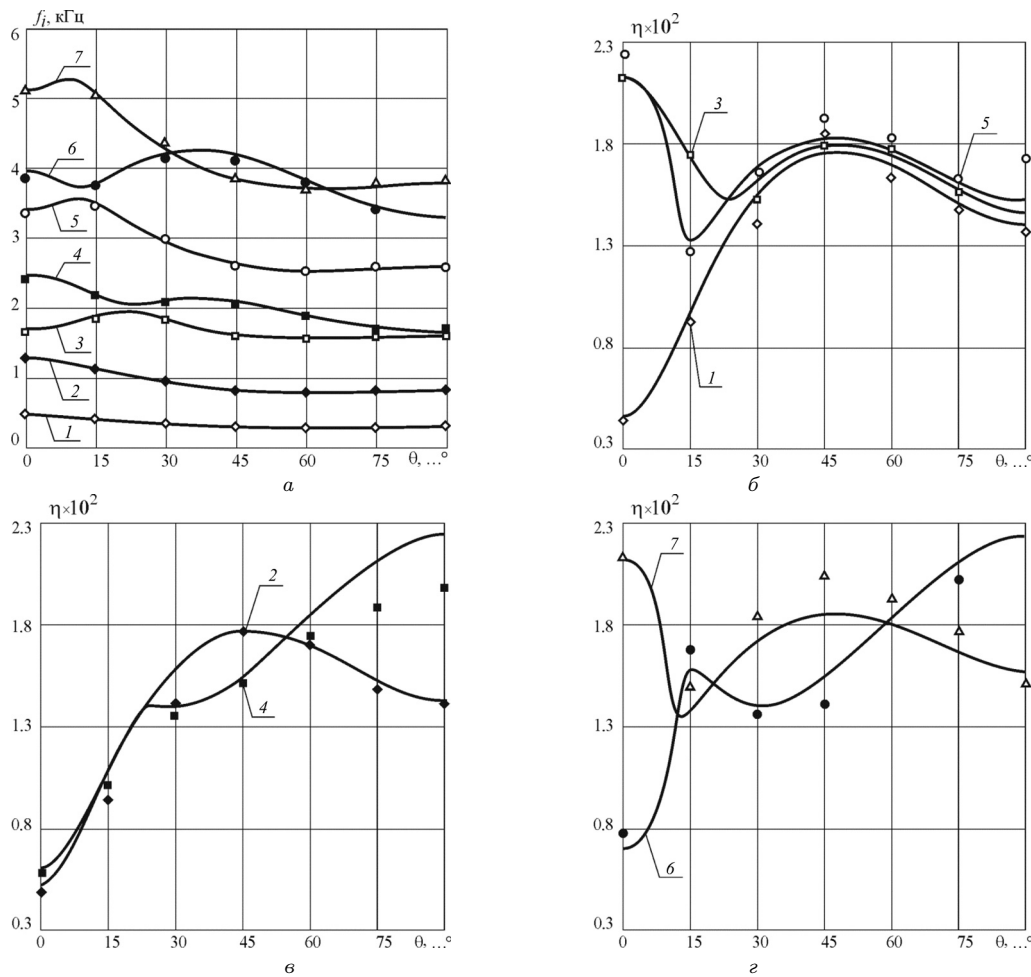


Рис. 2. Сопоставление расчетных и экспериментальных значений собственных частот (а), коэффициентов механических потерь низших тонов колебаний безопорной полосы (б-г).

4. Оценка достоверности математической модели изгибно-крутильных колебаний и предложенного метода численного решения дифференциальных уравнений (1) проводилась путем сопоставления расчетных и экспериментальных значений собственных частот и коэффициентов механических потерь низших тонов собственных колебаний безопорных полос. Полосы вырезались из пластины стеклопластика ( $a = 0.00976$  м,  $b = 0.02524$  м,  $l = 0.295$  м,  $\rho = 1650$  кг/м<sup>3</sup>), значения упруго-диссипативных характеристик которого определялись экспериментально.

При проведении как численных, так и экспериментальных исследований варьировался угол ориентации оси полосы относительно направления основы армирующей ткани  $\theta$ . На рис. 2 сплошными линиями представлены расчетные зависимости собственных частот  $f_{i\text{ cal}} = f_{i\text{ cal}}(\theta)$  и коэффициентов механических потерь  $\eta_{i\text{ cal}} = \eta_{i\text{ cal}}(\theta)$  ( $i = \overline{1, 7}$ ).

Точками обозначены аналогичные экспериментальные значения  $f_{i\text{ exp}} = f_{i\text{ exp}}(\theta)$ ,  $\eta_{i\text{ exp}} = \eta_{i\text{ exp}}(\theta)$  при  $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ . Сопоставление по-

лученных результатов позволяет отметить хорошее согласование расчетных и экспериментальных величин. Расхождения  $\Delta f_i = [(f_{i\text{ cal}}/f_{i\text{ exp}}) - 1] \cdot 100\%$  и  $\Delta \eta_i = [(\eta_{i\text{ cal}}/\eta_{i\text{ exp}}) - 1] \cdot 100\%$  не превышают значений  $|\Delta f_i| = 2.7\%$  и  $|\Delta \eta_i| = 19\%$  для всех рассмотренных тонов колебаний ( $i = \overline{1, 7}$ ) при  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ .

**5.** Численные исследования влияния углов ориентации армирующих волокон и длины стержня на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь проводились для безопорной и консольной моноклинных полос прямоугольного поперечного сечения ( $a = 0.005$  м,  $b = 0.02$  м) из однонаправленного углепластика ( $\rho = 1581.5$  кг/м<sup>3</sup>,  $\text{Re } E_1/\text{Re } E_2 \approx 38$ ). Моды колебаний идентифицировались по виду собственных форм.

Вначале на примере моноклинной полосы длиной  $l = 0.2$  м = const исследуем влияние угла ориентации армирующих волокон  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$  на параметры затухающих изгибно-крутильных колебаний. На рис. 3, 4 для низших тонов изгибно-крутильных колебаний безопорной и консольной моноклинных полос ( $i = \overline{1, 5}$ ) приведены графики зависимостей  $f_i = f_i(\theta)$  и  $\eta_i = \eta_i(\theta)$  (сплошные линии). На этих же рисунках нанесены графики зависимостей парциальных собственных частот и парциальных коэффициентов механических потерь изгибных колебаний  $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$ ,  $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_i(\theta)$  ( $i = \overline{1, 2, \dots}$  — точечные линии) и крутильных колебаний  $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ ,  $\tilde{\eta}_i = \tilde{\eta}_i(\theta)$  ( $i = \overline{1, 2, \dots}$  — штриховые линии) ортотропной полосы той же геометрии. Значения функций  $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$  и  $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_i(\theta)$  находились из решения уравнения (4), а значения функций  $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$  и  $\tilde{\eta}_i = \tilde{\eta}_i(\theta)$  — из решения уравнения (5).

Совместный анализ представленных на рис. 3 и 4 результатов позволяет заключить, что при  $\theta \geq 30^\circ$  собственные частоты и коэффициенты механических потерь связанных колебаний можно охарактеризовать как квазиизгибные (со слабо выраженными крутильными деформациями) или квазикрутильные (со слабо выраженными изгибными деформациями). При этом на отрезке  $\theta \in [30^\circ, 90^\circ]$  функции  $f_i = f_i(\theta)$ ,  $\eta_i = \eta_i(\theta)$  хорошо приближаются функциями  $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$ ,  $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_i(\theta)$  и  $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ ,  $\tilde{\eta}_i = \tilde{\eta}_i(\theta)$ .

Неклассические эффекты на полуоткрытом отрезке  $\theta \in (0^\circ, 30^\circ]$  обусловлены быстрым ростом значений функции  $|\mu_{x,xy}(\theta) \cdot \mu_{xy,x}(\theta)|$  в указанном диапазоне изменения аргумента  $\theta$ . Эти эффекты проявляются в возникновении областей взаимной трансформации собственных форм связанных мод колебаний.

Для безопорной полосы области взаимной трансформации возникают на отрезках с нечеткими границами  $[\theta_1, \theta_2]$ , условные центры которых находятся в точках пересечения зависимостей парциальных собственных частот изгибных и крутильных колебаний либо четных, либо нечетных тонов (рис. 3). В областях взаимной трансформации собственных форм связанных мод колебаний изгибно-крутильное взаимодействие наиболее заметно. Максимальный эффект (сильное взаимодействие) возникает при равенстве номеров тонов парциальных изгибных и крутильных колебаний.

Возвратимся к результатам численных исследований безопорной полосы (рис. 3). Отметим, что собственная форма первой моды связанных колебаний, при  $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$  идентифицируемая как первая квазиизгибная мода, вырождается в первую изгибную моду при  $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ , так как  $\mu_{x,xy}(0^\circ) \cdot \mu_{xy,x}(0^\circ) = \mu_{x,xy}(90^\circ) \cdot \mu_{xy,x}(90^\circ) = 0$ . Влияние кручения на изгиб на открытом отрезке  $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$  подтверждается отличием графиков функций  $f_1 = f_1(\theta)$ ,  $\eta_1 = \eta_1(\theta)$  (кривые 1 на рис. 3, а, б) и  $\bar{f}_1 = \bar{f}_1(\theta)$ ,  $\bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_1(\theta)$  (кривые  $\bar{1}$  на рис. 3, а, б).

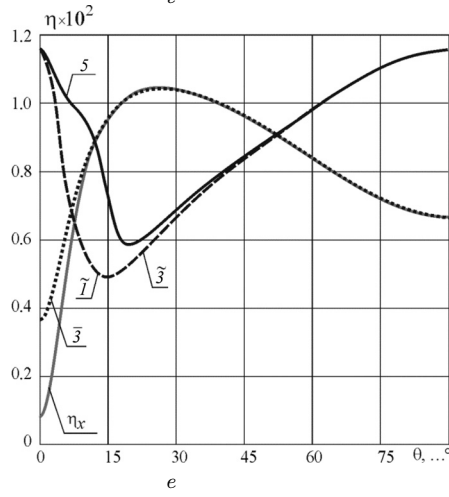
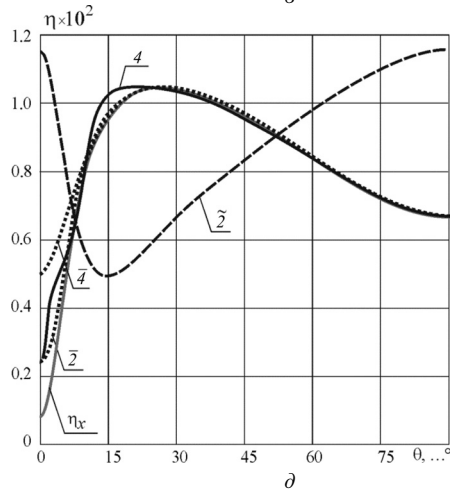
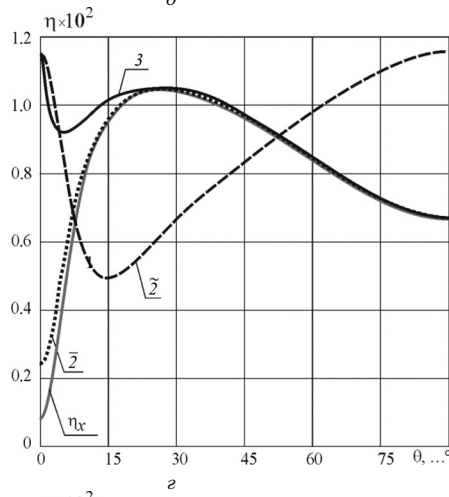
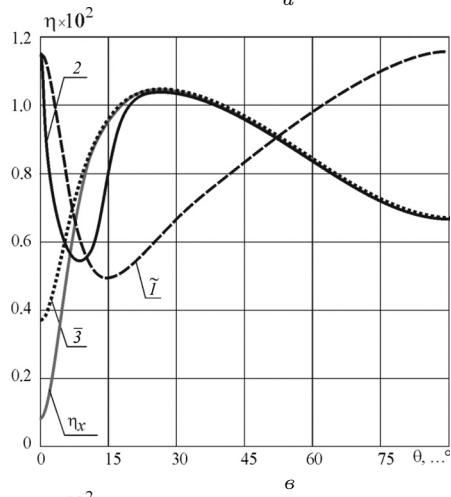
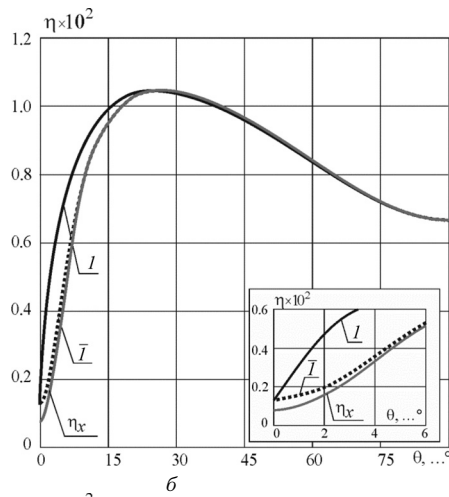
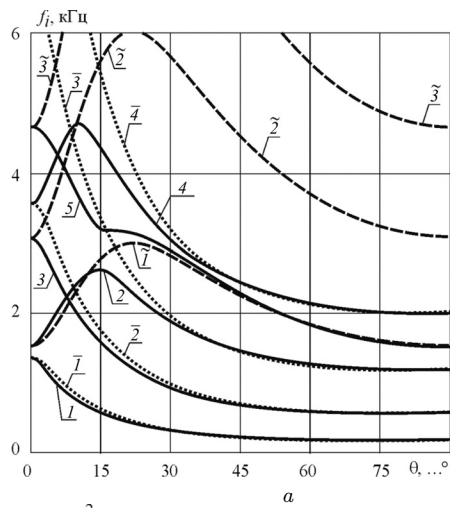


Рис. 3. Зависимости собственных частот (а), коэффициентов механических потерь безопорной моноклиной полосы (б–е) от угла  $\theta$ .

С повышением тона колебаний возникают взаимные трансформации собственных форм связанных мод. Об этом свидетельствует появление точек пересечения графиков функций  $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$  и  $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$  (кривые  $\bar{2}$ ,  $\tilde{2}$  и  $\bar{3}$ ,  $\tilde{3}$ ; кривые  $\bar{4}$ ,  $\tilde{4}$  и  $\bar{5}$ ,  $\tilde{5}$  на рис. 3, а) внутри областей, ограничиваемых функциями  $f_m = f_m(\theta)$  и  $f_n = f_n(\theta)$  (кривые 3, 4 и 2, 5 на рис. 3, а).

Пересечение графиков функций  $\bar{f}_2 = \bar{f}_2(\theta)$  и  $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_2(\theta)$  в точке  $\theta \approx 4^\circ$  свидетельствует о том, что на примыкающем к ней отрезке с нечеткими границами по оси  $\theta$  в результате сильного взаимодействия начинается взаимная трансформация собственных форм третьей и четвертой связанных мод изгибно-крутильных колебаний. Поэтому при  $\theta > 4^\circ$  собственная форма третьей связанной моды трансформируется в собственную форму четвертой связанной моды, а собственная форма четвертой связанной моды — в собственную форму третьей связанной моды. На отрезке с условным центром в точке  $\theta \approx 15^\circ$  процесс взаимной трансформации собственных форм третьей и четвертой мод дополняется процессом взаимной трансформации собственных форм четвертой и седьмой (не изображена на рис. 3, а) мод связанных колебаний. Это подтверждается пересечением графиков функций  $\bar{f}_4 = \bar{f}_4(\theta)$  и  $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_2(\theta)$  в точке  $\theta \approx 15^\circ$ . Следовательно, при  $\theta > 15^\circ$  собственная форма четвертой связанной моды трансформируется в собственную форму седьмой связанной моды. Процесс взаимных трансформаций окончательно завершается при  $\theta = 90^\circ$ . Поэтому собственная форма четвертой моды связанных колебаний при  $\theta = 0^\circ$  тождественна собственной форме третьей моды связанных колебаний при  $\theta = 90^\circ$  (вторая изгибная). Следствием двух взаимных трансформаций на отрезке  $\theta \in [0^\circ, 30^\circ]$  является тождественность собственной формы седьмой моды связанных колебаний при  $\theta = 0^\circ$  собственной форме четвертой моды связанных колебаний при  $\theta = 90^\circ$  (четвертая изгибная).

Аналогичным образом на отрезке с условным центром в точке  $\theta \approx 7^\circ$  возникает сильное взаимодействие между пятой и шестой связанными модами колебаний, подтвержденное пересечением графиков функций  $\bar{f}_3 = \bar{f}_3(\theta)$  и  $\tilde{f}_3 = \tilde{f}_3(\theta)$  в точке  $\theta \approx 4^\circ$ . Указанное изгибно-крутильное взаимодействие порождает взаимную трансформацию связанных мод колебаний. По мере увеличения угла  $\theta$  на отрезке с условным центром в точке  $\theta \approx 18^\circ$  происходит взаимная трансформация собственных форм второй и пятой связанных мод изгибно-крутильных колебаний. Поэтому при  $\theta > 18^\circ$  собственная форма второй связанной моды трансформируется в собственную форму пятой связанной моды, а собственная форма пятой связанной моды — в собственную форму второй связанной моды. В результате описанных взаимных трансформаций собственная форма второй моды связанных колебаний при  $\theta = 0^\circ$  тождественна собственной форме пятой моды связанных колебаний при  $\theta = 90^\circ$  (первая крутильная). В свою очередь, собственная форма шестой моды связанных колебаний при  $\theta = 0^\circ$  тождественна собственной форме второй моды связанных колебаний при  $\theta = 90^\circ$  (третья изгибная).

Очевидно, что помимо влияния на характер изменения функций  $f_i = f_i(\theta)$  взаимные трансформации собственных форм связанных мод изгибно-крутильных колебаний будут влиять и на характер изменения функций  $\eta_i = \eta_i(\theta)$ .

Из анализа представленных на рис. 3, в–е зависимостей можно заключить, что вне областей взаимных трансформаций собственных форм коэффициенты механических потерь связанных мод колебаний удовлетворительно приближаются коэффициентами механических потерь соответствующих парциальных мод колебаний. В областях взаимных трансформаций собственных форм коэффициенты механиче-



ских потерь парциальных мод колебаний даже качественно не описывают коэффициенты механических потерь связанных мод колебаний. В частности, на отрезке  $\theta \in [0^\circ, 7^\circ]$  функция  $\eta_2 = \eta_2(\theta)$  хорошо приближается функцией  $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_1(\theta)$ , а на отрезке  $\theta \in [20^\circ, 90^\circ]$  — функцией  $\tilde{\eta}_3 = \tilde{\eta}_3(\theta)$  (кривые 2, 3,  $\tilde{1}$  на рис. 3, е). В то же время в области взаимной трансформации собственных форм второй и пятой связанных мод изгибно-крутильных колебаний ( $\theta \in [7^\circ, 20^\circ]$ ) расхождения между функциями  $\eta_2 = \eta_2(\theta)$  и  $\tilde{\eta}_3 = \tilde{\eta}_3(\theta)$ ,  $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_1(\theta)$  существенно возрастают.

Из приведенных на рис. 3, б–е графиков функций  $\eta_i = \eta_i(\theta)$  следует, что  $\bar{\eta}_4(0^\circ) > \bar{\eta}_3(0^\circ) > \bar{\eta}_2(0^\circ) > \bar{\eta}_1(0^\circ) > \eta_x(0^\circ) = \eta_1$ . Этот результат обусловлен возрастающим влиянием деформаций поперечного сдвига на величины  $f_i = f_i(0^\circ)$  и  $\eta_i = \eta_i(0^\circ)$  с повышением тона колебаний, поскольку на отрезке  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$  отношение  $E_x(0^\circ)/G_{xz}(0^\circ) = E_1/G_{13}$  максимально велико. Максимальные значения функций  $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_i(\theta)$  достигаются на отрезке  $\theta \in [25^\circ, 30^\circ]$ , на котором в потенциальной энергии деформации доминирует составляющая, отвечающая за сдвиг в плоскости армирования, т. е. влияние вязкоупругой матрицы на диссипацию энергии максимально велико. Глобальный минимум функций  $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_i(\theta)$  достигается при  $\theta = 0^\circ$ , так как в этом случае потенциальная энергия деформации стержня в наибольшей мере определяется потенциальной энергией деформации упругих армирующих волокон. Максимумы функций  $\tilde{\eta}_i = \tilde{\eta}_i(\theta)$  при  $\theta = 0^\circ, 90^\circ$  также обусловлены доминирующим влиянием сдвига в плоскости армирования (вязкоупругой матрицы) в потенциальной энергии деформации стержня.

Перейдем к анализу результатов численных исследований консольной моноклинной полосы. Сразу отметим, что в отличие от безопорной полосы у консольной полосы области взаимной трансформации собственных форм связанных мод колебаний возникают на отрезках с условными центрами в точках пересечения зависимостей парциальных изгибных и парциальных крутильных собственных частот как четных, так и нечетных тонов колебаний (рис. 4). Это отличие порождается изменением граничных условий, симметричных для безопорной полосы и несимметричных для консольной полосы.

Из приведенных на рис. 4 зависимостей следует, что при всех  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$  первая мода связанных колебаний консольной моноклинной полосы является квазиизгибной, вырождающейся в первую изгибную моду при  $\theta = 0^\circ, 90^\circ$  (кривые 1,  $\tilde{1}$  на рис. 4).

Вторая мода, при  $\theta = 0^\circ$  идентифицируемая как первая крутильная, с ростом  $\theta$  ( $\theta > 0^\circ$ ) трансформируется в первую квазикрутильную моду. Пересечение графиков функций  $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_2(\theta)$  и  $f_1 = \tilde{f}_1(\theta)$  (кривые  $\tilde{1}$ , 2 на рис. 4) в точке  $\theta \approx 7^\circ$  свидетельствует о том, что на примыкающем к ней отрезке в результате взаимодействия начинается взаимная трансформация собственных форм второй (первой квазикрутильной) и третьей (второй квазиизгибной) связанных мод изгибно-крутильных колебаний. Поэтому при  $\theta > 7^\circ$  собственная форма второй связанной моды трансформируется в собственную форму третьей связанной моды (вторую квазиизгибную), а собственная форма третьей связанной моды — в собственную форму второй (первой квазикрутильной) связанной моды. Таким образом, при  $\theta > 7^\circ$  вторая связанная мода идентифицируется как вторая квазиизгибная мода, вырождающаяся во вторую изгибную моду колебаний при  $\theta = 90^\circ$ . На отрезке с условным центром в точке  $\theta \approx 19^\circ$  процесс взаимной трансформации собственных форм второй и третьей мод дополняется процессом взаимной трансформации собственных форм третьей (первой квазикрутильной) и четвертой (третьей квазиизгибной) мод связанных колеба-

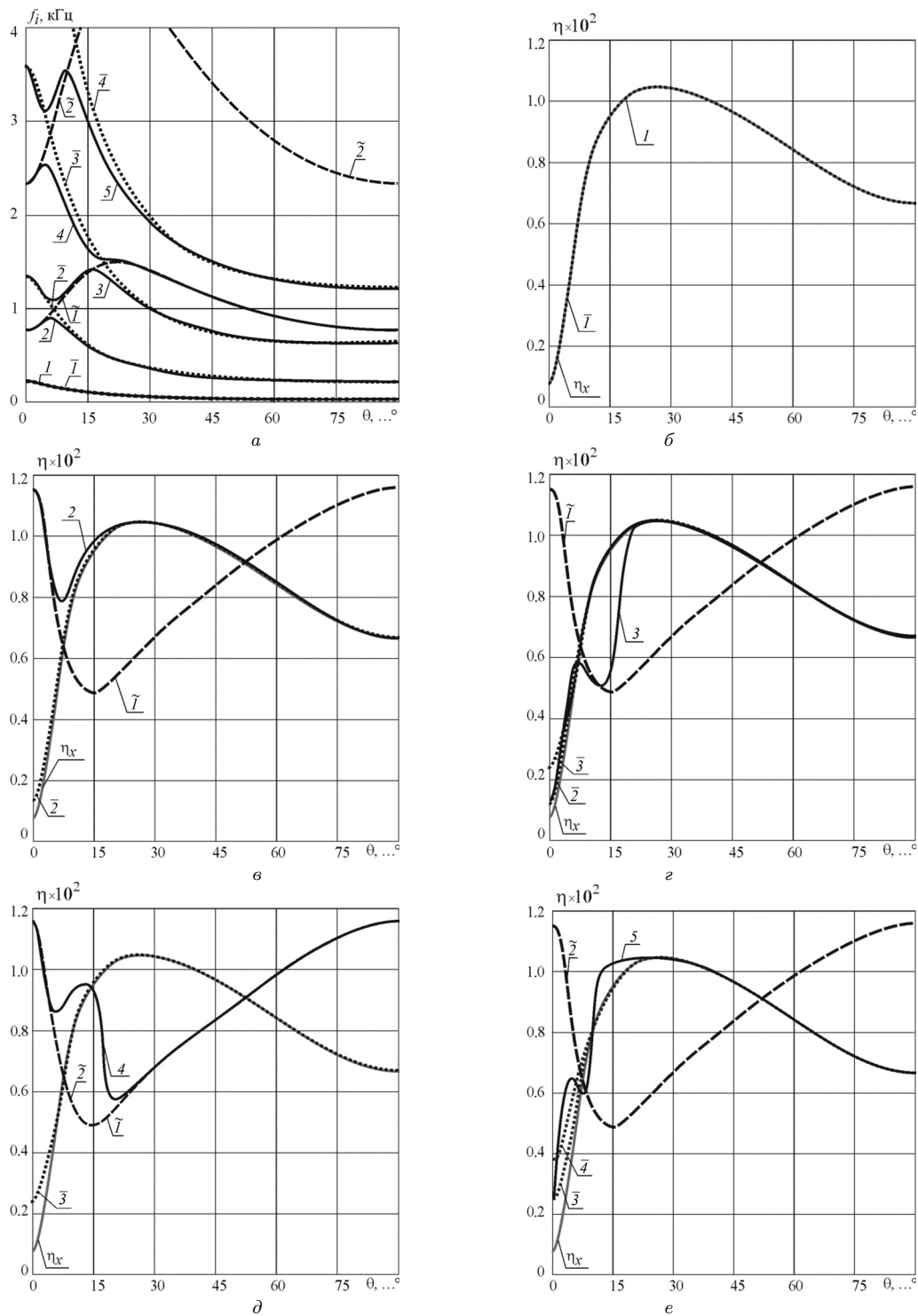


Рис. 4. Зависимости собственных частот (а), коэффициентов механических потерь консольной моноклиной полосы (б-е) от угла  $\theta$ .

ний. Это подтверждается пересечением графиков функций  $\bar{f}_3 = \bar{f}_3(\theta)$  и  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_1(\theta)$  в точке  $\theta \approx 19^\circ$ . Следовательно, при  $\theta > 19^\circ$  собственная форма третьей связанной моды трансформируется в собственную форму четвертой связанной моды — третью квазиизгибную, вырождающуюся в третью изгибную моду колебаний при  $\theta = 90^\circ$ . Аналогичная картина наблюдается и для более высоких тонов колебаний.

**6.** Влияние длины полосы на параметры ее затухающих колебаний изучалось на примере моноклинной безопорной полосы, армирующие волокна которой ориентированы под углом  $\theta = 15^\circ$  относительно оси  $x$ . При проведении численных экспериментов длина полосы варьировалась в диапазоне  $l \in [0.05, 0.40]$  м. Полученные результаты приведены на рис. 5. Поскольку парциальные собственные частоты изгибных и крутильных колебаний обратно пропорциональны различным степеням длины полосы ( $f_i \sim l^{-2}$ ,  $\tilde{f}_i \sim l^{-1}$ ), то для наглядности зависимости собственных частот от длины полосы представлены в системе координат  $\lg f_i = \lg f_i(\lg l)$ . В этой системе координат парциальные собственные частоты изгибных и крутильных колебаний характеризуются двумя семействами кривых, отличающихся скоростью изменения (наклоном) функции при изменении ее аргумента (рис. 5, а).

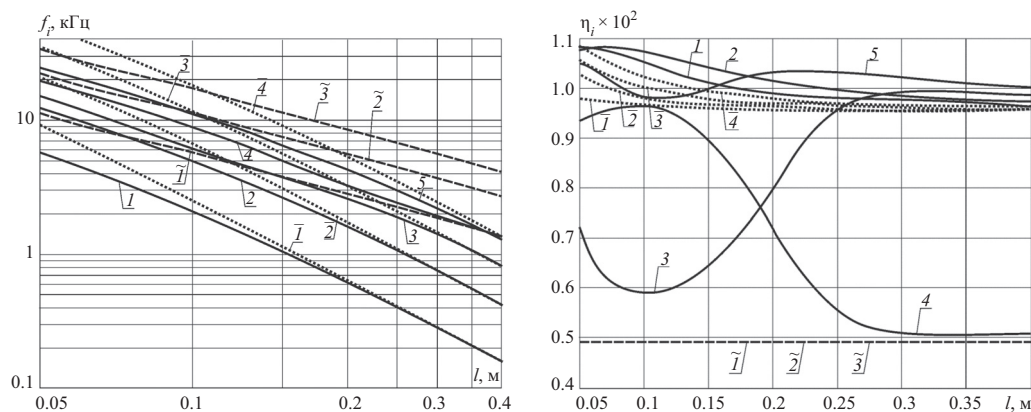


Рис. 5. Зависимости собственных частот (а) и коэффициентов механических потерь низших тонов изгибно-крутильных колебаний безопорной моноклинной полосы при  $\theta = 15^\circ$  (б) от длины  $l$ .

Анализ представленных на рис. 5 результатов позволяет заключить, что при достаточно больших значениях длины полосы ( $l = 0.4$  м) собственные формы связанных колебаний можно охарактеризовать как квазиизгибные (со слабо выраженными крутильными деформациями) или как квазикрутильные. Причем собственные формы первого, второго, третьего и пятого тонов соответствуют первой, второй третьей и четвертой квазиизгибным модам колебаний, а собственная форма четвертого тона — первой квазикрутильной моде колебаний. Собственные частоты  $f_i = f_i(0.4 \text{ м})$  и коэффициенты механических потерь  $\eta_i = \eta_i(0.4 \text{ м})$  связанных мод колебаний хорошо приближаются соответствующими парциальными собственными частотами  $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(0.4 \text{ м})$ ,  $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(0.4 \text{ м})$  и парциальными коэффициентами механических потерь  $\tilde{\eta}_i = \tilde{\eta}_i(0.4 \text{ м})$ ,  $\tilde{\eta}_i = \tilde{\eta}_i(0.4 \text{ м})$ . При уменьшении длины стержня различия между величинами  $f_i = f_i(l)$  и  $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(l)$ ,  $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(l)$ , а также  $\eta_i = \eta_i(l)$  и  $\tilde{\eta}_i = \tilde{\eta}_i(l)$ ,  $\tilde{\eta}_i = \tilde{\eta}_i(l)$  возрастают, и при  $l = 0.1$  м собственные формы всех пяти тонов колебаний идентифицируются как связанные изгибно-крутильные. Кроме того, на отрезке с нечеткими границами, условный центр которого находится в точке  $l = 0.24$  м,

происходит взаимная трансформация собственных форм третьей и четвертой связанных мод изгибно-крутильных колебаний. Поэтому при  $l < 0.24$  м собственная форма третьей связанной моды трансформируется в собственную форму четвертой связанной моды, а собственная форма четвертой связанной моды — в собственную форму третьей связанной моды.

## Литература

1. Daynes S., Weaver P. M. Review Stiffness tailoring using prestress in adaptive composite structures. *Composite Structures* **106**, 282–287 (2013).
2. Georghiades G. A., Banerjee J. R. A parametric investigation into the flutter characteristics of composite wings. *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 37th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. A Collection of Technical Papers. Part 1*. April 15–17, 1996, 300–310 (1996).
3. Hayat K., de Lecea A. G. M., Moriones C. D., Ha S. K. Flutter performance of bend-twist coupled large-scale wind turbine blades. *Journal of Sound and Vibration* **370**, 149–162 (2016).
4. Li W., Zhou H., Liu H., Lin Y., Xu Q. Review on the blade design technologies of tidal current turbine. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* **63**, 414–422 (2016).
5. Azzam A., Li W. Theoretical and experimental methods on bend-twist coupling and damping properties with the relationship to lay-up of the composite propeller marine: A review. *International Journal of Engineering Science and Technology* **4** (6), 2907–2917 (2012).
6. Maljaars P. J., Kaminski M. L. Hydro-elastic analysis of flexible propellers: An overview. *Fourth International Symposium on Marine Propulsors*. Austin (Texas, USA) (2015).
7. Рябов В. М., Ярцев Б. А. Итерационный метод определения упругих и диссипативных характеристик полимерных композиционных материалов. Часть I. Теоретические основы. *Вопросы материаловедения*, вып. 2 (22), 55–61 (2000).
8. Рябов В. М., Ярцев Б. А. Итерационный метод определения упругих и диссипативных характеристик полимерных композиционных материалов. Часть II. Минимизация экспериментальных погрешностей. *Вопросы материаловедения*, вып. 2 (22), 61–70 (2000).
9. Рябов В. М., Ярцев Б. А. Итерационный метод определения упругих и диссипативных характеристик полимерных композиционных материалов. Часть III. Экспериментальная проверка. *Вопросы материаловедения*, вып. 2 (22), 70–76 (2000).
10. Abarcar R. B., Cuniff P. E. The vibration of cantilever beams of fibre reinforced material. *Journal of Composite Materials* **6** (10), 504–517 (1972).
11. Ritchie I. G., Rosinger H. E., Fleury W. H. The dynamic elastic behavior of a fibrereinforced composite sheet: II. The transfer matrix calculation of the resonant frequencies and vibration shapes. *Journal of Physics D: Applied Physics* **8** (15), 1750–1786 (1975).
12. Miller A. K., Adams D. F. An analytic means of determining the flexural and torsional resonant frequencies of generally orthotropic beams. *Journal of Sound Vibration* **41**, 433–449 (1975).
13. Suresh J. K., Venkatesan C. Structural dynamic analysis of composite beams. *Journal of Sound Vibration* **143**, 503–519 (1990).
14. Li J., Wang S., Li X., Kong X., Wu W. Modeling the coupled bending-torsional vibrations of symmetric laminated composite beams. *Archive Applied Mechanics* **85**, 991–1007 (2015).
15. Тимошенко С. П. К учету сдвига в дифференциальном уравнении поперечных колебаний призматических стержней. В: *Статические и динамические проблемы теории упругости*, 56–57. Киев, Наукова Думка (1975).
16. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig, Berlin, Teubner (1928).
17. Лехницкий С. Г. *Теория упругости анизотропного тела*. Москва, Наука (1977).
18. Мейз Дж. *Теория и задачи механики сплошных сред*, пер. с англ. Москва, Либроком (2010).
19. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. Москва, Мир (1974).
20. Березин И. С., Жидков Н. П. *Методы вычислений*. Т. 2. Москва, Физматлит (1962).

Статья поступила в редакцию 27 января 2021 г.;  
после доработки 5 мая 2021 г.;  
рекомендована в печать 17 июня 2021 г.

Контактная информация:

Рябов Виктор Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.ryabov@spbu.ru

Ярцев Борис Александрович — д-р техн. наук; boris\_yar@mail.ru

## Nonclassical vibrations of a monoclinic composite strip

V. M. Ryabov<sup>1</sup>, B. A. Yartsev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

<sup>2</sup> Krylov State Research Center, 44, Moskovskoye shosse, St. Petersburg, 196158, Russian Federation

**For citation:** Ryabov V. M., Yartsev B. A. Nonclassical vibrations of a monoclinic composite strip. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2021, vol. 8 (66), issue 4, pp. 695–708. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.415> (In Russian)

A mathematical model of damped flexural-torsional vibrations of monoclinic composite strip of constant length rectangular cross section is proposed. The model is based on the refined bending theory Timoshenko beams, the theory of generalized Voigt—Lekhnitskii torsion and the elastic-viscoelastic correspondence principle in the linear theory of viscoelasticity. A two-stage method for solving a coupled system of differential equations is developed. First, using the Laplace transform in spatial variable, real natural frequencies and natural forms are found. To determine the complex natural frequencies of the strip in found real values are used as their initial values of natural frequencies, and then the complex frequencies are calculated by the method iterations of the third order. An assessment of the reliability of the mathematical model and method of numerical solution, performed by comparing calculated and experimental values of natural frequencies and loss factors is given. The results of a numerical study of the effect angles of orientation of reinforcing fibers and lengths by the values of natural frequencies and loss factors for free-free and cantilever monoclinic stripes are discussed. It is shown that for the free-free strip the region of mutual transformation eigenmodes of coupled vibration modes arise for quasi-bending and quasi-twisting vibrations of either even or odd tones. In the console strip of the region of mutual transformation of eigenforms of coupled modes vibrations occur for both even and odd tones.

*Keywords:* composite, monoclinic strip, coupled vibrations, natural frequency, loss factor.

## References

1. Daynes S., Weaver P. M. Review Stiffness tailoring using prestress in adaptive composite structures. *Composite Structures* **106**, 282–287 (2013).
2. Georghiades G. A., Banerjee J. R. A parametric investigation into the flutter characteristics of composite wings. *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 37th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. A Collection of Technical Papers*. Part 1. April 15–17, 1996, 300–310 (1996).
3. Hayat K., de Lecea A. G. M., Moriones C. D., Ha S. K. Flutter performance of bend-twist coupled large-scale wind turbine blades. *Journal of Sound and Vibration* **370**, 149–162 (2016).
4. Li W., Zhou H., Liu H., Lin Y., Xu Q. Review on the blade design technologies of tidal current turbine. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* **63**, 414–422 (2016).
5. Azzam A., Li W. Theoretical and experimental methods on bend-twist coupling and damping properties with the relationship to lay-up of the composite propeller marine: A review. *International Journal of Engineering Science and Technology* **4** (6), 2907–2917 (2012).
6. Maljaars P. J., Kaminski M. L. Hydro-elastic analysis of flexible propellers: An overview. *Fourth International Symposium on Marine Propulsors*. Austin (Texas, USA) (2015).

7. Ryabov V. M., Yartsev B. A. An iterative method for determining elastic and dissipative characteristics of polymer composite materials. Part I. Theoretical foundations. *Problems of materials science*, iss. 2 (22), 55–61 (2000). (In Russian)
8. Ryabov V. M., Yartsev B. A. An iterative method for determining elastic and dissipative characteristics of polymer composite materials. Part II. Minimization of experimental errors. *Problems of materials science*, iss. 2 (22), 61–70 (2000). (In Russian)
9. Ryabov V. M., Yartsev B. A. An iterative method for determining elastic and dissipative characteristics of polymer composite materials. Part III. Experimental verification. *Problems of materials science*, iss. 2 (22), 70–78 (2000). (In Russian)
10. Abarcar R. B., Cuniff P. E. The vibration of cantilever beams of fibre reinforced material. *Journal of Composite Materials* **6** (10), 504–517 (1972).
11. Ritchie I. G., Rosinger H. E., Fleury W. H. The dynamic elastic behavior of a fibereinforced composite sheet: II. The transfer matrix calculation of the resonant frequencies and vibration shapes. *Journal of Physics D: Applied Physics* **8** (15), 1750–1786 (1975).
12. Miller A. K., Adams D. F. An analytic means of determining the flexural and torsional resonant frequencies of generally orthotropic beams. *Journal of Sound Vibration* **41**, 433–449 (1975).
13. Suresh J. K., Venkatesan C. Structural dynamic analysis of composite beams. *Journal of Sound Vibration* **143**, 503–519 (1990).
14. Li J., Wang S., Li X., Kong X., Wu W. Modeling the coupled bending-torsional vibrations of symmetric laminated composite beams. *Archive Applied Mechanics* **85**, 991–1007 (2015).
15. Timoshenko S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. In: *Static and dynamic problems of elasticity theory*, 56–57. Kiev, Naukova Dumka Publ. (1975). (In Russian)
16. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig, Berlin, Teubner (1928).
17. Lekhnitskii S. G. *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Moscow, Mir Publ. (1981). (In Russian)
18. Mase G. E. *Theory and problems of continuum mechanics*. In Ser.: Schaum's Outline Series. New York, McGraw-Hill Book Company (1970). [Russ. ed.: Mase G. E. *Teoriia i zadachi mekhaniki sploshnykh sred*. Moscow, Librokom Publ. (2010)].
19. Christensen R. M. *Vvedenie v teoriyu viazkouprugosti*. Moscow, Mir Publ. (1974). (In Russian) [Engl. transl.: Christensen R. M. *Theory of viscoelasticity*. New York, Academic Press (1971)].
20. Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Methods of computations*. Vol. 2. Moscow, Fizmatlitz Publ. (In Russian)

Received: January 27, 2021

Revised: May 5, 2021

Accepted: June 17, 2021

#### Authors' information:

Victor M. Ryabov — v.ryabov@spbu.ru

Boris A. Yartsev — boris\_yar@mail.ru