УДК 539.3 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3
MSC 31A10, 45M05

Об интегральных уравнениях трещин нового типа*

В. А. Бабешко[1,2], *О. В. Евдокимова*[1], *О. М. Бабешко*[2]

[1] Южный научный центр РАН,
Российская Федерация, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Чехова, 41
[2] Кубанский государственный университет,
Российская Федерация, 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Для цитирования: *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Об интегральных уравнениях трещин нового типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 405–416.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.302

В работе впервые развивается метод моделирования трещин нового типа, позволяющий описывать их в средах сложных реологий. В его основе лежит ранее опубликованный авторами новый универсальный метод моделирования, применяемый в граничных задачах для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Достоинством метода является возможность ухода от необходимости решения сложных граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных путем замены их на отдельные дифференциальные уравнения, среди которых самыми простыми являются уравнения Гельмгольца. Именно с помощью комбинаций решений граничных задач для этого уравнения можно описывать поведение сложных решений многокомпонентных граничных задач. В настоящей работе впервые метод применяется к смешанной граничной задаче для трещин нового типа. Трещины нового типа, дополняющие трещины Гриффитса, были обнаружены при изучении разломов литосферных плит, сближающихся торцами при встречном движении по границе Конрада. В качестве моделей литосферных плит в исследовании были приняты плиты Кирхгофа. Развиваемый в публикуемой статье метод нацелен на возможность описания моделей сближающихся объектов, подобных литосферным плитам, в виде деформируемых плит более сложных реологий. В частности, это могут быть термоэлектроупругие плиты или плиты иной реологии. При решении задач с применением моделей Кирхгофа для литосферных плит возникала проблема вычисления некоторых функционалов, нуждавшихся в определении. В настоящем методе демонстрируется подход, устраняющий этот недостаток. Даны вывод интегральных уравнений трещин нового типа, способ их решения и подход к применению в более сложных реологиях.

Ключевые слова: блочный элемент, факторизация, интегральные уравнения, внешние формы, трещины нового типа.

1. Введение. Хорошо известно, что трещины, поверхностные и внутренние, в изделиях инженерной практики требуют огромного внимания. Вопросы прочности и разрушения оборудования, продукции машиностроительных предприятий, объектов строительства напрямую связаны с состоянием микротрещин, как правило, возникающих в изделиях даже на этапе завершения их изготовления и способных

*Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки на 2022 г. (проект FZEN-2020-0020), при поддержке Южного научного центра РАН (проект 00-20-13, № госрегистрации 122020100341-0) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014).

к развитию при неблагоприятных условиях. Поэтому вопросам теоретического и экспериментального исследований поведения трещин посвящено огромное количество работ. Основоположник теории трещин, Гриффитс, смог построить ее такой, что на протяжении более сотни лет его модель остается единственным безотказным средством применения во всех случаях, когда начинается процесс хрупкого разрушения материалов [1]. Однако разнообразие и богатство типов дефектов оказалось настолько большим, что практически к каждому типу полостных дефектов понадобилось строить теорию, описывающую его поведение, но опирающуюся на основной критерий разрушения — концентрацию напряжений в вершине трещины. Примеры самых разных направлений исследований и подходов опубликованы в работах [1–21]. Среди них особое место занимают работы, связанные с привлечением к исследованию математических средств высокого уровня, позволяющих не только получить углубленные результаты процессов разрушения, но и охватить широкий круг проблем теории трещин. По мнению авторов, ведущее место в этой области занимают исследования академика Н. Ф. Морозова, на годы определившего направление исследований, сформировавшего новое научное направление углубленного математического изучения трещин [15] и значительно опередившего других авторов в этой области [2, 20, 21] в теории разрушения. Именно его исследования послужили авторам статьи основанием осмыслить строгие математические результаты, полученные в сейсмологии при анализе разломов, сформировавшихся сблизившимися торцами литосферных плит [22, 23]. Разломы оказались подобными трещинам Гриффитса, и даже были попытки увязки их с разломами литосферных плит, но позже выяснилось, что они разрушаются по иному закону. Трещины Гриффитса имеют вершину, описываемую гладкой кривой, формируемой эллиптической полостью в пластине, сжатой с боков [24]. Разломы литосферных плит возникают, если такая полость является прямоугольником, сжатым с боков с кусочно-гладкой границей. Разрушение трещин Гриффитса происходит в связи с разрывом гладкой поверхности в вершине трещины. Разрушение разломов связано с сингулярными концентрациями контактных напряжений в зоне сблизившихся литосферных плит, вызывая стартовое землетрясение [22, 23]. Имеющиеся примеры подвижек поверхности Земли в зоне эпицентров произошедших землетрясений качественно совпадают с расчетными [23]. Всякие попытки численного исследования проблемы приводили к свидетельству роста концентрации напряжений в зоне сближения литосферных плит. Однако только строгий математический анализ проблемы показал, что уровень концентрации напряжений в этой зоне сингулярный и приводит к землетрясениям. Здесь еще раз следует упомянуть вклад Н. Ф. Морозова в осознание необходимости применения строгих математических подходов, наряду с экспериментальными, там, где это удается сделать в теории разрушения.

Все это дало основание принять формируемые литосферными плитами разломы как трещины нового типа [24]. Примеры возникновения подобных трещин дают вертикально треснувшие фундаменты, которые, как известно, приводят к разрушению строения.

Такие трещины возможны в многослойной плите, когда при изгибе один из слоев приобретает сквозную вертикальную полость. Механизм разрушения трещин нового типа демонстрируют обыкновенные ножницы, эффективность которых тем выше, чем сильнее прижаты их концы друг к другу. В работах [22, 23] в качестве моделей литосферных плит принимались плиты Кирхгофа. Естественен вопрос, как поведут контактные напряжения, если вместо литосферных плит Кирхгофа будут плиты из материалов иных реологий, описываемых, например, системами дифференциальных уравнений в частных производных. Попытки решения этой проблемы приводили к достаточно сложным и трудно анализируемым соотношениям. Доступные для анализа модели описывались лишь антиплоскими задачами, что не давало ответ на оговоренный вопрос [25]. Для преодоления этих проблем авторами разработан новый, универсальный, применимый как к дифференциальным, так и к некоторым интегральным уравнениям метод, опирающийся на теорию блочных элементов [26]. Этот подход используется в настоящей статье для формирования интегральных уравнений трещин нового типа, необходимых для их исследования в материалах иных реологий.

2. Постановка задачи. В работе [26] и предшествующих статьях авторов предложен и реализован для ряда областей метод разложения решений граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных по решениям более простых граничных задач отдельных уравнений. В основе метода лежит преобразование Галёркина, которое ранее в теоретических исследованиях применялось при решении задач во всем пространстве. Отмечено, что наиболее удобными для этих целей являются граничные задачи для уравнений Гельмгольца. Именно этот подход положен в основу построения интегральных уравнений трещин нового типа. Строятся интегральные уравнения граничной задачи для уравнения Гельмгольца, затем комбинацией этих решений будут описываться уравнения для сред иных реологий.

Рассматривается многослойная линейно деформируемая среда, находящаяся в условиях вибрации, описываемой функцией $e^{-i\omega t}$. Считая, что внешние воздействия на многослойную среду осуществляются с такой же временной функцией, исключая ее из уравнений и граничных условий, приходим к стационарной граничной задаче. На ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось Ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси Ox_1, Ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в областях $\Omega_{-A}(-\infty \leqslant x_1 \leqslant -A,\ |x_2| \leqslant \infty)$ и $\Omega_A(A \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty)$ находится объект, описываемый граничной задачей для дифференциальных уравнений Гельмгольца:

$$\begin{gathered}
\left[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2\right] \varphi_{-A}(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\
\Omega_{-A}(-\infty \leqslant x_1 \leqslant -A,\ |x_2| \leqslant \infty), \\
\left[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2\right] \varphi_{A}(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2), \\
\Omega_{A}(A \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty)
\end{gathered} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\varphi_{-A}(x_1, x_2) = \varphi(-A, x_2), \quad x_1 \to -A,$$

$$\varphi_{A}(x_1, x_2) = \varphi(A, x_2), \quad x_1 \to A.$$

Применив в уравнениях (1) преобразование Фурье по координате x_2

$$\varphi(x_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) e^{i\alpha_2 x_2}\, dx_2,$$

приходим к упрощенной одномерной граничной задаче с параметром α_2:

$$
\begin{gathered}
(\partial^2 x_1 + k^2)\varphi_{-A}(x_1,\alpha_2) = g_{-A}(x_1,\alpha_2), \quad \Omega_{-A}(-\infty \leqslant x_1 \leqslant -A), \quad k^2 = p^2 - \alpha_2^2, \\
(\partial^2 x_1 + k^2)\varphi_{A}(x_1,\alpha_2) = g_{A}(x_1,\alpha_2), \quad \Omega_{A}(A \leqslant x_1 \leqslant \infty), \\
g_{-A}(x_1,\alpha_2) = q_{-A}(x_1,\alpha_2) - t_{-A}(x_1,\alpha_2), \quad g_{A}(x_1,\alpha_2) = q_{A}(x_1,\alpha_2) - t_{A}(x_1,\alpha_2), \\
\varphi(x_1) = \varphi(x_1,\alpha_2), \quad \varphi(x_1,\alpha_2) = \varphi(\pm A,\alpha_2), \quad x_1 \to \pm A, \\
\varphi_{-A}(x_1,\alpha_2) = \varphi(-A,\alpha_2), \quad x_1 \to -A, \quad \varphi_{A}(x_1,\alpha_2) = \varphi(A,\alpha_2), \quad x_1 \to A.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Параметр α_2 в дальнейшем опускается, и возврат к нему произойдет по формулам (2) после решения следующей одномерной граничной задачи:

$$
\begin{gathered}
(\partial^2 x_1 + k^2)\varphi_{-A}(x_1,) = g_{-A}(x_1), \quad \Omega_{-A}(-\infty \leqslant x_1 \leqslant -A), \quad k^2 = p^2 - \alpha_2^2, \\
(\partial^2 x_1 + k^2)\varphi_{A}(x_1) = g_{A}(x_1), \quad \Omega_{A}(A \leqslant x_1 \leqslant \infty), \\
g_{-A}(x_1) = q_{-A}(x_1) - t_{-A}(x_1), \quad g_{A}(x_1) = q_{A}(x_1) - t_{A}(x_1), \\
\varphi(x_1) = \varphi(x_1), \quad g(x_1) = g(x_1), \quad \varphi(x_1) = \varphi(\pm A), \quad x_1 \to \pm A, \\
\varphi_{-A}(x_1) = \varphi(-A), \quad x_1 \to -A, \quad \varphi_{A}(x_1) = \varphi(A), \quad x_1 \to A.
\end{gathered} \tag{3}
$$

В качестве объекта можно рассматривать мембрану, допускающую представление в виде фрактала — упакованного блочного элемента, участвующего в описании решений сложных векторных граничных задач [26]. Она имеет внешнее воздействие как по границе, описываемое функциями $\varphi(A)$ и $\varphi(-A)$, так и на поверхности. Считаем, что q_A и q_{-A} являются контактными напряжениями, действующими на мембрану со стороны многослойной среды, а t_A и t_{-A} являются внешними давлениями сверху.

3. Метод исследования. Для исследования построим упакованные блочные элементы, порождаемые граничной задачей (3). Для этого можно применить метод, детально изложенный в [27]. В результате строятся внешние формы для каждой граничной задачи, которые принимают вид

$$
\begin{aligned}
\omega_{-A}(\alpha_1) = -i(\alpha_1 + k)\varphi_{-A}(-C)e^{-i\alpha_1 C} + Q_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)C} - \\
- Q_{-A}(\alpha_1) - T_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)C} + T_{-A}(\alpha_1),
\end{aligned}
$$

$$
\omega_{A}(\alpha_1) = i(\alpha_1 - k)\varphi_{A}(A)e^{i\alpha_1 A} + Q_{A}(k)e^{i(\alpha_1-k)A} - Q_{A}(\alpha_1) - T_{A}(k)e^{i(\alpha_1-k)A} + T_{A}(\alpha_1).
$$

Здесь прописные буквы соответствуют преобразованиям Фурье параметров, обозначенных строчными буквами:

$$
\varphi(\alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1)e^{i\alpha_1 x_1}\, dx_1.
$$

С помощью построенных внешних форм перемещения мембраны можно представить упакованными блочными элементами в виде

$$
\varphi_r(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_r(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1}\, d\alpha_1, \quad \varphi_r(\alpha_1) = \frac{\omega_r(\alpha_1)}{N(\alpha_1)}, \quad r = A,\ -A,
$$

$$
N(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2).
$$

Связь между граничными напряжениями и перемещениями на поверхности упругой среды, на которой находятся мембраны, имеет вид

$$u_r(x_1,x_2) = \iint\limits_{\Omega_{-A}} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2) q_{-A}(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega_A} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2) q_A(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \quad x_1,x_2 \in \Omega_r, \quad (4)$$

$$r = A,\ -A, \quad \langle \alpha, x\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} K(\alpha_1,\alpha_2) e^{-i\langle \alpha, x\rangle}\, d\alpha_1\, d\alpha_2,$$

или

$$u_r(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int K(\alpha_1,\alpha_2) q_r(\alpha_1,\alpha_2) e^{-i\,\langle \alpha, x\rangle}\, d\alpha_1\, d\alpha_2,$$

$$K(\alpha_1,\alpha_2) = O(u^{-1}), \quad u = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} \to \infty,$$

$K(\alpha_1,\alpha_2)$ — четная по обеим переменным аналитическая функция двух комплексных переменных α_k, в частности мероморфная, ее примеры приведены в многочисленных публикациях. Например, в [28] построены интегральные уравнения для линейно упругого слоя толщины h, жестко соединенного с абсолютно твердым основанием. Ядро для динамического случая имеет подобный вид:

$$K(u) = x_2^2 \left(\sigma_1 \operatorname{sh}\sigma_1 \operatorname{ch}\sigma_2 - u^2 \sigma_2^{-1} \operatorname{sh}\sigma_2 \operatorname{ch}\sigma_1\right) \Delta^{-1}(u),$$

$$\Delta(u) = u^2\left(2u^2-\theta_2^2\right) + u^2 \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \operatorname{sh}\sigma_1 \operatorname{sh}\sigma_2 \left[2u^4 - (\theta_1^2 + 2\theta_2^2)u^2 + \theta_1^2\theta_2^2 + 0.25\theta_2^4\right],$$

$$-\operatorname{ch}\sigma_1 \operatorname{ch}\sigma_2 \left(2u^4 - \theta_2^2 u^2 + 0.25\theta_2^4\right), \quad \sigma_1 = \sqrt{u^2-\theta_1^2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{u^2-\theta_2^2},$$

$$\theta_1^2 = (\lambda+2\mu)^{-1}\rho\omega^2 h^2, \quad \theta_2^2 = \mu^{-1}\rho\omega^2 h^2.$$

Применив к двумерному интегральному уравнению (4) преобразование Фурье по координате x_2, как и в (1), получим систему одномерных интегральных уравнений с двумя неизвестными вида

$$u_r(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{-A} k(x_1-\xi_1) q_{-A}(\xi_1)\, d\xi_1 + \int\limits_{A}^{\infty} k(x_1-\xi_1) q_A(\xi_1)\, d\xi_1,$$

$$k(x_1) = k(x_1,\alpha_2), \quad q_r(\xi_1) = q_r(\xi_1,\alpha_2),$$

$$k(x_1) = k(x_1,\alpha_2), \quad k(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 x_1}\, d\alpha_1,$$

$$K(\alpha_1) = K(\alpha_1,\alpha_2), \quad u_r(x_1) = u_r(x_1,\alpha_2).$$

В случае многослойной среды функция $K(\alpha_1)$ является мероморфной, имеющей счетное число нулей и полюсов. Таким функциям свойственно асимптотическое поведение вида

$$\xi_s = ir(s+0.5)(1+o(1)), \quad s\to\infty, \quad z_m = irm(1+o(1)), \quad s\to\infty, \quad r = \text{const} > 0.$$

В динамическом случае при достаточно большой частоте ω появляется конечное число вещественных нулей и полюсов. Представление ядра интегрального уравнения описывается следующим интегралом, берущимся по контуру:

$$k(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma} K(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 x_1}d\alpha_1.$$

Контур γ совпадает с вещественной осью всюду, кроме зон вещественных полюсов, которые обходятся им по полуокружностям малого радиуса [28].

Балансы перемещений поверхности многослойной среды и мембран представим в форме

$$u_r(x_1) = \varphi_r(x_1), \quad x_1 \in \Omega_r.$$

В преобразованиях Фурье получаем соотношения

$$K(\alpha_1)Q_{-A}(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}\left[-Q_{-A}(\alpha_1) + S_{-A}\right],$$

$$\left[K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}\right]Q_{-A}(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S_{-A}],$$

$$K(\alpha_1)Q_A(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}\left[-Q_A(\alpha_1) + S_A\right],$$

$$\left[K(\alpha_1) + (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}\right]Q_A(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}S_A],$$

$$S_{-A} = -i(\alpha_1+k)\varphi_{-A}(-A)e^{-i\alpha_1 A}+Q_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)A}-T_{-A}(-k)e^{-i(\alpha_1+k)A}+T_{-A}(\alpha_1),$$

$$S_A = i(\alpha_1 - k)\varphi_A(A)e^{i\alpha_1 A} + Q_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A} - T_A(k)e^{i(\alpha_1-k)A} + T_A(\alpha_1).$$

Составим в преобразованиях Фурье уравнение перемещения всей поверхности многослойной среды с учетом обоих контактных зон:

$$K(\alpha_1)Q_{-A}^-(\alpha_1) + W(\alpha_1) + K(\alpha_1)Q^+(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_{-A}^- + S^+), \tag{5}$$

$$K(\alpha_1)Q_0^-(\alpha_1) + K(\alpha_1)Q_0^+(\alpha_1) = (\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_0^- + S_0^+). \tag{6}$$

С учетом аналитических свойств функций приняты обозначения $Q_{-A}^-(\alpha_1) \equiv Q_{-A}(\alpha_1)$, $S_{-A}^- \equiv S_{-A}(\alpha_1)$, $Q_A^+(\alpha_1) \equiv Q_A(\alpha_1)$, $S_A^+(\alpha_1) \equiv S_A(\alpha_1)$.

Знак «+» в верхних индексах обозначает регулярность аналитической функции комплексного переменного в верхней полуплоскости, а «−» — в нижней. Здесь в (5) $W(\alpha_1)$ — преобразование Фурье перемещений в зоне поверхности, находящейся между зонами контакта Ω_r, $r = -A,\ A$. Это функциональное уравнение позволяет моделировать трещины нового типа для любых конечных расстояний $2A$ между берегами. В (6) представлено функциональное уравнение для случая $A = 0$ в предположении, что мембраны сошлись торцами, но не взаимодействуют друг с другом, сохраняя заданные на торцах граничные воздействия. Образовавшаяся трещина нового типа вызывает в зоне сближения сингулярные концентрации контактных напряжений [22, 23], разрушая среду. Таким является механизм разрушения среды трещинами нового типа. Однако, как показано ниже, разрушение может происходить и раньше в результате сближения торцов на достаточно близкое расстояние. Соотношения (4), (5) представляют обобщенные функциональные уравнения типа Винера — Хопфа относительно неизвестных $Q_{-A}^-(\alpha_1)$, $Q_A^+(\alpha_1)$, $W(\alpha_1)$, а также функционалов $Q_{-A}(-k)$, $Q_A(k)$, входящих в правые части уравнений. Для их исследования строятся интегральные уравнения.

4. Интегральные уравнения трещин нового типа и их свойства. Применим для исследования функционального уравнения аппарат факторизации функций [28, 29], позволяющий свести его к отдельным интегральным уравнениям. С этой целью для четной функции $K(\alpha_1)$ осуществим факторизацию $K(\alpha_1) = K_+(\alpha_1)K_-(\alpha_1)$ таким образом, чтобы выполнялось соотношение $K_+(-\alpha_1) = K_-(\alpha_1)$. Для факторизованных функций на вещественной оси справедливы оценки $K_\pm(\alpha_1) = O(\alpha_1^{-0.5})$, $|\alpha_1| \to \infty$.

Введя новые неизвестные $K_-(\alpha_1)Q^-_{-A}(\alpha_1)e^{i\alpha_1 A} = {}_-(\alpha_1)$, $K_+(\alpha_1)Q^+(\alpha_1)e^{-i\alpha_1 A} = {}_+(\alpha_1)$ и осуществив свойственные факторизационному методу операции [28], получаем систему интегральных уравнений вида

$$ {}_-(\alpha_1) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{K_-(\xi){}_+(\xi)e^{i\xi 2A}}{K_+(\xi)(\xi-\alpha_1)}d\xi = \{K_+^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2-k^2)^{-1}S_-^- e^{-i\alpha_1}\}^-, \quad \operatorname{Im}\alpha_1 < 0, $$

$$ {}_+(\alpha_1) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{K_+(\xi){}_-(\xi)e^{-i\xi 2A}}{K_-(\xi)(\xi-\alpha_1)}d\xi = \{K_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2-k^2)^{-1}S^+ e^{i\alpha_1 A}\}^+, \quad \operatorname{Im}\alpha_1 > 0. $$

Здесь использовано обозначение, заимствованное из [28]:

$$ \{R(\alpha_1)\}^\pm = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\xi)}{\xi-\alpha_1}\,d\xi, \quad \pm\operatorname{Im}\alpha_1 > 0. \tag{7} $$

Взяв неизвестные $Y_1(\alpha_1) = {}_+(\alpha_1) + {}_-(-\alpha_1)$, $Y_2(\alpha_1) = {}_+(\alpha_1) - {}_-(-\alpha_1)$, приводим систему интегральных уравнений к отдельным уравнениям вида

$$ Y_2(\alpha_1) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{K_-(\xi)Y_2(\xi)e^{i\xi 2A}}{K_+(\xi)(\xi+\alpha_1)}\,d\xi = \left\{K_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2-k^2)^{-1}S^+ e^{i\alpha_1 A}\right\}^+ - $$
$$ - \{K_+^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2-k^2)^{-1}S^-_{-A}e^{-i\alpha_1 A}\}^+, $$

$$ Y_1(\alpha_1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{K_-(\xi)Y_1(\xi)e^{i\xi 2A}}{K_+(\xi)(\xi+\alpha_1)}\,d\xi = \left\{K_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2-k^2)^{-1}S^+ e^{i\alpha_1 A}\right\}^+ + $$
$$ + \left\{K_+^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2-k^2)^{-1}S^-_{-A}e^{-i\alpha_1 A}\right\}^+, \quad \operatorname{Im}\alpha_1 \geqslant 0. $$

Под интегралами справа находятся аналитические функции, поэтому интегральные операторы в правой части описываются интегралами Дирихле. Не изменяя значения интегралов, сместим контур в верхнюю полуплоскость на $i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, не пересекая полюсов.

Тогда подынтегральная экспонента приобретает вид $e^{-(\varepsilon+i\xi)2A}$. Отсюда следует, что интегральный оператор является убывающим при $A \to \infty$. Он действует в пространстве непрерывных с весом функций C_ν с нормой $\|f(\alpha)\| = \max\limits_\alpha|\alpha^\nu f(\alpha)|$, $\nu < 1$, и является вполне непрерывным. В случае многослойной среды его конечномерная аппроксимация строится в результате вычисления по вычетам интеграла Дирихле замыканием контура интегрирования в верхней полуплоскости.

Изучим свободные члены этих уравнений. Они являются комбинацией выражений

$$P_A(\alpha_1) = \left\{K_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1} S^+ e^{i\alpha_1 A}\right\}^+,$$

$$P_{-A}(\alpha_1) = \left\{K_+^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1} S_{-A}^- e^{-i\alpha_1 A}\right\}^+.$$

Несложно определить с учетом (7), что имеет место оценка $P_r(\alpha_1) = O(\alpha_1^{-1})$, $|\alpha_1| \to \infty$. Такое же поведение на бесконечности имеет место при оценке операторов в правых частях интегральных уравнений, действующих в C_ν. Эти функции представимы с явным выделением функционалов от решений в виде

$$P_A(\alpha_1) = Q_A(k)\left\{K_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1} e^{i(2\alpha_1 - k)A}\right\}^+ + \\ + \left\{K_-^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S^+ - Q_A(k) e^{i(\alpha_1 - k)A}) e^{i\alpha_1 A}\right\}^+,$$

$$P_{-A}(\alpha_1) = Q_{-A}(-k)\left\{K_+^{-1}(-\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1} e^{-i(2\alpha_1 + k)A}\right\}^+ + \\ + \left\{K_+^{-1}(-\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1}(S_{-A}^- - Q_{-A}(-k) e^{-i(\alpha_1 + k)A}) e^{+i\alpha_1 A}\right\}^+.$$

Таким образом, решения интегральных уравнений имеют оценки Y_1, $Y_2 = O(\alpha_1^{-1})$, $|\alpha_1| \to \infty$.

Получив эти данные, можем оценить поведение контактных напряжений на краях. Имеем

$$Q_{-A}^-(\alpha_1) = K_-^{-1}(\alpha_1)_-(\alpha_1) e^{i\alpha_1 A}, \quad Q_A^+(\alpha_1) = K_+^{-1}(\alpha_1)_+(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 A}.$$

Приняв во внимание замены переменных $Y_1(\alpha_1) = {}_+(\alpha_1) + {}_-(-\alpha_1)$, $Y_2(\alpha_1) = {}_+(\alpha_1) - {}_-(-\alpha_1)$, получаем оценки функций ${}_-(\alpha_1)$, ${}_+(\alpha_1) = O(\alpha_1^{-1})$. Применяя обратное преобразование Фурье, имеем

$$q_{-A}(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma K_-^{-1}(\alpha_1)_-(\alpha_1) e^{-i\alpha_1 A} e^{-i\alpha_1 x_1}\, d\alpha_1 \sim \\ \sim \frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma \alpha_1^{-0.5} e^{-i\alpha_1(A + x_1)}\, d\alpha_1 \sim \frac{1}{2\pi(-A - x_1)^{0.5}}\int\limits_\gamma \frac{e^{iy}}{\sqrt{y}}\, dy, \quad x_1 < -A,$$

$$q_A(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma K_+^{-1}(\alpha_1)_+(\alpha_1) e^{i\alpha_1 A} e^{-i\alpha_1 x_1}\, d\alpha_1 \sim \\ \sim \frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma \alpha_1^{-0.5} e^{-i\alpha_1(x_1 - A)}\, d\alpha_1 \sim \frac{1}{2\pi(x_1 - A)^{0.5}}\int\limits_\gamma \frac{e^{-iy}}{\sqrt{y}}\, dy, \quad x_1 > A.$$

Таким образом, на краях существуют интегрируемые особенности.

При $A \to 0$ происходит сближение особенностей контактных напряжений, возникающих на краях мембраны, и, как следствие, при полном сближении торцов мембран, до образования их связности, в зоне сближения возникает новый тип особенности. Важно заметить, что рост особенности при сближении торцами литосферных плит отмечался при проведении численных расчетов. Однако только строгий математический подход, приверженцем которого всегда выступал Н. Ф. Морозов, позволил показать, что эта особенность является сингулярной [22, 23], катастрофической в сейсмологии, приводящей к стартовому землетрясению. Оно названо «стартовым», поскольку возникает прежде, чем литосферные плиты начинают взаимно воздействовать друг на друга, вызывая другое — «ко́ровое» землетрясение.

В представленных правых частях интегральных уравнений явно выделены функционалы от искомых решений. Однозначная разрешимость интегральных уравнений дает возможность найти эти функционалы из алгебраической системы двух уравнений путем внесения в построенные функции решений $Q^-_{-A}(\alpha_1)$, $Q^+_A(\alpha_1)$, линейно зависящих от функционалов, значения $-k$ и k соответственно.

5. Выводы. Таким образом, на базе нового универсального метода моделирования [26] предложен способ построения уравнений трещин нового типа в средах со сложной реологией, граничные задачи которых описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных.

Литература

1. Griffith A. A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Trans. Roy. Soc. A* **221**, 163–198 (1921). https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006

2. Sator C., Becker W. Closed-form solutions for stress singularities at plane bi- and trimaterial functions. *Arch. Appl. Mech.* **82**, 643–658 (2012). https://doi.org/10.1007/s00419-011-0580-6

3. Irwin G. Fracture Dynamics. In: *Fracturing of metals.* Ohio, Am. Soc. for Metals, Cleveland, 147–166 (1948).

4. Leblond J. B., Frelat J. Crack kinking from an interface crack with initial contact between the crack lips. *Europ. J. Mech. A. Solids* **20** (6), 937–951 (2001). https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01173-1

5. Loboda V. V., Sheveleva A. E. Determing prefracture zones at a crack tip between two elastic orthotropic bodies. *Int. Appl. Mech.* **39** (5), 566–572 (2003). https://doi.org/10.1023/A:1025139625891

6. Loeber J. F., Sih G. C. Transmission of anti-plane shear waves past an interface crack in dissimilar media. *Engineering Fracture Mechanics* **5** (3), 699–725 (1973). https://doi.org/10.1016/0013-7944(73)90048-9

7. Menshykov O. V., Menshykov M. V., Guz I. A. 3-D elastodynamic contact problem for an interface crack under harmonic loading. *Engineering Fracture Mechanics* **80**, 52–59 (2012). https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.12.010

8. Menshykov O. V., Menshykov M. V., Guz I. A., Mickucka V. 2-D and 3-D contact problems for interface cracks under harmonic loading. In: Constanda C., Harris P. (eds). *Integral Methods in Science and Engineering.* Boston, Birkhäuser, 241–252. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8238-5_23

9. Menshykov O. V., Menshykov M. V., Guz I. A. Linear interface crack under plane shear wave. *CMES — Computer Modeling in Engineering & Sciences* **48** (2), 107–120 (2009). https://doi.org/10.3970/cmes.2009.048.107

10. Menshykov O. V., Menshykov M. V., Guz I. A. Modelling crack closure for an interface crack under harmonic loading. *Int. J. of Fracture* **165** (1), 127–134 (2010). https://doi.org/10.1007/s10704-010-9492-7

11. Menshykov O. V., Menshykov M. V., Guz I. A. An iterative BEM for the dynamic analysis of interface crack contact problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **35** (5), 735–749 (2011). https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2010.12.005

12. Mikhas'kiv V. V., Butrak I. O. Stress concentration around a spheroidal crack caused by a harmonic wave incident at an arbitrary angle. *Int. Appl. Mech.* **42** (1), 61–66 (2006). https://doi.org/10.1007/s10778-006-0059-2

13. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* **55** (1), 98–103 (1988). https://doi.org/10.1115/1.3173668

14. Zhang Ch., Gross D. *On wave propagation in elastic solids with cracks.* South Hampton, UK, Boston, USA, Comp. Mech. Publ. (1998).

15. Морозов Н. Ф. *Математические вопросы теории трещин.* Москва, Наука (1984).

16. Черепанов Г. П. *Механика хрупкого разрушения.* Москва, Наука (1974).

17. Kirugulige M. S., Tippur H. V. Mixed-mode dynamic crack growth in functionally graded glass-filled epoxy. *Exp. Mech.* **46** (2), 269–281 (2006). https://doi.org/10.1007/s11340-006-5863-4

18. Huang Y., Gao H. Intersonic crack propagation — Part II: Suddenly stopping crack. *J. Appl. Mech.* **69** (1), 76–80 (2002). https://doi.org/10.1115/1.1410936

19. Antipov Y. A., Smirnov A. V. Subsonic propagation of a crack parallel to the boundary of a half-plane. *Math. Mech. Solids* **18** (2), 153–167 (2013). https://doi.org/10.1177/1081286512462182

20. Sinclair G. B. Stress singularities in classical elasticity — I: Removal, Interpretation, and Analysis. *Appl. Mech. Rev.* **57** (4), 251–298 (2004). https://doi.org/10.1115/1.1762503

21. Sinclair G. B. Stress Singularities in Classical Elasticity — II: Asymptotic Identification. *Appl. Mech. Rev.* **57** (5), 385–439 (2004). https://doi.org/10.1115/1.1767846

22. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach. *Acta Mechanica* **229** (5), 2163–2175 (2018). https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0

23. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of lithospheric plates. *Acta Mechanica* **229** (11), 4727–4739 (2018). https://doi.org/10.1007/s00707-018-2255-7

24. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. Об одном новом типе трещин, дополняющих трещины Гриффитса — Ирвина. *Доклады Академии наук* **485** (2), 162–165 (2019). https://doi.org/10.31857/S0869-56524852162-165

25. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. О влиянии пространственной модели литосферных плит на стартовое землетрясение. *Доклады Академии наук* **480** (2), 158–163 (2018). https://doi.org/10.7868/S0869565218140062

26. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Доклады Академии наук* **499** (1), 30–35 (2021). https://doi.org/10.31857/S2686740021040039

27. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. О стадиях преобразования блочных элементов. *Доклады Академии наук* **468** (2), 154–158 (2016). https://doi.org/10.7868/S0869565216140085

28. Ворович И. И., Бабешко В. А. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* Москва, Наука (1979).

29. Нобл Б. *Метод Винера — Хопфа.* Москва, ИЛ (1962).

Статья поступила в редакцию 15 января 2022 г.;
доработана 23 февраля 2022 г.;
рекомендована к печати 3 марта 2022 г.

Контактная информация:

Бабешко Владимир Андреевич — д-р физ.-мат. наук, проф., акад. РАН; babeshko41@mail.ru
Евдокимова Ольга Владимировна — д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр.; evdokimova.olga@mail.ru
Бабешко Ольга Мефодиевна — д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр.; babeshko49@mail.ru

On integral equations of cracks of a new type*

V. A. Babeshko[1,2], *O. V. Evdokimova*[1], *O. M. Babeshko*[2]

[1] Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
41, ul. Chekhova, Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation
[2] Kuban State University,
149, ul. Stavropolskaya, Krasnodar, 350040, Russian Federation

For citation: Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. On integral equations of cracks of a new type. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. As-*

*Some fragments of the work were completed as part of the implementation of the Russian Ministry of Education and Science state task for 2022 (project FZEN-2020-0020), Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (project 00-20-13, state registration no. 122020100341-0), and supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014).

tronomy, 2022, vol. 9 (67), issue 3, pp. 405–416. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.302 (In Russian)

For the first time, the paper develops a new type of crack modeling method that allows describing them in environments of complex rheologies. It is based on a new universal modeling method previously published by the authors, used in boundary value problems for systems of partial differential equations. The advantage of the method is the possibility of avoiding the need to solve complex boundary value problems for systems of partial differential equations by replacing them with separate differential equations, among which the Helmholtz equations are the simplest. Namely, with the help of combinations of solutions of boundary value problems for this equation, it is possible to describe the behavior of complex solutions of multicomponent boundary value problems. In this paper, for the first time, the method is applied to a mixed boundary value problem for cracks of a new type. Cracks of a new type, complementing the Griffiths cracks, were discovered during the study of fractures of lithospheric plates that converge at the ends during oncoming traffic along the Conrad boundary. In the course of the study, Kirchhoff plates were adopted as models of lithospheric plates. The method developed in the published article is aimed at the possibility of describing models of approaching objects similar to lithospheric plates in the form of deformable plates of more complex rheologies. In particular, it can be thermoelectroelastic plates or other rheology. In the process of solving problems using Kirchhoff models for lithospheric plates, there was a problem of calculating some functionals that needed to be determined. This method demonstrates an approach that eliminates this drawback. The derivation of integral equations of cracks of a new type, the method of their solution and the approach to application in more complex rheologies is given.

Keywords: block element, factorization, integral equations, external forms, cracks of a new type.

References

1. Griffith A. A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Trans. Roy. Soc. A* **221**, 163–198 (1921). https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006

2. Sator C., Becker W. Closed-form solutions for stress singularities at plane bi- and trimaterial functions. *Arch. Appl. Mech.* **82**, 643–658 (2012). https://doi.org/10.1007/s00419-011-0580-6

3. Irwin G. Fracture Dynamics. In: *Fracturing of metals.* Ohio, Am. Soc. for Metals, Cleveland, 147–166 (1948).

4. Leblond J. B., Frelat J. Crack kinking from an interface crack with initial contact between the crack lips. *Europ. J. Mech. A. Solids* **20** (6), 937–951 (2001). https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01173-1

5. Loboda V. V., Sheveleva A. E. Determing prefracture zones at a crack tip between two elastic orthotropic bodies. *Int. Appl. Mech.* **39** (5), 566–572 (2003). https://doi.org/10.1023/A:1025139625891

6. Loeber J. F., Sih G. C. Transmission of anti-plane shear waves past an interface crack in dissimilar media. *Engineering Fracture Mechanics* **5** (3), 699–725 (1973). https://doi.org/10.1016/0013-7944(73)90048-9

7. Menshykov O. V., Menshykov M. V., Guz I. A. 3-D elastodynamic contact problem for an interface crack under harmonic loading. *Engineering Fracture Mechanics* **80**, 52–59 (2012). https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.12.010

8. Menshykov O. V., Menshykov M. V., Guz I. A., Mickucka V. 2-D and 3-D contact problems for interface cracks under harmonic loading. In: Constanda C., Harris P. (eds). *Integral Methods in Science and Engineering.* Boston, Birkhäuser, 241–252. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8238-5_23

9. Menshykov O. V., Menshykov M. V., Guz I. A. Linear interface crack under plane shear wave. *CMES — Computer Modeling in Engineering & Sciences* **48** (2), 107–120 (2009). https://doi.org/10.3970/cmes.2009.048.107

10. Menshykov O. V., Menshykov M. V., Guz I. A. Modelling crack closure for an interface crack under harmonic loading. *Int. J. of Fracture* **165** (1), 127–134 (2010). https://doi.org/10.1007/s10704-010-9492-7

11. Menshykov O. V., Menshykov M. V., Guz I. A. An iterative BEM for the dynamic analysis of interface crack contact problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements* **35** (5), 735–749 (2011). https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2010.12.005

12. Mikhas'kiv V. V., Butrak I. O. Stress concentration around a spheroidal crack caused by a harmonic wave incident at an arbitrary angle. *Int. Appl. Mech.* **42** (1), 61–66 (2006). https://doi.org/10.1007/s10778-006-0059-2

13. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* **55** (1), 98–103 (1988). https://doi.org/10.1115/1.3173668

14. Zhang Ch., Gross D. *On wave propagation in elastic solids with cracks.* South Hampton, UK, Boston, USA, Comp. Mech. Publ. (1998).

15. Morozov N. F. *Mathematical problems in the theory of cracks.* Moscow, Nauka Publ. (1984). (In Russian)

16. Cherepanov G. P. *Brittle fracture mechanics.* Moscow, Nauka Publ. (1974). (In Russian)

17. Kirugulige M. S., Tippur H. V. Mixed-mode dynamic crack growth in functionally graded glass-filled epoxy. *Exp. Mech.* **46** (2), 269–281 (2006). https://doi.org/10.1007/s11340-006-5863-4

18. Huang Y., Gao H. Intersonic crack propagation — Part II: Suddenly stopping crack. *J. Appl. Mech.* **69** (1), 76–80 (2002). https://doi.org/10.1115/1.1410936

19. Antipov Y. A., Smirnov A. V. Subsonic propagation of a crack parallel to the boundary of a half-plane. *Math. Mech. Solids* **18** (2), 153–167 (2013). https://doi.org/10.1177/1081286512462182

20. Sinclair G. B. Stress singularities in classical elasticity — I: Removal, Interpretation, and Analysis. *Appl. Mech. Rev.* **57** (4), 251–298 (2004). https://doi.org/10.1115/1.1762503

21. Sinclair G. B. Stress Singularities in Classical Elasticity — II: Asymptotic Identification. *Appl. Mech. Rev.* **57** (5), 385–439 (2004). https://doi.org/10.1115/1.1767846

22. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach. *Acta Mechanica* **229** (5), 2163–2175 (2018). https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0

23. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of lithospheric plates. *Acta Mechanica* **229** (11), 4727–4739 (2018). https://doi.org/10.1007/s00707-018-2255-7

24. Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. On one new type of cracks supplementing the Griffith — Irwin cracks. *Doklady Akademii nauk* **485** (2), 162–165 (2019). https://doi.org/10.31857/S0869-56524852162-165 (In Russian) [Eng. transl.: *Dokl. Phys.* **64**, 102–105 (2019). https://doi.org/10.1134/S1028335819030042].

25. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. On the influence of the spatial model of lithospheric plates on the starting earthquake. *Doklady Akademii nauk* **480** (2), 158–163 (2018). https://doi.org/10.7868/S0869565218140062 (In Russian) [Eng. transl.: *Dokl. Phys.* **63**, 203–207 (2018). https://doi.org/10.1134/S102833581805004X].

26. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk* **499** (1), 30–35 (2021). https://doi.org/10.31857/S2686740021040039 (In Russian)

27. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. On the stages of transformation of block elements. *Doklady Akademii nauk* **468** (2), 154–158 (2016). https://doi.org/10.7868/S0869565216140085 (In Russian) [Eng. transl.: *Dokl. Phys.* **61**, 227–231 (2016). https://doi.org/10.1134/S1028335816050049].

28. Vorovich I. I., Babeshko V. A. *Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains.* Moscow, Nauka Publ. (1979). (In Russian)

29. Noble B. *Wiener — Hopf method.* Moscow, Inostrannaya literatura Publ. (1962).

Received: January 15, 2022
Revised: February 23, 2022
Accepted: March 3, 2022

Authors' information:

Vladimir A. Babeshko — babeshko41@mail.ru
Olga V. Evdokimova — evdokimova.olga@mail.ru
Olga M. Babeshko — babeshko49@mail.ru