УДК 517.955 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3
MSC 35C15, 35C99

Метод преобразования Фурье для уравнений в частных производных: формулы представления решений задачи Коши

В. И. Гишларкаев

Чеченский государственный университет,
Российская Федерация, 364093, Грозный, ул. Шерипова, 32

Для цитирования: *Гишларкаев В. И.* Метод преобразования Фурье для уравнений в частных производных: формулы представления решений задачи Коши // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 480–494. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.309

В работе предлагается метод решения задачи Коши для линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами специального вида, позволяющий после применения (обратного) преобразования Фурье переписать исходную задачу как задачу Коши для уравнений в частных производных первого порядка. Полученная задача решается методом характеристик и к ее решению применяется (прямое) преобразование Фурье. А для этого необходимо знать решение задачи Коши для уравнения первого порядка во всей области определения. Это приводит к требованию компактности носителя (обратного) преобразования Фурье начальной функции исходной задачи, и для описания класса начальных функций необходимо воспользоваться теоремами типа Пэли — Винера — Шварца о Фурье-образах, в том числе и обобщенных функций. Приведено представление решений в виде преобразования Фурье от некоторой (обобщенной) функции, определяемой по начальной функции. При этом выписан общий вид эволюционного уравнения, приводящий при применении описанного метода к рассмотрению однородного уравнения первого порядка и выведена формула решения задачи Коши в этом общем случае. Также выписан общий вид уравнения, приводящий к рассмотрению неоднородного уравнения первого порядка, и выведена формула решений для него. Частными случаями этих уравнений являются известные уравнения, встречающиеся при описании различных процессов в физике, химии, биологии.

Ключевые слова: преобразование Фурье, обобщенные функции с компактным носителем, метод характеристик.

1. Введение. Как известно, стандартная процедура применения преобразования Фурье, сводящая задачу Коши для уравнений в частных производных к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, применима в случаях, когда коэффициенты исходного уравнения не зависят от пространственных переменных.

В работе [1] на основе идей статистической гидродинамики, связанных с уравнением Хопфа, приводится метод, позволяющий применить преобразование Фурье для решения задачи Коши для широкого класса конкретизаций уравнения

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{|\alpha|\le m} \varepsilon_\alpha a_\alpha(t)\partial_x^\alpha u(t,x) = 0, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in R^n, \tag{1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \alpha_j, j = 1, ..., n,$ — целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1+...+\alpha_n$; $\varepsilon_\alpha = x_i$ или 1.

В той же работе указано на возможность несколько другого подхода, когда применением преобразования Фурье исходная задача сводится к задаче Коши для уравнений первого порядка с частными производными. Такой подход позволяет рассмотреть случаи уравнения (1), не вошедшие в [1]. Этому способу использования преобразования Фурье и посвящена данная работа.

В разделе 2 на модельных примерах демонстрируется идея предлагаемого метода, а также выведены формулы представления решений задачи Коши для некоторого класса уравнений типа (1). Точнее, это тот класс уравнений (1), которые после применения обратного преобразования Фурье переходят в уравнения первого порядка вида

$$\partial_t \check{u}(t,\xi) + \sum_{j=1}^{n} g_j(t,\xi)\partial_{\xi_j}\check{u} = 0. \tag{2}$$

В разделе 3 этот класс уравнений существенно расширяется. Точнее, исследуются уравнения типа (1) с нулевой и ненулевой правой частью, которые после взятия обратного преобразования Фурье переходят в уравнения вида

$$\partial_t \check{u}(t,\xi) + g_0(t,\xi)\check{u}(t,\xi) + \sum_{j=1}^{n} g_j(t,\xi)\partial_{\xi_j}\check{u} = f(\xi). \tag{3}$$

В частности, в случае двух переменных этому условию удовлетворяет уравнение

$$\partial_t u(t,x) + x\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}(t)\partial_x^{2k+1}u + \sum_{k=0}^{m} a_{2k}(t)\partial_x^{2k}u = f(t,x), \tag{4}$$

являющееся частным случаем одного из уравнений, рассмотренных в разделе 3.

Уравнения (2), (3) решаются стандартным методом характеристик. При этом для уравнения (3), рассматривая его как квазилинейное уравнение, мы применяем, как это обычно и делается, общую схему решения квазилинейного уравнения (см., например, [2, 3]).

Отметим, что уравнения, подпадающие под рассмотренные типы, встречаются при описании физико-химических, биологических и других процессов (см., например, [4]). Приведем примеры уравнений вида (4) из перечисленных прикладных направлений.

Уравнение $\partial_t u(t,x) = a\partial_x^2 u(t,x) - bx\partial_x u(t,x)$ возникает при описании процесса Орнстейна — Уленбека, т. е. броуновского процесса, когда на частицу действует упругая сила [5].

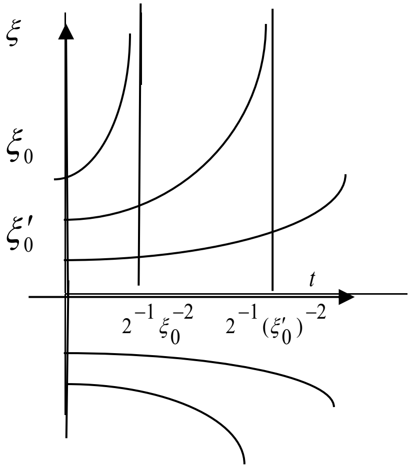
Уравнения $f(x)\partial_x w(x,y) + g(x)y\partial_y w = \partial_y^2 w$, $f(x)\partial_x w + g(x)y\partial_y w = \partial_y^2 w - h(x)w$ встречаются в задачах диффузионного пограничного слоя [4].

Другие уравнения прикладного характера, принадлежащие рассмотренным в разделе 3 классам уравнений, можно найти в немалом количестве в [4].

2. Идея метода. Случай уравнений с нулевой правой частью. *2.1. Простейшие модельные примеры.*

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$\partial_t u(t,x) + x\partial_x^3 u(t,x) + 3\partial_x^2 u(t,x) = 0, \quad u(t,x)|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R. \tag{5}$$



Метод характеристик для уравнения (6).

Применив обратное преобразование Фурье, учитывая равенство $F^{-1}(x\partial_x^3 u) = i\partial_\xi F^{-1}(\partial_x^3 u) = \partial_\xi(\xi^3 \check{u}(t,\xi))$ (мы пользуемся определениями прямого и обратного преобразований Фурье, принятых в [1]: $F[\varphi](\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \int_{R_x^n} \varphi(x)e^{i(\xi,x)}dx$ — прямое, $F^{-1}[f](x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-n}\int_{R_\xi^n} f(\xi)e^{-i(\xi,x)}d\xi$ — обратное преобразования Фурье), получим задачу

$$\partial_t \check{u}(t,\xi) + \xi^3 \partial_\xi \check{u}(t,\xi) = 0, \quad \check{u}(t,\xi)|_{t=0} = \check{u}_0(\xi), \tag{6}$$

которая решается методом характеристик:

$$\check{u}(t,\xi) = \check{u}_0\left(\sqrt{\frac{\xi^2}{2\xi^2 t + 1}}\right); \quad u(t,x) = \int e^{ix\xi}\check{u}_0\left(\sqrt{\frac{\xi^2}{2\xi^2 t + 1}}\right)d\xi$$

(вообще говоря, это комплекснозначное решение, $\mathrm{Re}u(t,x)$ — действительное решение).

Напомним идею метода характеристик, которым мы воспользовались при решении задачи (6). Из каждой точки прямой $t = 0$ проводится характеристика, и сдвигами начальных значений по характеристикам определяются значения решения рассматриваемого уравнения первого порядка в точках (t,ξ), лежащих на характеристиках. Для уравнения (6) характеристика, выходящая из точки $(0,\xi_0)$, т. е. решение задачи $\frac{d\xi}{dt} = \xi^3$, $\xi|_{t=0} = \xi_0$, определяется равенством $\xi = \frac{\xi_0}{\sqrt{1-2\xi_0^2 t}}$. Выразив отсюда ξ_0 через t,ξ и подставив его в аргумент $\check{u}_0$, получим функцию $\check{u}(t,\xi)$. Заметим, что эти характеристики имеют сингулярность в точке $t_0 = 2^{-1}\xi_0^{-2} : t_0(\xi_0) \downarrow 0$ при $\xi_0 \to \infty$ (см. рисунок). Отсюда вытекает необходимость требования финитности функции $\check{u}_0(\xi)$.

Пример 2. Это же требование должно быть выполнено и в следующей задаче:

$$\partial_t u(t,x) - x\partial_x^3 u(t,x) - 3\partial_x^2 u(t,x) = 0, \quad u(t,x)|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R.$$

Применив приведенные выше рассуждения, получим

$$u(t,x) = \int e^{ix\xi}\check{u}_0\left(\sqrt{\frac{\xi^2}{1-2\xi^2 t}}\right)d\xi.$$

Из положительности знаменателя в правой части этой формулы следует, что если точка (t, ξ) принадлежит характеристике уравнения первого порядка, получаемого из исходного обратным преобразованием Фурье, то $t < 2^{-1}\xi^{-2}$.

Отмеченные особенности накладывают определенные ограничения на начальную функцию; их формулировки мы приведем в начале следующего пункта. Здесь же укажем только на очевидную необходимость требования компактности носителя $\check{u}_0$. Из этого условия также следует существование в последних двух примерах при достаточно малых t преобразования Фурье решений преобразованной задачи.

Пример 3. Рассмотрим следующее обобщение предыдущего примера:

$$\partial_t u(t,x) + x\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}(t)\partial_x^{2k+1}u + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}(t)(2k+1)\partial_x^{2k}u = 0,$$
$$(t,x) \in R_+ \times R, u|_{t=0} = u_0(x). \quad (7)$$

Применив к уравнению (7) обратное преобразование Фурье, получим

$$\partial_t \check{u}(t,\xi) + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}(t)(i\partial_\xi i^{2k+1}\xi^{2k+1}\check{u} + (2k+1)i^{2k}\xi^{2k}\check{u}) = 0, \quad (t,\xi) \in (R_+ \times R),$$

то есть

$$\partial_t \check{u}(t,\xi) + \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}a_{2k+1}(t)\xi^{2k+1}\right)\partial_\xi \check{u}(t,\xi) = 0, \quad (t,\xi) \in (R_+ \times R), \quad \check{u}|_{t=0} = \check{u}_0(\xi). \quad (8)$$

Задача (8) решается с помощью метода характеристик. Характеристики уравнения (8) определяются как фазовые кривые следующей системы (записанной в симметричной форме):

$$dt = \frac{d\xi}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}a_{2k+1}(t)\xi^{2k+1}}. \quad (9)$$

Пусть $g(t,\xi)$ — какой-то первый интеграл системы (9). Тогда $f(g(t,\xi))$, где f определяется из равенства $\check{u}_0(\xi) = f(g(0,\xi))$, является решением задачи (8), а функция $F(f(g(t,\xi)))(t,x)$ является решением (комплекснозначным) задачи (7).

В предыдущем примере коэффициенты уравнения были подобраны так, что после применения к ним обратного преобразования Фурье получалось одно уравнение 1-го порядка. Очевидно, что в общем случае преобразование Фурье приводит к системе из двух уравнений. Учитывая, что для систем отсутствуют достаточно общие методы поиска решений, ниже мы ограничимся только теми уравнениями, которые приводятся преобразованием Фурье к системам типа Коши — Римана. Иллюстрацией к ним служит следующий пример.

Пример 4. Рассмотрим

$$\partial_t u(t,x) + x\partial_x^2 u(t,x) + 2\partial_x u(t,x) = 0, \quad u(t,x)|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R. \quad (10)$$

Отсюда получаем $\partial_t \check{u}(t,\xi) - i\xi^2\partial_\xi \check{u}(t,\xi) = 0, \check{u}(t,\xi)|_{t=0} = \check{u}_0(\xi)$. Введем обозначения: $\mathrm{Re}\check{u} =: v(t,\xi)$, $\mathrm{Im}\check{u} =: w(t,\xi)$, $\mathrm{Re}\check{u}_0 =: v_0(\xi)$, $\mathrm{Im}\check{u}_0 =: w_0(\xi)$, и эта задача перепишется в виде

$$\begin{cases} v_t(t,\xi) + \xi^2 w_\xi(t,\xi) = 0, \\ w_t(t,\xi) - \xi^2 v_\xi(t,\xi) = 0, \\ v|_{t=0} = v_0, \quad w|_{t=0} = w_0. \end{cases}$$

Пусть $U(t,\xi), V(t,\xi)$ — решения задачи Коши для системы Коши — Римана:

$$\begin{cases} U_t(t,\xi) - V_\xi(t,\xi) = 0, \\ V_t(t,\xi) + U_\xi(t,\xi) = 0, \\ U|_{t=0} = v_0(\frac{1}{\xi}), \quad V|_{t=0} = w_0(\frac{1}{\xi}). \end{cases}$$

Очевидно, функции $v(t,\xi) := U(t,\frac{1}{\xi}), w(t,\xi) := V(t,\frac{1}{\xi})$ являются решениями предыдущей задачи. Решение последней задачи можно найти аналитически, продолжив на комплексную плоскость с выколотым нулем функцию, заданную на прямой, или воспользовавшись другими методами теории систем типа Коши — Римана. Функция $F(v(t,\xi) + iw(t,\xi))(t,x)$ является решением задачи (10).

Отметим некоторые особенности задач, приведенных в качестве примеров. Так как в основе метода, используемого в настоящей работе, лежит преобразование Фурье, то решение рассматриваемых уравнений должно существовать при всех вещественных x. В уравнении (10) первые два члена дают уравнение теплопроводности при $x < 0$, а при $x > 0$ — параболический оператор с обратным временем, который некорректен в сторону возрастания времени; третий же член уравнения подчинен первому. В уравнении (5) из первого примера первый и третий члены дают некорректный обратный оператор теплопроводности. Все это указывает на нетривиальность рассматриваемых уравнений.

2.2. Пространства начальных условий. Прежде чем переходить к обобщению примеров из п. 2.1, выясним, какие ограничения должны быть наложены на начальные условия. Для этого напомним еще раз геометрическую интерпретацию приведенной процедуры решения задачи (8): через каждую точку прямой $t = 0$, на которой задано начальное условие из (8), а уравнение (8) не предполагается выполненным, проводится характеристика уравнения (8), и сдвигами по ним начальных значений определяется $\check{u}(t,\xi)$. Но характеристика существует и единственна в какой-то окрестности каждой точки $(0,\xi)$, лежащей на прямой $t = 0$, и эта окрестность в общем случае зависит от самой точки, точнее от ξ. Если ξ пробегает какое-то ограниченное множество, то можно подобрать временно́й интервал, не зависящий от выбора ξ, на котором существует и единственно решение уравнения, соответствующее (9), с начальным условием $\xi(0)$, совпадающим с выбранной точкой ξ, то есть $\exists T > 0$ такой, что на $(0,T)$ определен оператор сдвига по характеристикам. Например, в рассмотренном в п. 2.1 уравнении (6), если ξ пробегает $[\xi_0', \xi_0]$, то $T = 2^{-1}\xi_0^{-2}$, а для бесконечного полуинтервала $[\xi_0', +\infty)$ уже не существует какого-либо временно́го интервала, на котором можно было бы определить оператор сдвига по характеристикам (см. рисунок). Поэтому, так же как в [1], возникает необходимость в требовании компактности носителя $\check{u}_0(\xi)$, иначе при помощи (7) мы можем определить функцию $\check{u}(t,\cdot)$ только на какой-то ограниченной части области определения, а нам, чтобы получить $u(t,x)$, применив преобразование Фурье, нужно знать $\check{u}$ на всей области определения. Таким образом, начальная функция для рассматриваемых уравнений в частных производных должна быть Фурье-образом функций с компактным носителем. Такие функции описываются теоремой Пэли — Винера — Шварца [6]: *обобщенная функция умеренного роста* $\mu \in S'(R^n)$ *имеет компактный носитель* $\Leftrightarrow$ $\hat{\mu}$ *допускает аналитическое продолжение до целой функции* $\hat{\mu}(\zeta)$ *от* n *переменных, удовлетворяющей условию* $\exists c, m, r \in R : |\hat{\mu}(\zeta)| < c(1+|\zeta|)^m e^{r|\mathrm{Im}\zeta|}$ $\forall \zeta \in C^n$.

В качестве пространства начальных данных возьмем пространство $C^A(R^n)$ из [1], определяемое равенством

$$C^A(R^n) := \{\Phi|_{R^n} : (\Phi : C^n \to C \text{ — целая функция} : ((\mathrm{Im}\Phi(x) = 0 \ \forall x \in R^n) \\ \wedge(\exists c, m, r \in R : |\Phi(z)| < c(1+\|z\|_{C^n})^m e^{r\|\mathrm{Im}z\|_{R^n}} \quad \forall z \in C^n))\}. \qquad (11)$$

Вместо $C^A(R)$ будем использовать обозначение C^A. Заметим, что $\varphi \in C^A(R^n) \Leftrightarrow \exists \mu_0 \in \mathcal{E}'(R^n) : \varphi = \check{\mu}_0$, где $\mathcal{E}'(R^n)$ — пространство обобщенных функций с компактным носителем. Наряду с пространством $C^A(R^n)$ ниже учитывается более узкое пространство $C^A_F(R^n)$, в определении которого также используется один из вариантов теоремы Пэли — Винера. Грубо говоря, оно получается из (11) при $m = 0$; точное определение приводится ниже.

2.3. Некоторые обобщения. Рассмотрим аналог задачи (7) в случае произвольного числа пространственных переменных:

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{|\alpha| \le m_j, \alpha_j > 0} a_{\alpha j}(t) \partial_x^\alpha u + \sum_{|\alpha| \le p_j, \alpha_j = 0} b_{\alpha j}(t) \partial_x^\alpha u \right) + \\ + \sum_{j=1}^n \sum_{|\beta| \le m_j - 1} (\beta_j + 1) A_{\beta j}(t) \partial_x^\beta u = 0, \quad (t,x) \in (R_+ \times R^n), \\ u|_{t=0} = u_0(x) \in C^A(R^n), \qquad (12)$$

где $a_{\alpha j}(t) \equiv 0, b_{\alpha j}(t) \equiv 0$ при четных $|\alpha|$, $A_{\beta j} := a_{\beta_1 \cdots \beta_{j-1} \beta_j + 1 \beta_{j+1} \cdots \beta_n}$.

Так как в уравнении (12) при производных нечетного порядка от неизвестной функции стоят коэффициенты вида $x_i a(t)$, а при производных четного порядка коэффициенты зависят только от временной переменной, то после взятия обратного преобразования Фурье получим уравнение первого порядка, а не систему. А коэффициенты $A_{\beta j}$ определены так, чтобы преобразованное уравнение не содержало бы $\check{u}$.

Применив обратное преобразование Фурье к задаче (12), получим

$$\partial_t \check{u}(t,\xi) + i \sum_{j=1}^n \left(\partial_{\xi_j} \left(\sum_{|\alpha| \le m_j, \alpha_j > 0} i^{|\alpha|} a_{\alpha j}(t) \xi^\alpha \check{u} \right) + (\partial_{\xi_j} \check{u}) \sum_{|\alpha| \le p_j, \alpha_j = 0} i^{|\alpha|} b_{\alpha j}(t) \xi^\alpha \right) + \\ + \sum_{j=1}^n \sum_{|\beta| \le m_j - 1} i^{|\beta|} (\beta_j + 1) A_{\beta j}(t) \xi^\beta \check{u} = 0, \quad (t,\xi) \in (R_+ \times R^n), \quad \check{u}|_{t=0} = \check{u}_0(\xi).$$

Предпоследнее равенство перепишем в виде

$$\partial_t \check{u}(t,\xi) + \sum_{j=1}^{n} (\partial_{\xi_j} \check{u}) \left(\sum_{|\alpha|\le m_j, \alpha_j>0} i^{|\alpha|+1} a_{\alpha j}(t)\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|\le p_j, \alpha_j=0} i^{|\alpha|+1} b_{\alpha j}(t)\xi^\alpha \right) +$$
$$+\check{u} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{|\beta|\le m_j-1} i^{|\beta|}(\beta_j+1) A_{\beta j}(t)\xi^\beta - \sum_{|\alpha|\le m_j, \alpha_j>0} \alpha_j i^{|\alpha|-1} a_{\alpha j}(t)\xi^{\tilde{\alpha}} \right) = 0,$$

где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j - 1, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$. Последняя сумма, стоящая под последним знаком суммы по j — это результат дифференцирования ξ^α в выражении $i\partial_{\xi_j} \sum_{|\alpha|\le m_j, \alpha_j>0} i^{|\alpha|} a_{\alpha j}(t)\xi^\alpha \check{u}$, а результат дифференцирования $\check{u}$ учитывается в первой сумме по j. Очевидно, в силу связи между коэффициентами $A_{\beta j}$ и $a_{\alpha j}$ выражение, стоящее под знаком последней суммы по j, равно нулю. Таким образом, задача (12) сводится к следующей:

$$\partial_t \check{u}(t,\xi) + \sum_{j=1}^{n} g_j(t,\xi) \partial_{\xi_j} \check{u} = 0, \quad \check{u}|_{t=0} = \check{u}_0(\xi), \tag{13}$$

где

$$g_j(t,\xi) := \sum_{|\alpha|\le m_j, \alpha_j>0} (-1)^{\frac{|\alpha|+1}{2}} a_{\alpha j}(t)\xi^\alpha + \sum_{|\alpha|\le p_j, \alpha_j=0} (-1)^{\frac{|\alpha|+1}{2}} b_{\alpha j}(t)\xi^\alpha.$$

Заметим, что в общем случае $\check{u}_0(\xi)$ — обобщенная функция с компактным носителем. Возьмем произвольное $\gamma \in R_+$ так, чтобы выполнялось $B(0;\gamma) \supset \mathrm{supp}\check{u}_0(\xi)$, где $B(0;\gamma)$ — открытый шар в R^n с центром в нуле и радиусом γ. Выпишем характеристическую систему для уравнения (13):

$$\frac{d\xi_j}{dt} = g_j(t,\xi), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Интегральные кривые системы (14) — характеристики уравнения (13). Условия Коши для (14) таковы:

$$\xi|_{t=0} = \xi_0 \in \bar{B}(0;\gamma). \tag{15}$$

Будем рассматривать решения задачи (14), (15) как функцию не только от t, но и от ξ_0; через $S(t;\cdot)$ обозначим разрешающий оператор задачи (14), (15), $S(t;\xi_0)$ — значение решения задачи (14), (15) в момент времени t. Как указывалось в начале п. 2.2, $\exists T = T(\gamma) : \forall t \in [0,T]$ определен оператор $S(t)$ на $\bar{B}(0;\gamma)$. Так как правая часть системы (14) бесконечно дифференцируема по ξ, то $S(t,\cdot) \in C^\infty(B(0;\gamma); R^n)$. Очевидно, $S(\cdot; w) \in C^1([0,T]; R^n)$ $\forall w \in \bar{B}(0;\gamma)$. Как известно, $\partial_{\xi_{0k}} S_j =: \zeta_{jk}$ существуют для любых $\forall j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$ и удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\zeta_{jk}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\partial_{\xi_i} g_j)\zeta_{ik}, \\ \zeta_{jk}(0) = \begin{cases} 0, & j \ne k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \end{cases}$$

где g_j — правая часть j-го уравнения из (14). Таким образом, производная от $S(t,\cdot)$ равна матрице (ζ_{jk}), которая при $t = 0$ равна единичной матрице. Поэтому, уменьшая в случае необходимости T, получим, что $\det(\partial_w S(t,w)) > 0$

$\forall(t,w) \in [0,T] \times \bar{B}(0;\gamma)$. Отсюда с учетом теоремы об обратной функции в силу бесконечной дифференцируемости $S(t;\cdot)$ следует, что $S(t;\cdot)$ — C^∞-диффеоморфизм; $S(t;\cdot) : \bar{B}(0;\gamma) \to S(t;\bar{B}(0;\gamma)) =: \Omega(t)$ $\forall t \in [0,T]$; в силу свойств непрерывных отображений $\Omega(t)$ — связный компакт в R^n; по тем же причинам $S([0,T] \times \bar{B}(0;\gamma))$ — также связный компакт.

В случае, когда в (12) начальная функция $u_0(x)$ такова, что $\check{u}_0(\xi)$ непрерывно дифференцируема и финитна, то, как известно, функция $\check{u}_0(S^{-1}(t,\xi))$ является решением задачи (13), а решение задачи (12) имеет вид $F(\check{u}_0(S^{-1}(t,\xi)))(t,x)$. Чтобы записать аналог этой формулы в общем случае для $u_0(x) \in C^A(R^n)$, сделаем замену переменной в обобщенной функции $\check{u}_0(\xi)$. Получится некоторая новая обобщенная функция, вид которой подсказывает следующее интегральное соотношение:

$$\int_{B(0;\gamma)} f(x)\phi(S(t,x))\det(\partial_x S(t;x))dx = \int_{\Omega(t)} f(S^{-1}(t,z))\phi(z)dz.$$

Для точного построения этой функции возьмем $T = T(\gamma+\delta)$, где δ — любое положительное число, таким образом, чтобы $\forall t \in [0,T]$ на $\bar{B}(0;\gamma+\delta)$ был определен оператор $S(t)$. Рассмотрим линейный функционал $\mu(t)$ на $C_0^\infty(R^n)$, определяемый соотношением

$$\langle \mu(t,\cdot), \phi(\cdot)\rangle := \langle d(t;w)\mu_0(w), \psi(t;w)\rangle, \tag{16}$$

где $\mu_0(\cdot) := \check{u}_0(\cdot), \psi(t;\cdot), d(t;\cdot)$ — бесконечно дифференцируемые финитные продолжения на R^n функций $\phi(S(t;\cdot)) =: \tilde{\psi}(t;\cdot), \det(\partial_x S(t;x)) =: \tilde{d}(t,x)$, заданных на $B(0;\gamma), t \in [0,T]$; как было уже отмечено, $\det(\partial_x S(t;x)) > 0$. Если положить

$$\psi_1(t;x) := \begin{cases} \phi(S(t;x)), & \text{если } x \in B(0;\gamma+\delta), \\ 0, & \text{если } \ x \notin B(0;\gamma+\delta), \end{cases} \qquad t \in [0,T],$$

$$d_1(t;x) := \begin{cases} \det(\partial_x S(t;x)), & \text{если } x \in B(0;\gamma+\delta), \\ 0, & \text{если } \ x \notin B(0;\gamma+\delta), \end{cases} \qquad t \in [0,T],$$

то в качестве $\psi(t,\cdot)$ и $d(t;\cdot)$ можно взять усреднения по Соболеву функций $\psi_1(t,\cdot)$ и $d_1(t;\cdot)$, когда диаметр носителя ядра усреднения меньше чем δ. Очевидно, $\langle \mu_0(w), d(t;w)\psi(t;w)\rangle$ не зависит от способа продолжения $\tilde{\psi}, \tilde{d}$ в силу вложения носителя μ_0 в $B(0;\gamma)$. Заметим, что

$$\exists K \Subset R^n : \langle \mu(t), \phi\rangle = 0 \quad \forall t \in [0,T]\, \forall \phi \in C^\infty(R^n) : \ \mathrm{supp}\phi \subset R^n \setminus K.$$

Так же как в [1], доказывается, что функционал $\mu(t)$, определенный равенством (16), является обобщенной функцией с компактным носителем, порядок которой при любом $t \in [0,T]$ совпадает с порядком μ_0. Заметим, что в силу компактности носителя $\mu(t,\cdot)$ равенство (16) можно рассматривать и при любых $\phi \in C^\infty(R^n)$, при этом (16) определяет $\mu(t,\cdot) \in \mathcal{E}'$. Преобразование Фурье от $\mu(t,\cdot)$, как и от любой обобщенной функции с компактным носителем, является аналитической функцией и задается соотношением $\hat{\mu}(t,x) = \langle \mu(t,\cdot), e^{i(\cdot,x)}\rangle$. Легко видеть, перейдя к предельному соотношению для производной по t, что

$$\partial_t \langle \mu_0(w), d(t,w)e^{i(S(t,w),x)}\rangle = \langle \mu_0(w), \partial_t d(t,w)e^{i(S(t,w),x)}\rangle,$$

где $e^{i(S(t,w),x)}$ считается бесконечно дифференцируемо продолженной с $B(0;\gamma)$ на R^n, а $d(t;w)$ определено выше. Таким образом, функция

$$u(t,x) = \langle d(t,w)\check{u}_0(w), e^{i(S(t;w),x)}\rangle$$

непрерывно дифференцируема по t и аналитична по x. Проверим, что она является решением задачи (12). Для этого достаточно доказать, что функционал $\mu(t,\cdot)$ из (16) является решением задачи (13) в смысле теории обобщенных функций.

Исходя из общего подхода теории обобщенных функций, дадим следующее определение.

Определение. Обобщенную функцию $v(t,\cdot) \in \mathcal{D}'(R^n)$, зависящую от параметра t, будем называть *обобщенным решением* уравнения (13), если

$$\partial_t \langle v(t,\xi), \varphi(\xi)\rangle + \left\langle v(t,\xi), \sum_{j=1}^{n} g_j(t,\xi)\partial_{\xi_j}\varphi(\xi)\right\rangle = 0 \quad \forall \varphi(\xi) \in \mathcal{D}(R^n). \tag{17}$$

Проверим выполнимость (17) для $\mu(t,\cdot)$ из (16):

$$\forall \varphi(\xi) \in \mathcal{D}(R^n) \quad \partial_t \langle \mu(t,\xi), \varphi(\xi)\rangle + \left\langle \mu(t,\xi), \sum_{j=1}^{n} g_j(t,\xi)\partial_{\xi_j}\varphi(\xi)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}(\mu(t+\Delta,\xi) - \mu(t,\Delta), \varphi(\xi)\right\rangle + \left\langle d(t,\xi)\mu_0(\xi), \sum_{j=1}^{n} g_j(t,\xi)\partial_{\xi_j}\psi(t,\xi)\right\rangle =$$

$$= -\left\langle d(t,\xi)\mu_0(\xi), \partial_t\psi(t,\xi) - \sum_{j=1}^{n} g_j(t,\xi)\partial_{\xi_j}\psi(t,\xi)\right\rangle = -\left\langle d(t,\xi)\mu_0(\xi), \frac{d}{dt}\psi(t,\xi)\right\rangle =$$

$$= -\left\langle d(t,\xi)\mu_0(\xi), \frac{d}{dt}\varphi(S(t,\xi))\right\rangle = 0,$$

здесь ξ рассматривается как функция от t, которая при произвольном фиксированном η определяется из равенства $S(t,\xi) = \eta$. В итоге доказана следующая теорема.

Теорема. *Функция*

$$u(t,x) = \langle \check{u}_0(w), d(t,w)e^{i(S(t;w),x)}\rangle,$$

где S — разрешающий оператор задачи (14), (15), *является регулярным решением следующей задачи:*

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{|\alpha|\le m_j, \alpha_j>0} a_{\alpha j}(t)\partial_x^\alpha u + \sum_{|\alpha|\le p_j, \alpha_j=0} b_{\alpha j}(t)\partial_x^\alpha u \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\beta|\le m_j-1} (\beta_j+1)A_{\beta j}(t)\partial_x^\beta u = 0, \quad (t,x) \in (R_+ \times R^n),$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \in C^A(R^n),$$

где $a_{\alpha j}(t) \equiv 0, b_{\alpha j}(t) \equiv 0$ при $|\alpha| = 2k, A_{\beta j} := a_{\beta_1\cdots\beta_{j-1}\beta_j+1\beta_{j+1}\cdots\beta_n}$.

3. Формулы представления решений задачи Коши для уравнений типа (1) **с ненулевой правой частью.** Коэффициенты в уравнении из теоремы, приведенной выше, подобраны так, что после применения обратного преобразования Фурье оно переходит в однородное уравнение 1-го порядка, а именно в уравнение типа 2. В этом параграфе мы избавимся от такого жесткого требования.

Прежде чем перейти к общему случаю, рассмотрим примеры. В уравнении из задачи (5), рассмотренной в самом начале раздела 2, коэффициенты $x, 3$ заменим на $a \cdot x, b$, где $a \neq 0, b$ — произвольные числа, то есть запишем

$$\partial_t u(t,x) + ax\partial_x^3 u + b\partial_x^2 u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) \in C_F^A := \{\chi \in C^A : \check{\chi} \in C_0(R)\}.$$

Применив обратное преобразование Фурье, получим

$$\partial_t \check{u}(t,\xi) + a\xi^3 \partial_\xi \check{u} - c\xi^2 \check{u} = 0, \quad \check{u}|_{t=0} = \check{u}_0,$$

где $c = b - 3a$. Решим полученную задачу методом характеристик, рассматривая последнее уравнение (назовем его преобразованным уравнением) как квазилинейное (этот метод описан, например, в [3, с. 227–245]).

Преобразованному (полулинейному) уравнению поставим в соответствие следующее линейное уравнение: $\partial_t v + a\xi^3\partial_\xi v + c\xi^2 \check{u}\partial_{\check{u}} v = 0$, где неизвестная функция $v(t,\xi,\check{u})$ зависит от трех переменных $t, \xi, \check{u}$. Тогда, если $v = V(t,\xi,\check{u})$ — решение этого уравнения и $\partial_{\check{u}} V \neq 0$, то $\check{u}$, определяемая из равенства $V(t,\xi,\check{u}) = 0$ как функция от переменных t, ξ, является решением преобразованного уравнения, и любое решение преобразованного уравнения можно записать в виде последнего равенства. Находим решение v: характеристическая система имеет вид

$$dt = \frac{d\xi}{a\xi^3} = \frac{d\check{u}}{c\xi^2\check{u}};$$

найдя первые интегралы, получим

$$v = \Psi\left(\frac{\xi^2}{2at\xi^2+1}, \frac{\check{u}}{\xi^{\frac{c}{a}}}\right), \quad \Psi \in C^1(R^2).$$

Поэтому $\check{u}$ определяется из равенства

$$\Phi\left(\frac{\xi^2}{2at\xi^2+1}, \frac{\check{u}}{\xi^{\frac{c}{a}}}\right) = 0,$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\partial_2\Phi \neq 0$; т. е.

$$\check{u}(t,\xi) = \xi^{\frac{c}{a}} \phi\left(\frac{\xi^2}{2at\xi^2+1}\right), \quad \phi \in C^1(R).$$

Решение преобразованной задачи таково:

$$\check{u}(t,\xi) = (2at\xi^2+1)^{\frac{c}{2a}} \check{u}_0\left(\sqrt{\frac{\xi^2}{2at\xi^2+1}}\right).$$

Решение исходной задачи имеет вид

$$u(t,x) = \mathrm{Re} \int e^{ix\xi}(2at\xi^2+1)^{\frac{c}{2a}} \check{u}_0\left(\sqrt{\frac{\xi^2}{2at\xi^2+1}}\right) d\xi.$$

Так как начальная функция из класса C_F^A, то интеграл в последней формуле существует.

Действуя аналогично, можно выписать решение и в случае уравнений с ненулевой правой частью. Единственная дополнительная особенность, которая может возникнуть, — это необходимость формулировки ограничений на правую часть, которые гарантировали бы существование преобразования Фурье от решения преобразованной задачи. Проиллюстрируем это на примере. Рассмотрим

$$\partial_t u(t,x) + x\partial_x^3 u + 3\partial_x^2 u = w(x), \quad u|_{t=0} = u_0(x) \in C_F^A,$$

где функция $w(x)$ такова, что ее обратное преобразование Фурье равно $\xi^3 W(\xi)$, $W(\xi) \in C_0^\infty$, и $\int W(\xi)d\xi = 0$. Очевидно, такие функции существуют. Эти условия можно ослабить — мы их взяли для удобства вычислений. Применяя обратное преобразование Фурье, получим уравнение (преобразованное)

$$\partial_t \check{u}(t,\xi) + \xi^3 \partial_\xi \check{u} = \xi^3 W(\xi), \quad \check{u}|_{t=0} = \check{u}_0(\xi).$$

Так же как в предыдущем примере, находим общее решение вспомогательного линейного уравнения $\partial_t v + \xi^3 \partial_\xi v + \xi^3 W(\xi) \partial_{\check{u}} v = 0$. Затем, приравняв его нулю, находим общее решение преобразованного уравнения в неявном виде: $\Phi\left(\frac{\xi^2}{2t\xi^2+1}, \omega(\xi) - \check{u}\right) = 0$, где $\partial_2 \Phi \neq 0, \omega(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} W(\eta)d\eta$. Решение преобразованной задачи таково:

$$\check{u}(t,\xi) = \check{u}_0\left(\sqrt{\frac{\xi^2}{2t\xi^2+1}}\right) - \omega\left(\sqrt{\frac{\xi^2}{2t\xi^2+1}}\right) + \omega(\xi).$$

Взяв преобразование Фурье от правой части последнего равенства, которое существует в силу сделанных предположений, получим решение исходной задачи.

Рассмотрим теперь общий случай таких уравнений типа (1), что после применения обратного преобразования Фурье они переходят в линейное уравнение 1-го порядка (а не в систему), которое может быть и неоднородным. Общий вид подобных уравнений в случае одной пространственной переменной таков:

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{k=0}^{m} b_{2k}(t)\partial_x^{2k}\partial_t u + x\sum_{k=0}^{m} a_{2k+1}(t)\partial_x^{2k+1} u + \sum_{k=0}^{m} a_{2k}(t)\partial_x^{2k} u = f(t,x),$$
$$(t,x) \in (R_+ \times R). \quad (18)$$

В качестве пространства начальных условий возьмем

$$C_{F^l}^A(R^n) := \{\Phi|_{R^n} | \Phi : C^n \to C - \text{целая функция} : ((\mathrm{Im}\Phi(x) = 0 \ \forall x \in R^n) \wedge$$
$$(\exists c = c(\Phi), r \in R : |\Phi(z)| < c(1+|z|)^{-l} e^{r|\mathrm{Im} z|} \ \forall z \in C^n)\}, \quad C_{F^1}^A := C_F^A(R). \quad (19)$$

Рассмотрим уравнение (18) с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x) \in C_{F^1}^A. \quad (20)$$

Общий случай, когда в (20) вместо $C_{F^1}^A$ стоит C^A, будет рассмотрен в конце этого раздела. Применив обратное преобразование Фурье по x к (18), (20), получим

$$\varphi_1(t,\xi)\partial_t \check{u}(t,\xi) + \varphi_2(t,\xi)\partial_\xi \check{u}(t,\xi) = \varphi_3(t,\xi,\check{u}), \quad \check{u}|_{t=0} = \check{u}_0(\xi), \quad (21)$$

где

$$\varphi_1(t,\xi)=1+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k b_{2k}(t)\xi^{2k},\quad \varphi_2(t,\xi)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}a_{2k+1}(t)\xi^{2k+1},$$

$$\varphi_3(t,\xi)=\check u\sum_{k=1}^{m}(-1)^k a_{2k+1}(t)(2k+1)\xi^{2k}+\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+1}a_{2k}(t)\xi^{2k}+F_x^{-1}[f(t,x)](t,\xi),$$

x в нижнем индексе у F указывает, что обратное преобразование Фурье берется по x.

Пусть $\psi_1(t,\xi,\check u)$, $\psi_2(t,\xi,\check u)$ — два функционально независимых первых интеграла системы

$$\frac{dt}{\varphi_1(t,\xi)}=\frac{d\xi}{\varphi_2(t,\xi)}=\frac{d\check u}{\varphi_3(t,\xi,\check u)}. \tag{22}$$

Тогда функция $\check u(t,\xi)$, определяемая по теореме о неявной функции из соотношений $\Phi(\psi_1(t,\xi,\check u),\psi_2(t,\xi,\check u))=0$, $\Phi(\psi_1(0,\xi,\check u_0),\psi_2(0,\xi,\check u_0)=0$, где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\partial_{\check u}\chi\neq 0$, где $\chi(t,\xi,\check u):=\Phi(\psi_1(t,\xi,\check u),\psi_2(t,\xi,\check u))$, является решением задачи (21). Взяв преобразование Фурье от $\check u(t,\xi)$, получим решение задачи (18), (20).

Приведем геометрическую интерпретацию описанной процедуры решения задачи (21). Пусть $\Gamma=\{(0,\xi,\check u_0(\xi)):\xi\in R\}$ — график начальной функции $\check u_0(\xi)$. Выпуская из каждой точки Γ характеристику уравнения (21), т. е. фазовую кривую системы (22), получим некоторую поверхность размерности 2. Эта поверхность в какой-то окрестности точки $(0,\xi,\check u_0(\xi))\in\Gamma$ будет графиком искомого решения $\check u(t,\xi)$, причем эта окрестность зависит от выбора точки на Γ, т. е. от выбора $(0,\xi,\check u_0(\xi))$. Пусть для определенности в (22) $\varphi_1(t,\xi)\neq 0$; перепишем систему (22) в следующем виде:

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=\dfrac{\varphi_2(t,\xi)}{\varphi_1(t,\xi)},\\[2mm] \dfrac{d\check u}{dt}=\dfrac{\varphi_3(t,\xi,\check u)}{\varphi_1(t,\xi)}.\end{cases} \tag{23}$$

Если $(\xi_0,\check u_0(\xi_0))$ пробегает произвольное ограниченное множество, то существует $T>0$ такое, что на $(0,T)$ существует единственное решение системы (23) с условием $(\xi(0),\check u(0))=(\xi_0,\check u_0(\xi_0))$. Поэтому здесь также существенно требование компактности носителя $\check u_0(\xi)$, так как нам необходимо знать $\check u$ на всей области определения, чтобы получить $u(t,x)$ преобразованием Фурье.

В случае произвольного числа пространственных переменных под рассматриваемый метод подпадает следующая задача:

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x)+&\sum_{\substack{\alpha:|\alpha|\text{четно},\\|\alpha|\le m}} b_\alpha(t)\partial_t\partial_x^\alpha u+\\ &+\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{\substack{\alpha(i):|\alpha(i)|\text{нечетно},\\|\alpha(i)|\le m}} a_{\alpha(i)}(t)\partial_x^{\alpha(i)}u+\sum_{\substack{\alpha:|\alpha|\text{четно},\\|\alpha|\le m}} a_\alpha(t)\partial_x^\alpha u=f(t,x),\end{aligned} \tag{24}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x)\in C^A_{F^1}(R^n), \tag{25}$$

n — число пространственных переменных. После применения к задаче (24), (25) обратного преобразования Фурье получим

$$\varphi(t,\xi)\partial_t\check{u}(t,\xi)+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t,\xi)\partial_{\xi_i}\check{u}(t,\xi)=\chi(t,\xi,\check{u}(t,\xi)), \tag{26}$$

$$\check{u}|_{t=0}=\check{u}_0(\xi), \tag{27}$$

где

$$\varphi(t,\xi)=1+\sum_{\substack{\alpha:|\alpha|\text{четно},\\ |\alpha|\le m}}(-1)^{\frac{|\alpha|}{2}}b_\alpha(t)\xi^\alpha,$$

$$\varphi_i(t,\xi)=\sum_{\substack{\alpha(i):|\alpha(i)|\text{нечетно},\\ |\alpha(i)|\le m}}(-1)^{\frac{|\alpha(i)|+1}{2}}a_{\alpha(i)}(t)\xi^{\alpha(i)}\ ,\ i=1,\dots,n,$$

$$\chi(t,\xi,\check{u}(t,\xi))=\sum_{\substack{\alpha:|\alpha|\text{четно},\\ |\alpha|\le m}}(-1)^{1+\frac{|\alpha|}{2}}a_\alpha(t)\xi^\alpha+F_x^{-1}[f(t,x)](t,\xi)+$$
$$+\check{u}(t,\xi)\cdot\sum_{\substack{\alpha(i):|\alpha(i)|\text{нечетно},\\ |\alpha(i)|\le m}}(-1)^{\frac{|\alpha(i)+1|}{2}}a_{\alpha(i)}(t)\xi^{\tilde{\alpha}(i)}\alpha(i)_i,$$

$\alpha(i)_i$ — i-я координата мультииндекса $\alpha(i)$, $\tilde{\alpha}(i)$ — мультииндекс, получаемый из $\alpha(i)$ заменой $\alpha(i)_i$ на $\alpha(i)_i-1$ при $\alpha(i)_i>0$, если же $\alpha(i)_i=0$, то $\tilde{\alpha}(i)=0$. В силу (25) $\check{u}_0(\xi)$ абсолютно непрерывна и финитна.

Пусть $\psi_1(t,\xi,\check{u}),\dots,\psi_n(t,\xi,\check{u})$ — функционально независимые первые интегралы системы

$$\frac{dt}{\varphi(t,\xi)}=\frac{d\xi_1}{\varphi_1(t,\xi)}=\dots=\frac{d\xi_n}{\varphi_n(t,\xi)}=\frac{d\check{u}}{\chi(t,\xi,\check{u})}.$$

Тогда функция $\check{u}(t,\xi)$, определяемая по теореме о неявной функции из соотношений $\Phi(\psi_1(t,\xi,\check{u}),\dots,\psi_n(t,\xi,\check{u}))=0,\ \Phi(\psi_1(0,\xi,\check{u}_0(\xi))),\dots,\psi_n(0,\xi,\check{u}_0(\xi)))=0$, где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция с $\partial_{\check{u}}\Phi\neq 0$, является решением задачи (26), (27). Взяв преобразование Фурье от $\check{u}(t,\xi)$, получим решение задачи (24), (25).

Рассмотрим теперь уравнение (24) со следующим начальным условием:

$$u|_{t=0}=u_0(x)\in C^A(R^n). \tag{28}$$

Применив к задаче (24), (28) обратное преобразование Фурье, получим уравнение (26) с начальным условием

$$\check{u}|_{t=0}=\check{u}_0(\xi)\in\mathcal{E}'(R^n). \tag{29}$$

Рассмотрим также нулевое начальное условие:

$$u|_{t=0}\equiv 0, \tag{30}$$

а также уравнение типа (13), соответствующее (26):

$$\varphi(t,\xi)\partial_t\check{u}(t,\xi)+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t,\xi)\partial_{\xi_i}\check{u}(t,\xi)=0. \tag{31}$$

В силу линейности задачи (26), (29) сумма решений задач (26), (30) и (31), (29) дает решение задачи (26), (29).

Итак, в соответствии с теоремой, приведенной в п. 2.3, функция

$$u(t,x)=\langle\check{u}_0(w),d(t,w)e^{i(S(t,w),x)}\rangle+\int v(t,\xi)e^{i(\xi,x)}d\xi$$

является решением задачи (24), (28); через $S(t,\cdot)$ обозначен разрешающий оператор задачи

$$\frac{d\xi_j}{dt}=\frac{\varphi_j(t,\xi)}{\varphi(t,\xi)},\ j=1,\dots,n;\quad \xi|_{t=0}=\xi_0\in\bar{B}(0;\gamma); \tag{32}$$

$\varphi(t,\xi)\neq 0$ (это соотношение выполняется в необходимой нам области, например, когда все $b_\alpha(t)$ непрерывны и $b_\alpha(0)=0$); интегральные кривые системы (32) — характеристики уравнения (24); $v(t,\xi)$ — решение задачи (26), (30). Оно, в соответствии со случаем (27), когда начальная функция $\check{u}_0(\xi)$ абсолютно непрерывна, определяется по теореме о неявной функции из соотношений $\Phi(\psi_1(t,\xi,\check{u}),\dots,\psi_n(t,\xi,\check{u}))=0$, $\Phi(\psi_1(0,\xi,\check{u}_0(\xi))),\dots,\psi_n(0,\xi,\check{u}_0(\xi)))=0$, где $\partial_{\check{u}}\chi\neq 0$, $\chi(t,\xi,\check{u}):=\Phi(\psi_1(t,\xi,\check{u}),\dots,\psi_n(t,\xi,\check{u}))$.

Автор благодарен А. В. Фурсикову за консультации и ценные советы.

Литература

1. Гишларкаев В. И. Об одном способе представления решений задачи Коши для линейных уравнений в частных производных. *Матем. сб.* **209** (2), 82–101 (2018). https://doi.org/10.4213/sm8816

2. Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. *Уравнения с частными производными первого порядка.* Москва, Изд-во МГУ (1999).

3. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. *Дифференциальные уравнения.* Москва, Наука (1980).

4. Полянин А. Д. *Справочник по линейным уравнениям математической физики.* Москва, Физматлит (2005).

5. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, пер. с англ. Т. 2. Москва, Мир (1967).

6. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, пер. с англ. Т. 1. Москва, Мир (1988).

Статья поступила в редакцию 18 декабря 2021 г.;
доработана 14 февраля 2022 г.;
рекомендована к печати 3 марта 2022 г.

Контактная информация:

Гишларкаев Ваха Исаевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; vakhag@mail.ru

Fourier transform method for partial differential equations: Formulas for representing solutions to the Cauchy problem

V. I. Gishlarkaev

Chechen State University,
32, ul. Sharipova, Grozny, 364093, Russian Federation

For citation: Gishlarkaev V. I. Fourier transform method for partial differential equations: Formulas for representing solutions to the Cauchy problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 3, pp. 480–494.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.309 (In Russian)

The paper proposes a method for solving the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients of a special form, allowing, after applying the (inverse) Fourier transform, to rewrite the original problem as a Cauchy problem for first-order partial differential equations. The resulting problem is solved by the method of characteristics and the (direct) Fourier transform is applied to its solution. And for this it is necessary to know the solution of the Cauchy problem for a first-order equation in the entire domain of definition. This leads to the requirement that the support of the (inverse) Fourier transform of the initial function of the original problem be compact, and to describe the class of initial functions, it is necessary to use Paley — Wiener — Schwarz-type theorems on Fourier-images, including distributions. The presentation of solutions in the form of the Fourier transform of some function (distribution), determined by the initial function, is presented. A general form of the evolutionary equation is written down, which, when the described method is applied, leads to the consideration of a homogeneous first-order equation, and a formula for the solution of the Cauchy problem in this general case is derived. The general form of the equation is written down, which leads to the consideration of a first-order inhomogeneous equation, and a formula for solutions it is derived. Particular cases of these equations are the well-known equations that are encountered in the description of various processes in physics, chemistry, and biology.

Keywords: Fourier transform, distributions with compact support, method of characteristics.

References

1. Gishlarkaev V. I. A method for representing solutions of the Cauchy problem for linear partial differential equations. *Mat. Sb.* **209** (2), 82–101 (2018). https://doi.org/10.4213/sm8816 (In Russian) [Eng. transl.: *Sbornik: Mathematics* **209** (2), 222–240 (2018). https://doi.org/10.1070/SM8816].

2. Goritsky A. Yu., Kruzhkov S. N., Chechkin G. A. *First-order partial differential equations.* Moscow, Moscow University Press (1999). (In Russian)

3. Tikhonov A. N., Vasileva A. B., Sveshnikov A. G. *Differential equations.* Moscow, Nauka Publ. (1980). (In Russian)

4. Polyanin A. D. *Handbook of linear equations of mathematical physics.* Moscow, Fizmatlit Publ. (2001). (In Russian)

5. Feller W. *An introduction to probability theory and its applications.* Vol. 2. New York, London, Sydney, John Wiley & Sons (1966). [Rus. ed.: Feller W. *Vvedenie v teoriju verojatnostej i ee prilozhenija.* Vol. 2. Moscow, Mir Publ. (1967)].

6. Hormander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis.* In Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 256. Berlin, Springer-Verlag (1983). [Rus. ed.: Hormander L. *Analiz linejnyh differencial'nyh operatorov s chastnymi proizvodnymi.* Vol. 1. Moscow, Mir Publ. (1988)].

Received: December 18, 2021
Revised: February 14, 2022
Accepted: March 3, 2022

Author's information:

Vakha I. Gishlarkaev — vakhag@mail.ru