УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3
MSC 60G40

Распределение времени до начала финальной остановки диффузионного полумарковского процесса на интервале с недостижимыми границами

Б. П. Харламов, С. С. Расова

Институт проблем машиноведения РАН,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Для цитирования: *Харламов Б. П., Расова С. С.* Распределение времени до начала финальной остановки диффузионного полумарковского процесса на интервале с недостижимыми границами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 517–526. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.312

Рассматривается одномерный процесс с непрерывными траекториями, заданный на неотрицательной полуоси, обладающий однородным марковским свойством относительно момента первого выхода из любого открытого интервала (полумарковский процесс). За исключением слова «непрерывные» это определение совпадает с определением полумарковского процесса с кусочно-постоянными траекториями. Непрерывные полумарковские процессы служат математической моделью многих физических, биологических и социальных явлений. Диффузионность процесса состоит в том, что вероятность первого выхода на любую из двух границ симметричной окрестности начальной точки процесса стремится к $1/2$ при стремлении диаметра этой окрестности к нулю. Исследуется распределение момента начала финального интервала постоянства выборочной траектории процесса. Так называется бесконечный интервал постоянства, определение которого опирается на вид полумарковских переходных производящих функций процесса. Получено представление производящей функции этого распределения в интегральном виде. Подынтегральное выражение этого представления объясняет смысл квадратичного члена разложения полумарковской производящей функции процесса по степеням диаметра симметричной окрестности начальной точки процесса при стремлении этого диаметра к нулю. А именно, траектории процесса не имеют финального интервала постоянства тогда и только тогда, когда коэффициент этого квадратичного члена равен нулю.

Ключевые слова: непрерывный полумарковский процесс, полумарковская цепь, финальный интервал постоянства, дифференциальное уравнение, преобразования Лапласа, недостижимая граница, интегральное представление.

1. Полумарковский метод. В настоящей работе рассматриваются так называемые полумарковские процессы диффузионного типа, переходные производящие функции которого удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}f'' + A(x)f' - B(\lambda, x)f = 0, \tag{1}$$

где $A(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $B(\lambda, x)$ — неотрицательная функция, непрерывная по второму аргументу и имеющая вполне монотонную производную по первому аргументу $\lambda \geq 0$ (см. [1, с. 167]).

Полумарковским процессом мы называем случайный процесс, обладающий однородным марковским свойством относительно момента первого выхода из любого открытого множества (см., например, [1] и [2]). В этом кратком определении подразумевается, что процесс принимает значения в топологическом пространстве и что его область определения допускает односторонние сдвиги. Только в этом случае можно корректно применять термин «момент марковской регенерации» — марковский момент, относительно которого выполняется однородное марковское свойство. Класс полумарковских процессов диффузионного типа привлекает к себе внимание как благодаря прикладной стороне, т. е. многочисленным приложениям, так и благодаря математической стороне, т. е. специальным методам исследования, генерирующим новые задачи.

Область применения таких процессов — моделирование физических, биологических и социальных явлений — та же, что и у марковских диффузионных процессов, которые составляют более узкий класс. Но полумарковское моделирование возможно и тогда, когда марковское свойство представляется слишком обременительным, например когда нужно принимать в расчет замену времени, не сохраняющую марковское свойство процесса. Такая ситуация возникает, например, в хроматографии (см. [3]). В этом популярном методе исследования предполагается, что при движении частиц анализируемого вещества в длинном и тонком сосуде исходный броуновский характер движения превращается в движение с остановками — конечными интервалами постоянства, которые возникают в результате пребывания частиц на стенках сосуда. Движение происходит в результате чередования интервалов адсорбции и моментов десорбции.

Специальная методика исследования возникла благодаря невозможности использовать для немарковского процесса аппарат теории марковских процессов. Поэтому для вычисления даже стандартных функционалов приходится применять нестандартный набор полумарковских переходных функций. Однако существуют задачи, когда такой полумарковский подход оказывается полезным и для марковских процессов. Особенно наглядно польза полумарковского подхода проявляется в задачах о замедленном отражении и вообще — в задачах о поведении процесса на границах между различными средами.

В настоящей работе рассматривается случайный процесс, выборочные траектории которого имеют предел на бесконечности. Частным случаем существования такого предела является наличие так называемой финальной остановки процесса — интервала постоянства бесконечной длины. Особый интерес представляет ситуация, когда не существует никакого сигнала к началу этого бесконечного интервала — он начинается спонтанно, как результат некоторого случайного выбора. Такой момент начала финальной остановки не является марковским моментом относительно натуральной фильтрации.

Нас будет интересовать также значение процесса после начала финальной остановки (см. [4]). Эта точка фазового пространства имеет большое прикладное значение. Достаточно заметить, что в результате таких остановленных движений накапливаются горы осадочной породы на Земле. Недостаток концептуальной модели такого физического процесса состоит в том, что она не является марковской.

В теории марковских процессов роль начала финальной остановки играет момент обрыва траектории процесса. Момент обрыва может быть непредсказуем относительно натуральной фильтрации. Чтобы сделать момент обрыва марковским моментом, его исследователю Е. Б. Дынкину пришлось изменить само понятие измеримости (см. [5, с. 116]). В модели Дынкина момент обрыва задается априори, еще до определения переходных вероятностей марковского процесса. Существенная разница между марковским процессом с обрывом и полумарковским процессом с финальной остановкой возникла бы, если бы мы применили для выбора модели статистический метод, например если бы мы по величине и распределению накопленной массы вещества судили о финальном распределении случайного процесса. Тем самым мы использовали бы еще один вариант метода Монте-Карло для решения дифференциального уравнения.

2. Случайный процесс и его атрибуты. Каждый случайный процесс рассматривается далее как случайный элемент измеримого пространства $\mathcal{D}$ функций $\xi : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$, непрерывных справа и имеющих предел слева в каждой точке $t > 0$. Предполагается, что на $\mathcal{D}$ определены метрика Скорохода (точнее — Стоуна — Скорохода) и борелевская сигма-алгебра $\mathcal{F}$ подмножеств множества $\mathcal{D}$, совпадающая, как известно, с сигма-алгеброй, порожденной натуральной фильтрацией $(\mathcal{F}_t)$. Количественное описание случайного процесса задается его вероятностной мерой или согласованным семейством вероятностных мер.

Популярным представлением случайного процесса является функция от двух аргументов $X(t,\xi) \equiv X_t(\xi)$. Такое обозначение обычно сокращают до $X(t) \equiv X_t$. Это означает, что случайный процесс может быть представлен семейством функций (X_t) одного аргумента, где $X_t(\xi) \equiv \xi(t)$. Семейство функций (X_t) согласовано с семейством операторов сдвига θ_t, где θ_t отображает $\mathcal{D}$ в себя так, что при любых неотрицательных s и t справедливо $(X_s\theta_t)(\xi) \equiv X_{t+s}(\xi)$. Отсюда следует, что $\theta_t\theta_s(\xi) \equiv \theta_{t+s}(\xi)$.

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех измеримых неубывающих функций τ. На множестве $\tau < \infty$ определим функцию X_τ и оператор θ_τ, где

$$X_\tau(\xi) \equiv X_{\tau(\xi)}(\xi), \qquad \theta_\tau(\xi) \equiv \theta_{\tau(\xi)}(\xi),$$

а также функцию

$$\tau \dot{+} \tau_1 \equiv \tau + \tau_1\theta_\tau,$$

где $\tau_1 \in \mathcal{T}$. Заметим, что операция $\dot{+}$ ассоциативна, но не перестановочна. При $\tau \dot{+} \tau_1 < \infty$ из определения следует

$$\theta_{\tau\dot{+}\tau_1} = \theta_{\tau_1}\theta_\tau, \qquad X_{\tau\dot{+}\tau_1} = X_{\tau_1}\theta_\tau. \tag{2}$$

Докажем последнее равенство. Имеем

$$X_{\tau\dot{+}\tau_1}(\xi) = X_{\tau(\xi)+\tau_1\theta_\tau(\xi)}(\xi) = X_{\tau_1\theta_\tau(\xi)}(\theta_\tau(\xi)) = X_{\tau_1}(\theta_\tau(\xi)),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим одномерный случайный процесс $X(t)$ $(t \geq 0)$ со значениями в некотором интервале $\Delta_0 \equiv (a_0, b_0)$. Пусть (P_x) $(x \in \Delta_0)$ — семейство распределений (вероятностных мер) процесса, индексированное начальными точками процесса: $P_x(X(0) = x) = 1$.

Обозначим через σ_Δ оператор первого выхода из множества $\Delta \subset \Delta_0$. Таким образом, рассматривается отображение $\sigma_\Delta : \mathcal{D} \mapsto [\mathbb{R}_+] \equiv [0, \infty]$, где

$$\sigma_\Delta(\xi) \equiv \inf\{t \geq 0 : \xi(t) \notin \Delta\};$$

и, по определению, $\sigma_\Delta(\xi) = \infty$, если множество в фигурных скобках пусто. Известно, что σ_Δ является марковским моментом относительно натуральной фильтрации (см. [6, с. 194]).

3. Полумарковский процесс. Для марковского момента τ стандартным образом определяем сигма-алгебру $\mathcal{F}_\tau$ всех событий, предшествующих этому моменту.

Марковское свойство относительно марковского момента τ проще всего определить в терминах математических ожиданий относительно семейства вероятностных мер P_x. Момент τ называется моментом марковской регенерации, если

$$E_x(f_1(f_2\theta_\tau);\ \tau < \infty) = E_x(f_1\, E_{X(\tau)}(f_2);\ \tau < \infty),$$

где f_1 — $\mathcal{F}_\tau$-измеримая и f_2 — $\mathcal{F}$-измеримая функции.

Семейство вероятностных мер P_x называется согласованным, если у него существует хотя бы один нетривиальный момент марковской регенерации.

Случайный процесс, задаваемый согласованным семейством P_x, называется полумарковским на множестве Δ_0, если для любого открытого множества $\Delta \subset \Delta_0$ марковский момент σ_Δ является моментом марковской регенерации этого семейства.

Известно, что для такого процесса любая конечная итерация таких моментов первого выхода также является моментом марковской регенерации.

Пусть $\Delta = (a, b)$, где $a_0 \leq a < b \leq b_0$. Обозначим

$$g_\Delta(\lambda, x) = E_x(\exp(-\lambda\sigma_\Delta);\ \sigma_\Delta < \infty,\ X(\sigma_\Delta) = a),$$

$$h_\Delta(\lambda, x) = E_x(\exp(-\lambda\sigma_\Delta);\ \sigma_\Delta < \infty,\ X(\sigma_\Delta) = b),$$

где $\lambda \geq 0$. Это так называемые переходные производящие функции процесса.

Из полумарковского свойства процесса следует, что

$$g_{\Delta_2}(\lambda, x) = g_{\Delta_1\text{‘}}(\lambda, x) g_{\Delta_2}(\lambda, c) + h_{\Delta_1\text{‘}}(\lambda, x) g_{\Delta_1\text{‘}}(\lambda, d), \tag{3}$$

$$h_{\Delta_2}(\lambda, x) = g_{\Delta_1\text{‘}}(\lambda, x) h_{\Delta_2}(\lambda, c) + h_{\Delta_1\text{‘}}(\lambda, x) h_{\Delta_1\text{‘}}(\lambda, d), \tag{4}$$

где $\Delta_1 \equiv (c, d)$, $\Delta_2 \equiv (a, b)$ и $\Delta_1 \subset \Delta_2$.

Рассмотрим $\zeta(\xi) = \inf(t_0 > 0 : (\forall t > t_0)\, \xi(t) = \xi(t_0))$. Такой случайный момент называется моментом начала финального интервала постоянства. Он не является марковским моментом, но является терминальным моментом. Это означает, что для любого $\tau \in \mathcal{T}$ на множестве $\tau < \infty$ справедливо равенство

$$\zeta = \tau \dot{+} \zeta.$$

3.1. Диффузионный полумарковский процесс. Пусть $\mathcal{C}$ — множество всех непрерывных функций $\xi \in \mathcal{D}$ с областью определения $[0, \infty)$.

Рассмотрим конечный интервал $\Delta_0 \equiv (a_0, b_0)$ с недостижимыми границами для полумарковского процесса с начальной точкой x внутри этого интервала. Недостижимость означает, что для любой начальной точки x процесса справедливо равенство $P_x(\sigma_{\Delta_0} = \infty) = 1$.

Определение. Непрерывный полумарковский процесс называется *диффузионным полумарковским процессом*, если при $r \to 0$

$$g_{(x-r,x+r)}(\lambda, x) = \frac{1}{2}(1 - A(x)r - B(\lambda, x)r^2) + o(r^2),$$

$$h_{(x-r,x+r)}(\lambda, x) = \frac{1}{2}(1 + A(x)r - B(\lambda, x)r^2) + o(r^2)$$

равномерно по $\lambda \geq 0$ и по x в каждом интервале (a, b), где $a_0 < a < b < b_0$.

Из работы [7] следует, что процесс является диффузионным полумарковским процессом тогда и только тогда, когда его переходные производящие функции удовлетворяют дифференциальному уравнению (1).

Условие 1. При любом $y \in (a_0, b_0)$ выполняются равенства

$$h_{(a_0,y)}(\lambda, y) = 1, \quad g_{(y,b_0)}(\lambda, y) = 1.$$

Условие 2. При любом $y \in \Delta_0$ существуют производные

$$h'_{(a_0,y)}(\lambda, y-) > 0, \quad g'_{(y,b_0)}(\lambda, y+) < 0.$$

Из определения функций $h_{(a_0,b)}(\lambda, y)$ и $g_{(a,b_0)}(\lambda, y)$ следует, что первая из них не убывает на интервале (a, b_0), а вторая не возрастает на интервале (a, b_0). Таким образом, условие 2 предписывает существование производных на соответствующих концах интервалов и их знаки.

Очевидно, что если выполняются условия 1 и 2, то при $r \to 0$ справедливы равенства

$$h_{(\alpha,y)}(\lambda, y - r) = 1 - h'_{(\alpha,y)}(\lambda, y-)r + o(r),$$

$$g_{(y,\beta)}(\lambda, y + r) = 1 + g'_{(y,\beta)}(\lambda, y+)r + o(r).$$

Теорема. *Пусть переходные производящие функции диффузионного полумарковского процесса удовлетворяют дифференциальному уравнению* (1) *и выполняются условия 1 и 2. Тогда производящая функция начала финального интервала постоянства процесса имеет интегральное представление*

$$E_x(\exp(-\lambda\zeta);\, \zeta < \infty) =$$

$$= \int_{a_0}^{x} \frac{2B(0, y)\, h_{(a,x)}(\lambda, y)}{h'_{(a,y)}(\lambda, y-) - g'_{(y,b)}(\lambda, y+)}\, dy + \int_{x}^{b_0} \frac{2B(0, y)\, g_{(x,b)}(\lambda, y)}{h'_{(a,y)}(\lambda, y-) - g'_{(y,b)}(\lambda, y+)}\, dy.$$

3.2. Доказательство теоремы. Пусть $\{c_1, \ldots, c_m\}$ $(m \geq 1)$ — конечная последовательность точек таких, что $a_0 < c_1 < \cdots < c_m < b_0$. При этом $c_k - c_{k-1} = L/(m+1)$, где $L \equiv b_0 - a_0$, $1 \leq k \leq m$, $c_0 \equiv a_0$. Такая последовательность точек порождает равномерное разбиение интервала Δ_0 на $m+1$ частей.

Это равномерное разбиение определяет так называемое правильное покрытие интервала Δ_0 интервалами Δ_k $(1 \leq k \leq m)$, где $\Delta_k \equiv (c_{k-1}, c_{k+1})$, $c_0 \equiv a_0$, $c_{m+1} \equiv b_0$.

Пусть $x \in \Delta_k$ при некотором k. Предыдущее правильное покрытие порождает последовательность пар $(\rho_n, X(\rho_n))$ $(n \geq 0)$, где $\rho_0 = 0$, $X(\rho_0) = x$, а другие члены (если есть) определяются правилом: 1) если $\rho_k < \infty$, то $\rho_{k+1} = \rho_k \dot{+} \sigma_{\Delta_{k+1}}$, 2) если

$\rho_k < \infty$ и $\rho_{k+1} < \infty$, то $X(\rho_{k+1}) = X(\sigma_{\Delta_{k+1}})\theta_{\rho_k}$, 3) если $\rho_k < \infty$ и $\rho_{k+1} = \infty$, то $X(\rho_{k+1})$ не определено (последовательность пар определена до номера k).

Благодаря полумарковскому свойству исходного процесса эти пары определяют полумарковскую цепь с финальной остановкой, вложенную в исходный полумарковский процесс. Эту цепь можно рассматривать как случайный процесс с кусочно-постоянными (разрывными) траекториями.

Обозначим через ζ_m начало финального интервала постоянства этой полумарковской цепи. Очевидно, что $P_x(\zeta_m \le \zeta,\ \overline{\lim}\zeta_m = \zeta) = 1$.

Пусть s таково, что $1 \le s \le m$, $c_s \ne x$. Рассмотрим $\{\Delta_{as}, \Delta_s, \Delta_{bs}\}$ — «неправильное» покрытие интервала Δ, состоящее из трех областей: $\Delta_{as} \equiv (a_0, c_s)$, $\Delta_s \equiv (c_{s-1}, c_{s+1})$, $\Delta_{bs} \equiv (c_s, b_0)$. Точки c_{s-1}, c_s, c_{s+1} назовем начальными точками этих интервалов.

Пусть τ_0 — момент первого достижения процессом точки c_s. Предыдущее неправильное покрытие порождает последовательность пар $(\tau_n, X(\tau_n))$, $n \ge 0$, где $\tau_0 = 0$, $X(\tau_0) = c_s$, а другие члены (если есть) определяются правилом:

1) если $\tau_k < \infty$ и $X(\tau_k) = c_{s-1}$, то $\tau_{k+1} = \tau_k \dot{+} \sigma_{\Delta_{as}}$,

2) если $\tau_k < \infty$ и $X(\tau_k) = c_{s+1}$, то $\tau_{k+1} = \tau_k \dot{+} \sigma_{\Delta_{bs}}$,

3) если $\tau_k < \infty$ и $X(\tau_k) = c_s$, то $\tau_{k+1} = \tau_k \dot{+} \sigma_{\Delta_s}$,

4) если $\tau_k = \infty$, то $\tau_{k+1} = \infty$ и $X(\tau_{k+1})$ не определено (последовательность пар определена до последнего номера k, при котором $\tau_k < \infty$).

Благодаря полумарковскому свойству исходного процесса эти пары определяют полумарковскую цепь с финальной остановкой, вложенную в исходный полумарковский процесс. Эту цепь можно рассматривать как случайный процесс с кусочно-постоянными (разрывными) траекториями. Однако начало финальной остановки этой полумарковской цепи в общем случае не совпадает с ζ_m, а число возможных состояний равно трем: c_{s-1}, c_s, c_{s+1}.

Распределение этой полумарковской цепи (заданной с точностью до начального состояния) определяется матрицей математических ожиданий $Q(\lambda)$ порядка 3×3 переходных производящих функций процесса:

$$Q(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} 0 & h_{\Delta(as)}(\lambda, c_{s-1}) & 0 \\ g_{\Delta(s)}(\lambda, c_s) & 0 & h_{\Delta(s)}(\lambda, c_s) \\ 0 & g_{\Delta(bs)}(\lambda, c_{s+1}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что c_{s-1} и c_{s+1} — начальные точки интервалов Δ_{as} и Δ_{bs} соответственно. Поэтому моменты первого выхода из этих интервалов возможны только через одну и ту же точку c_s.

Очевидно, что при $\tau_0 < \infty$ справедливо равенство $P_{c_s}(\tau_0 = 0,\ \tau_1 = \sigma_{\Delta_s}) = 1$. Относительно меры P_{c_s} справедливо утверждение: если $\tau_1 < \infty$, то $X(\tau_1) = c_{s-1}$ или $X(\tau_1) = c_{s+1}$, а также определено $\tau_2 \equiv \tau_1 \dot{+} \sigma_{\Delta as}$ или $\tau_2 \equiv \tau_1 \dot{+} \sigma_{\Delta bs}$ соответственно. В обоих этих случаях справедливо равенство $X(\tau_2) = c_s$, когда $\tau_2 < \infty$, что соответствует матрице $Q^2(\lambda)$, а именно, распределение случайной величины τ_2 определяется интегралом

$$Q^2_{22}(\lambda) = E_{c_s}(\exp(-\lambda\tau_2);\ \tau_2 < \infty,\ X(\tau_2) = c_2),$$

где $Q^n_{22}(\lambda)$ — элемент матрицы $Q^n(\lambda)$ $(n \ge 1)$, стоящий на пересечении второй строки и второго столбца. В данном случае $Q^1_{22} = 0$ и $Q^2_{22}(\lambda) = D_s(\lambda)$, где

$D_s(\lambda) \equiv h_{\Delta_{as}}(\lambda, c_{s-1})\, g_{\Delta_s}(\lambda, c_s) + h_{\Delta_s}(\lambda, c_s)\, g_{\Delta_b}(\lambda, c_{s+1})$. Очевидно, что $D_s(\lambda) < 1$ при $\lambda > 0$.

Заметим, что после попадания второго компонента вложенной полумарковской цепи в состояние c_s применяется правило построения вложенной полумарковской цепи с этим начальным состоянием. Учет этого свойства позволяет записать равенство

$$X(\tau_{2n}) = Q_{22}^{2n}(\lambda) = D_s^n(\lambda).$$

3.3. Регулярная последовательность равномерных разбиений исходного интервала. Назовем последовательность равномерных разбиений регулярной, если каждое следующее разбиение в этой последовательности получено в результате деления на две равные части элементов предыдущего разбиения.

Для нас важно то, что число точек разбиения в регулярной последовательности равномерных разбиений стремится к бесконечности, поэтому расстояния между соседними точками разбиений стремятся к нулю. Заметим, что каждая из внутренних точек разбиения $c_s = y$ (с меняющимся номером, но с фиксированным положением внутри исходного интервала) находится посередине каждого интервала из некоторой последовательности интервалов с убывающими длинами, а также что в правильном покрытии каждая точка из несчетного числа точек покрывается дважды. Исключение составляют только счетное множество границ интервалов покрытия и две краевые области разбиения интервала Δ, длины которых стремятся к нулю.

3.3.1. Определение членов, зависящих от начальной точки. При $\tau_0 < \infty$ разделим траекторию процесса на две части: одну — на интервале от нуля до τ_0 и вторую — от τ_0 до бесконечности. После этого мы используем терминальное свойство момента начала финальной остановки:

$$\zeta = \tau_0 \dot{+} \zeta,$$

откуда следует равенство

$$E_x(\exp(-\lambda\zeta);\, \zeta < \infty) = \\ = E_x(\exp(-\lambda\tau_0)(\exp(-\lambda\zeta)\theta_{\tau_0});\, \tau_0 < \infty,\, \zeta\theta_{\tau_0} < \infty,\, X(\zeta)\theta_{\tau_0} = c_s).$$

Пользуясь полумарковским свойством процесса, получаем

$$E_x(\exp(-\lambda\zeta);\, \zeta < \infty) = E_x(\exp(-\lambda\tau_0);\, \tau_0 < \infty)\, E_{c_s}(\exp(-\lambda\zeta);\, \zeta < \infty). \quad (5)$$

3.3.2. Определение члена, зависящего от точки c_s. Имеем равенства

$$E_{c_s}(\exp(-\lambda\zeta_m);\, \zeta_m < \infty,\, X(\zeta_m) = c_s) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} E_{c_s}(\exp(-\lambda\tau_n);\, \tau_n < \infty,\, X(\tau_n) = c_l,\, \tau_{n+1} = \infty) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} E_{c_s}(\exp(-\lambda\tau_{2n});\, \tau_{2n} < \infty,\, X(\tau_{2n}) = c_s,\, \tau_{2n+1} = \infty) = \\ = P_{c_s}(\tau_1 = \infty)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{c_s}(\exp(-\lambda\tau_{2n});\, \tau_{2n} < \infty,\, X(\tau_{2n}) = c_s)\right) = \\ = P_{c_s}(\tau_1 = \infty)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{22}^{2n}\right) = \frac{P_{c_s}(\tau_1 = \infty)}{1 - D_s(\lambda)}.$$

Получаем формулу для полумарковской цепи:

$$E_{c_s}(\exp(-\lambda\zeta_m);\, \zeta_m < \infty,\, X(\zeta_m) = c_s) = \frac{P_{c_s}(\tau_1 = \infty)}{1 - D_s(\lambda)}. \tag{6}$$

3.4. Интегральное представление. Рассмотрим отношение

$$\frac{P_{c_s}(\tau_1 = \infty)}{1 - D_s(\lambda)}. \tag{7}$$

Пусть $y = c_s$ и $r \equiv L/(m+1)$. Из определения диффузионного полумарковского процесса следует, что

$$g_{\Delta_s}(0, y) \equiv g_{(y-r,y+r)}(0, y) = \frac{1}{2}\,(1 - A(y)r - B(0, y)r^2 + o(r^2)),$$

$$h_{\Delta_s}(0, y) \equiv h_{(y-r,y+r)}(0, y) = \frac{1}{2}\,(1 + A(y)r - B(0, y)r^2 + o(r^2))$$

равномерно по $y \in \Delta \equiv (a, b)$, где $A(x)$, $B(\lambda, x)$ — коэффициенты исходного дифференциального уравнения. Отсюда числитель определяется как

$$P_y(\tau_1 = \infty) \equiv 1 - h_{(y-r,y+r)}(0, y) - g_{(y-r,y+r)}(0, y) = B(0, y)r^2 + o(r^2).$$

В знаменателе имеем

$$D_s(\lambda) = h_{(a_0,c_s)}(\lambda, c_{s-1})\, g_{\Delta_s}(\lambda, c_s) + g_{(c_s,b_0)}(\lambda, c_{s+1})\, h_{\Delta_s}(\lambda, c_s).$$

Пусть $c_s - c_{s-1} = c_{s+1} - c_s = r$. Полагая

$$h_{(a_0,c_s)}(\lambda, c_{s-1}) = h_{(a_0,c_s)}(\lambda, c_s) - rh'_{(a_0,c_s)}(\lambda, c_s) + o(r),$$

$$g_{(c_s,b_0)}(\lambda, c_{s+1}) = g_{(c_s,b_0)}(\lambda, c_s) + rg'_{(c_s,b_0)}(\lambda, c_s) + o(r),$$

где первые члены этих формул Тейлора равны единице, получаем

$$1 - D_s(\lambda) = \frac{1}{2}\,(h'_{(a_0,y)}(\lambda, y-) - g'_{(y,b_0)}(\lambda, y+))r + o(r).$$

Следовательно,

$$\frac{2B(0, y)r^2 + o(r_2)}{(h'_{(a_0,y)}(\lambda, y-) - g'_{(y,b_0)}(\lambda, y+))r + o(r)} = \frac{2B(0, y)r + o(r)}{(h'_{(a_0,y)}(\lambda, y-) - g'_{(y,b_0)}(\lambda, y+))r + o(r)}\, r.$$

При этом дробь в последнем выражении при $r \to 0$ имеет предел, равный

$$\frac{2B(0, y)}{h'_{(a_0,y)}(\lambda, y-) - g'_{(y,b_0)}(\lambda, y+)}.$$

Учитывая множители, зависящие от x, суммируя последнее выражение по s, где $1 \le l \le m$, и переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$E_x(\exp(-\lambda\zeta);\ \zeta<\infty)=\lim_{m\to\infty}E_x(\exp(-\lambda\zeta_{2^m});\ \zeta_{2^m}<\infty)=$$
$$=\int_{a_0}^{x}\frac{2B(0,y)\,h_{(a_0,x)}(\lambda,y)}{h'_{(a,y)}(\lambda,y-)-g'_{(y,b_0)}(\lambda,y+)}\,dy+\int_{x}^{b_0}\frac{2B(0,y)\,g_{(x,b_0)}(\lambda,y)}{h'_{(a,y)}(\lambda,y-)-g'_{(y,b_0)}(\lambda,y+)}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 1. *Если выполняются неравенства*

$$\frac{h_{(a_0,x)}(\lambda,y)}{h'_{(a,y)}(\lambda,y-)-g'_{(y,b_0)}(\lambda,y+)}>0,\quad \frac{g_{(x,b_0)}(\lambda,y)}{h'_{(a,y)}(\lambda,y-)-g'_{(y,b_0)}(\lambda,y+)}>0$$

почти для всех $y\in\Delta_0$, *то исходный диффузионный полумарковский процесс не имеет бесконечного интервала постоянства тогда и только тогда, когда* $B(0,x)=0$ *почти для всех* $x\in\Delta_0$.

Литература

1. Харламов Б. П. *Непрерывные полумарковские процессы.* Санкт-Петербург, Наука (2001).
2. Harlamov B. P. *Continuous semi-Markov processes.* London, ISTE, Wiley (2008).
3. Harlamov B. P. Stochastic model of gas capillary chromatography. *Communications in Statistics — Simulation and Computation*, no. 41, 1023–1031 (2011).
4. Харламов Б. П. Финальное распределение диффузионного процесса с остановкой. *Записки научных семинаров ПОМИ*, № 431, 209–241 (2014).
5. Дынкин Е. Б. *Марковские процессы.* Москва, ФМ (1963).
6. Гихман И. И., Скороход А. В. *Теория случайных процессов.* Т. 2. Москва, Наука (1973).
7. Расова С. С., Харламов Б. П. Об одном локальном свойстве одномерного линейного дифференциального уравнения второго порядка. *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, № 2, 65–79 (2021).

Статья поступила в редакцию 24 января 2022 г.;
доработана 1 марта 2022 г.;
рекомендована к печати 3 марта 2022 г.

Контактная информация:

Харламов Борис Павлович — д-р физ.-мат. наук; b.p.harlamov@gmail.com
Расова София Станиславовна — канд. физ.-мат. наук; s.rasova@gmail.com

Time distribution from zero up to beginning of the final stop of semi-Markov diffusion process on interval with unattainable boundaries

B. P. Harlamov, S. S. Rasova

Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
61, Bolshoy pr. V. O., St Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Harlamov B. P., Rasova S. S. Time distribution from zero up to beginning of the final stop of semi-Markov diffusion process on interval with unattainable boundaries. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 3, pp. 517–526. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.312 (In Russian)

A one-dimensional process with continuous trajectories on non-negative semi-axis is considered. The process has the Markov property with respect to the first exit time from any open interval (semi-Markov process). This process is called to be diffusion if probability for its first exit point from any symmetric neighborhood of its initial point across any boundary tends to 1/2 as length of this neighborhood tends to zero. Time distribution from zero up to beginning of the final interval of constancy is investigated. This distribution depends on semi-Markov transition generating functions of the process. Representation for Laplace transform of this distribution is obtained in an integral form. The integrand of this representation explains sense of quadratic members of Tailor decomposition of a semi-Markov transition generating function by powers of diameter of symmetric neighborhood of the process initial point. Namely trajectory of the process has no any final interval of constancy if and only if coefficient of such a quadratic member is equal to zero.

Keywords: continuous semi-Markov process, semi-Markov chain, final interval of constancy, differential equation, Laplace transformation, unattainable boundary, integral representation.

References

1. Harlamov B. P. *Continuous semi-Markov processes.* St Petersburg, Nauka Publ. (2001). (In Russian)

2. Harlamov B. P. *Continuous semi-Markov processes.* London, ISTE, Wiley (2008).

3. Harlamov B. P. Stochastic model of gas capillary chromatography. *Communications in Statistics — Simulation and Computation*, no. 41, 1023–1031 (2011).

4. Harlamov B. P. Final distribution of a diffusion process with stop. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, no. 431, 209–241 (2014). (In Russian)

5. Dynkin E. B. *Markov processes.* Moscow, FM Publ. (1963). (In Russian)

6. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. *Theory of random processes.* Vol. 2. Moscow, Nauka Publ. (1973). (In Russian)

7. Rasova S. S., Harlamov B. P. On one local property of one-dimension linear differential equation of the second order. *Differential equations and control processes*, no. 2, 65–79 (2021). (In Russian)

Received: January 24, 2022
Revised: March 1, 2022
Accepted: March 3, 2022

Authors' information:

Boris P. Harlamov — b.p.harlamov@gmail.com
Sofia S. Rasova — s.rasova@gmail.com