УДК 517.98 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3
MSC 46B08; 46H05, 46H25

Ультрастепени банаховых алгебр

А. Эбадян, А. Джаббари

Университет Урмия, Иран, Урмия, ул. Бехешти (Данешга), 24

Для цитирования: *Эбадян А., Джаббари А.* Ультрастепени банаховых алгебр // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 527–541. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.313

В этой статье мы рассматриваем ультрастепени банаховых алгебр как банахово пространство и произведение $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ на втором сопряженном к банаховой алгебре. Для банаховой алгебры A мы показываем, что если существует непрерывное дифференцирование из A в себя, то существует непрерывное дифференцирование из $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ в него. Кроме того, мы показываем, что если существует непрерывное дифференцирование из A в X^{**}, где X — банахов A-бимодуль, то существует непрерывное дифференцирование из A в ультрастепени X, т. е. $(X)_{\mathcal{U}}$. Исследуется сверхаменабельность банаховых алгебр, и показано, что если всякое непрерывное дифференцирование из A в $(X)_{\mathcal{U}}$ является внутренним, то A сверхаменабельно. Также приводятся некоторые результаты, связанные с левыми (соответственно, правыми) множителями на $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$.

Ключевые слова: аменабельность, произведение Аренса, производная, множитель, ультрастепень, сверхаменабельность, сверхаменабельность персонажей.

1. Введение. Пусть A — банахова алгебра. Кроме того, пусть I — бесконечное множество индексов и $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на I. Следуя [1], мы определяем ультрастепень A относительно $\mathcal{U}$ следующим образом:

$$(A)_{\mathcal{U}} = \ell_\infty(I, A)/N_{\mathcal{U}},$$

где

$$\ell_\infty(I, A) = \left\{(a_i)_{i\in I} : a_i \in A \text{ и } \|(a_i)\|_\infty = \sup_i \|a_i\| < \infty\right\}$$

и

$$N_{\mathcal{U}} = \left\{(a_i)_{i\in I} \in \ell_\infty(I, A) : \lim_{\mathcal{U}} \|a_i\| = 0\right\}.$$

Ультрастепень A относительно $\mathcal{U}$ становится банаховым пространством с фактор-нормой. Если $(a_i)_{i\in I}$ представляет класс эквивалентности в $(A)_{\mathcal{U}}$, то $\|(a_i)_{i\in I} + N_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|_i\|$. Принцип локальной рефлексивности, основанный на конечномерном анализе подпространств в A^{**}, показывает, что A^{**} можно изометрически вложить в соответствии с

$$J_{\mathcal{U}} : A^{**} \longrightarrow (A)_{\mathcal{U}},$$

$$J_{\mathcal{U}}(F) = (a_i)_{\mathcal{U}} \in (A)_{\mathcal{U}},$$

так, что:

1) $w^* - \lim_{\mathcal{U}} \pi(a_i) = F$, где π — каноническое вложение A в его бидуальное A^{**};

2) $J_{\mathcal{U}}|_A$ — это каноническое вложение A в $(A)_{\mathcal{U}}$, заданное $J_{\mathcal{U}}(x) = (x_i)_{\mathcal{U}}$, где $x_i = x$ для всех $i \in I$ и $x \in A$;

3) $\|F\| = \|J_{\mathcal{U}}(F)\| = \lim_{\mathcal{U}} \|a_i\|$.

Если $F, G \in A^{**}$, то $(\pi(a_\alpha))_{\alpha \in I}$ и $(\pi(b_\beta))_\beta \in I'$ будут некоторыми сетями в $\pi(A)$ такими, что $F = w^* - \lim_\alpha \pi(a_\alpha)$ и $G = w^* - \lim_\beta \pi(b_\beta)$.

Для $f \in A^*$ определим:

1) $f_a(b) = f(ab)$ и $f^a(b) = f(ba)$,

2) $f_G(b) = G(f_b)$ и $f^G(b) = G(f^b)$,

3) $(F \bigcirc_1 G)(f) = F(f_G)$ и $(F \bigcirc_2 G)(f) = F(f^G)$

для всех $a, b \in A$ и $F, G \in A^{**}$. Произведения $\bigcirc_1$ и $\bigcirc_2$ — это два произведения Аренса на A^{**}, расширяющие исходное произведение на A [2–4] и A называется регулярным по Аренсу, если $\bigcirc_1 = \bigcirc_2$ на его бидуале.

Определим произведение на A^{**} следующим образом:

$$F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} G = w^* - \lim_{\mathcal{U}} \pi(a_i b_i) = w^* - \lim_{\mathcal{U}} J_{\mathcal{U}}(F) J_{\mathcal{U}}(G)$$

для всех $F, G \in A^{**}$. Более того, согласно [3, 4] имеем

$$\|F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} G\| \leq \|F\| \|G\|$$

для всех $F, G \in A^{**}$. Произведение $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ называется регулярным на A, если оно w^*-непрерывно по отдельности, и суперрегулярным, если $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ является регулярным для любых $\mathcal{U}$ и $J_{\mathcal{U}}$. Если произведение $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ регулярно на A, то A регулярна по Аренсу и, кроме того, $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})} = \bigcirc_1 = \bigcirc_2$ [4, предложение 6]. Если A коммутативна, то $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ коммутативна на своем бидуале, и это одно из различий между $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ и произведением Аренса [13].

Доус определил новую версию аменабельности, названную сверхаменабельностью [5]. Пусть A — банахова алгебра, тогда A называется сверхаменабельной, если каждая ультрастепень A аменабельна. Сверхаменабельность банаховых алгебр слабее стягиваемости и сильнее аменабельности банаховых алгебр [5, следствие 5.5].

Монфаред ввел характерную аменабельность банаховых алгебр в [6]. Вслед за Ху и соавторами [7] для любого $\varphi \in \sigma(A) \cup \{0\}$ обозначим через ${}_\varphi\mathcal{M}^A$ класс банаховых A-бимодулей X, для которых действие правого модуля A на X определяется равенством

$$a \cdot x = \varphi(a)x \qquad (a \in A, x \in X),$$

и обозначим через $\mathcal{M}_\varphi^A$ класс банаховых A-бимодулей X, для которых действие левого модуля A на X определяется равенством

$$x \cdot a = \varphi(a)x \qquad (a \in A, x \in X).$$

Банахова алгебра A называется аменабельной слева, если для всех $\varphi \in \sigma(A) \cup \{0\}$ и всех банаховых $X \in_\varphi \mathcal{M}^A$ каждое непрерывное дифференцирование $D : A \longrightarrow X^*$ является внутренним. Аменабельность правых характеров определяют аналогично, рассматривая банаховы A-бимодули $X \in \mathcal{M}_\varphi^A$, и A называется аменабельным характером, если левый и правый характеры поддаются.

Кроме того, согласно [8], банахова алгебра A φ-аменабельна ($\varphi \in \sigma(A) \cup \{0\}$), если существует ограниченный линейный функционал m на A^*, удовлетворяющий равенствам $m(\varphi) = 1$ и $m(f \cdot a) = \varphi(a)m(f)$ для всех $a \in A$ и $f \in A^*$. Следовательно, банахова алгебра A аменабельна по характеру тогда и только тогда, когда A

φ-аменабельна для любого $\varphi \in \sigma(A) \cup \{0\}$. Характерная аменабельность банаховых алгебр широко рассматривается многими авторами в некоторых статьях, например в [9–12].

Пусть A — банахова алгебра и $\varphi \in \sigma(A) \cup \{0\}$. Левой (правой) φ-диагональю для A называется такой элемент m из $A \widehat{\otimes} A$, что:

(i) $m \cdot a = \varphi(a)m$ $(a \cdot m = \varphi(a)m)$ для каждого $a \in A$;

(ii) $\varphi(\pi(m)) = 1$, где π — проективное отображение из $A \widehat{\otimes} A$ в A такое, что $\pi(a \otimes b) = ab$ для всех $a, b \in A$.

Банахова алгебра A называется φ-стягиваемой слева, если $H^1(A, X) = \{0\}$ для каждого $X \in_\varphi \mathcal{M}$. Кроме того, A называется стягиваемым слева характером, если он является φ-стягиваемым слева для каждого $\varphi \in \sigma(A) \cup \{0\}$.

Аналогично можно определить справа φ-стягиваемую и характерно стягиваемую справа банахову алгебры. Банахова алгебра A называется стягиваемой по характеру, если она стягиваема по характеру как слева, так и справа [7].

Отображение $T : A \longrightarrow A$ называется левым (соответственно, правым) мультипликатором, если $T(ab) = T(a)b$ (соответственно, $T(ab) = aT(b)$) для всех $a, b \in A$. Пусть $M_l(a)$ (соответственно, $M_r(a)$) обозначает алгебру всех ограниченных линейных левых (соответственно, правых) мультипликаторов на A. Для любых $a \in A$ имеем $L_a \in M_l(A)$ и $R_a \in M_r(A)$. Упорядоченная пара (S, T)-отображений из A в себя называется двойным множителем, если $xS(y) = T(x)y$ для всех $x, y \in A$.

В статье рассматриваются ультрастепени банаховых алгебр в различных аспектах. В разделе 2 мы доказываем существование расширения дифференцирования на банаховых алгебрах на их вторые сопряженные, снабженные произведением $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$. Также приводятся некоторые результаты, касающиеся выводов со значениями в сверхстепенях банаховых модулей.

В разделе 3 исследуется сверхаменабельность банаховых алгебр, и в качестве основного результата мы показываем, что если каждое непрерывное дифференцирование банаховой алгебры во все ультрастепени ее банаховых модулей обладает внутренним свойством **UD**, то банахова алгебра сверхаменабельна. Раздел 4 посвящен аменабельности ультрахарактеров банаховых алгебр.

В разделе 5 мы снабжаем второй сопряженный к A произведением $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ и исследуем левые (соответственно, правые) мультипликаторы. Для канонического отображения $\pi : A \longrightarrow A^{**}$ мы показываем, что если $\pi(A)$ является идеалом $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$, при некоторых условиях A^{**} равно прямому слагаемому двух подпространств.

Наконец, мы предлагаем несколько советов читателям, интересующимся сверхстепенями банаховых алгебр.

2. Производные с образами в ультрастепенях. Пусть A — банахова алгебра и $T : A \longrightarrow A$ — автоморфизм, тогда существует произведение $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ на A^{**} такое, что T^{**} является автоморфизмом [4, предложение 9]. Доус исследовал существование ультрафильтра $\mathcal{U}$ и $K : A^{**} \longrightarrow (A)_\mathcal{U}$ таких, что K является гомоморфизмом алгебр при некоторых условиях [13, предложение 4.3]. Кажется, что упомянутый результат останется верным, если мы удалим коммутативность A и предположим, что (e_α) является центральным приближенным тождеством, удовлетворяющим условиям, установленным в [13, предложение 4.3]. Теперь мы рассмотрим расширения производных на $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$. Следует отметить, что в этом разделе мы предполагаем, что $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ — ассоциативная алгебра.

Далее мы показываем, что если существует непрерывное дифференцирование банаховой алгебры A в нее, то его можно продолжить на $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$.

Предложение 1. *Пусть A — банахова алгебра, а $D : A \longrightarrow A$ — непрерывное дифференцирование. Тогда существует произведение $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ на A^{**} такое, что D^{**} является непрерывным дифференцированием на $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$.*

Доказательство. Для каждого $f \in A^*$ имеем

$$\begin{aligned}
&\left[D^{**}(F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} G) - (F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} D^{**}(G) + D^{**}(F) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} G)\right](f) = \\
&= (F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} G)(D^* f) - \left[F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} D^{**}(G) + D^{**}(F) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} G\right](f) = \\
&= \lim_{\mathcal{U}} [(D^* f)(a_i b_i) - f(a_i (D^{**} b)_i + (D^{**} a)_i b_i)] = \\
&= \lim_{\mathcal{U}} f(D(a_i b_i) - (a_i (D^{**} b)_i + (D^{**} a)_i b_i)) = \\
&= \lim_{\mathcal{U}} f(a_i D(b_i) + D(a_i) b_i - (a_i (D^{**} b)_i + (D^{**} a)_i b_i)) = \\
&= \lim_{\mathcal{U}} f(a_i D(b_i) - a_i (D^{**} b)_i) + \lim_{\mathcal{U}} f(D(a_i) b_i - (D^{**} a)_i b_i).
\end{aligned} \tag{1}$$

Существование J подтверждается обобщенным принципом локальной рефлексивности [3, 4, 14]. Для каждого $(\varepsilon_i)_{i \in I}$, такого что $\lim_{\mathcal{U}} \varepsilon_i = 0$, и каждого $(a_i)_{i \in I}$ имеем

$$\|(D^{**} a)_i - D(a_i)\| \leq \varepsilon_i \|D\| \|a_i\|. \tag{2}$$

Это означает, что

$$\begin{aligned}
&|f(a_i D(b_i) - a_i (D^{**} b)_i) + f(D(a_i) b_i - (D^{**} a)_i b_i)| \leq \\
&\leq |f(a_i D(b_i) - a_i (D^{**} b)_i)| + |f(D(a_i) b_i - (D^{**} a)_i b_i)| \leq \\
&\leq \|f\| \left(\|a_i\| \|D(b_i) - (D^{**} b)_i\| + \|D(a_i) - (D^{**} a)_i\| \|b_i\|\right) \leq \\
&\leq \|f\| \left(\varepsilon_i \|a_i\| \|D\| \|b_i\| + \varepsilon_i \|D\| \|a_i\| \|b_i\|\right) = 2\varepsilon_i \|f\| \|D\| \|a_i\| \|b_i\|,
\end{aligned}$$

для каждого $f \in A^*$. Таким образом, соотношение (1) дает 0. Это означает, что

$$\left[D^{**}(F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} G) - (F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} D^{**}(G) + D^{**}(F) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} G)\right](f) = 0 \tag{3}$$

для каждого $f \in A^*$. Поэтому D^{**} является непрерывным дифференцированием на $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$. □

Предложение 2. *Пусть A — регулярная банахова алгебра Аренса, и пусть $D : A \longrightarrow (A^{**}, \bigcirc_2)$ ($(A^{**}, \bigcirc_1)$) — непрерывный вывод. Тогда существуют ультрафильтр $\mathcal{U}$, отображение $K : A^{(4)} \longrightarrow (A^{**})_{\mathcal{U}}$ такое, что оно является изометрией и A^{**}-бимодульным гомоморфизмом и $K \circ D^{**} : A^{**} \longrightarrow (A^{**})_{\mathcal{U}}$ является непрерывным дифференцированием.*

Доказательство. Если рассматривать $(A^{**}, \bigcirc_2)$ как банахову алгебру, то $A^{(4)}$ становится банаховым A^{**}-бимодулем. Теперь применим [13, теорема 3.2]. Таким образом, существует отображение $K : A^{(4)} \longrightarrow (A^{**})_{\mathcal{U}}$ такое, что оно является изометрией и гомоморфизмом A^{**}-бимодулей. Регулярность Аренса A означает, что $D^{**} : A^{**} \longrightarrow A^{(4)}$ является непрерывным дифференцированием. Наконец, поскольку K является A^{**}-бимодульным гомоморфизмом, $K \circ D^{**}$ становится непрерывным дифференцированием из A^{**} в $(A^{**})_{\mathcal{U}}$. □

Аналогично приведенному выше результату, применяя [13, теорема 3.2], снова имеем утверждение.

Предложение 3. *Пусть A — банахова алгебра, X — банахов A-бимодуль и пусть $D : A \longrightarrow X^{**}$ — непрерывное дифференцирование. Тогда существуют ультрафильтр $\mathcal{U}$, отображение $K : X^{**} \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}$ такое, что оно является изометрией и гомоморфизмом A-бимодулей и $K \circ D : A \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}$ является непрерывным дифференцированием.*

Согласно предложению 3, если существует непрерывное дифференцирование банаховой алгебры A во второй сопряженный банахов A-бимодуль X, то можно найти непрерывное дифференцирование из A в ультрастепень X, т. е. $(X)_{\mathcal{U}}$. Теперь возникает следующий вопрос:

Вопрос 1. Если существует непрерывный вывод из A в $(X)_{\mathcal{U}}$, как мы можем найти непрерывный вывод из A в X^{**}, связанный с первым?

3. Сверхаменабельность. Пусть A — банахова алгебра, а X — банахова алгебра. Если вывод $D : A \longrightarrow X^{**}$ в предложении 3 внутренний, то $K \circ D : A \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}$ также внутренний. Более того, если A аменабельно, то любое дифференцирование типа $K \circ D : A \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}$ является внутренним. Доус изучал сверхаменабельность банаховых алгебр посредством существования ограниченных аппроксимативных диагональных сетей следующим образом.

Для банаховой алгебры A обозначим через $S_n(A)$ набор подмножеств размера $n \geq 1$ единичной сферы A. Пусть $C > 0$, $\varepsilon > 0$ и $n \geq 1$. Для $F \in S_N(A)$ имеем $F \subseteq D_n(A, C, \varepsilon)$, если существует последовательность положительных вещественных чисел (α_k) с $\sum_k \alpha_k \leq C$, и такое ε, что для каждого $P \in F$ существует $\tau = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \otimes b_k \in A \widehat{\otimes} A$ с

$$\|a \cdot \tau - \tau \cdot a\| \leq \varepsilon, \quad \|\Delta_A(\tau)a - a\| \leq \varepsilon$$

для каждого $a \in P$ и с $\|a_k\| \|b_k\| \leq \alpha_k$ [15, определение 5.3], где Δ_A — отображение из $A \widehat{\otimes} A$ в A такое, что $\Delta(a \otimes b) = ab$ для всех $a, b \in A$.

Но, если мы рассматриваем сверхаменабельность дифференцированиями, мы должны рассматривать дифференцирования из ультрастепеней банаховой алгебры в сопряженные любым ее банаховым бимодулям по определению аменабельности. Теперь рассмотрим дифференцирования банаховой алгебры в ультрастепень ее бимодуля.

Пусть A — банахова алгебра, а X — банахов A-бимодуль. Предположим, что $(X)_{\mathcal{U}}$ — ультрастепень X как оставшегося банахова A-бимодуля. Пусть $D : A \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}$ — дифференцирование. Мы хотим найти случаи, когда производное, такое как $D : A \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}$, является внутренним. Ясно, что такое дифференцирование является внутренним для любой стягиваемой банаховой алгебры. Пусть A — банахова алгебра, а X — произвольный банахов A-бимодуль. Если каждое дифференцирование $D : A \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}$ внутреннее, то можно предположить, что A обладает свойством **UD**.

На основании следующего результата мы показываем, что если всякое дифференцирование банаховой алгебры A в любую ультрастепень ее бимодулей внутреннее, то оно имеет ограниченную аппроксимативную единицу.

Лемма 1. *Пусть A — банахова алгебра со свойством* ***UD****. Тогда A имеет ограниченную аппроксимативную единицу.*

Доказательство. Предположим, что дифференцирование $D : A \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}$ внутреннее для любого банахова A-бимодуля X. Имеем $K(A^{**}) \subseteq (A^{**})_{\mathcal{U}}$, где K — гомоморфизм A-модулей [15, теорема 3.2]. Пусть $D : A \longrightarrow K(A^{**})$ — непрерывное дифференцирование, и пусть модульное действие A на $K(A^{**})$ таково:

$$a \cdot x = (ax_i)_{i \in I}, \quad x \cdot a = 0$$

для всех $a \in A$ и $x \in K(A^{**})$. Подобно доказательству предложения 1.6 из [16], A имеет ограниченную аппроксимативную единицу слева и такую же ограниченную аппроксимативную единицу справа. □

Проективное тензорное произведение на сверхстепени было исследовано Доусом в [15, раздел 4]. Пусть X и Y — банаховы пространства. Существует каноническое отображение $\psi_0 : (X)_{\mathcal{U}} \widehat{\otimes} (Y)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (X \widehat{\otimes} Y)_{\mathcal{U}}$ определяется с помощью тензорного свойства $\widehat{\otimes}$. Другими словами, $(X)_{\mathcal{U}} \widehat{\otimes} (Y)_{\mathcal{U}} \subseteq (X \widehat{\otimes} Y)_{\mathcal{U}}$ [15, раздел 4.1]. Пусть A — банахова алгебра, а $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на множестве индексов I. Рассмотрим отображение $\Delta : (A)_{\mathcal{U}} \widehat{\otimes} (A)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (A)_{\mathcal{U}}$ с $\Delta(a \otimes b) = ab$ для всех $a, b \in (A)_{\mathcal{U}}$.

Определение. Пусть A — банахова алгебра, а $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на множестве индексов I.

(i) Мы называем элемент M в $((A)_{\mathcal{U}} \widehat{\otimes} (A)_{\mathcal{U}})^{**}$ *ультравиртуальной диагональю для* A, если

$$a \cdot M - M \cdot a = 0, \quad \text{и} \quad a \cdot \Delta^{**}(M) = a$$

для каждого $a \in A$.

(ii) Назовем сеть m_α в $(A)_{\mathcal{U}} \widehat{\otimes} (A)_{\mathcal{U}}$ *ограниченной ультраприближенной диагональю для* A, если

$$a \cdot m_\alpha - m_\alpha \cdot a \longrightarrow 0, \quad \text{и} \quad a \cdot \Delta(m_\alpha) \longrightarrow a$$

для каждого $a \in A$.

В качестве характеристики сверхаменабельности можно написать утверждение.

Теорема 1. *Пусть A — банахова алгебра со свойством* ***UD****. Тогда применимы следующие утверждения, которые эквивалентны:*

(i) A сверхаменабельна;

(ii) Существует константа $C > 0$ такая, что для любых $n \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ существует конечное разбиение $S_n(A) = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ такое, что $A_i \in D_n(A, C, \varepsilon)$;

(iii) A имеет ограниченную ультравиртуальную диагональ;

(iv) A имеет ограниченную ультраприближенную диагональ.

Доказательство. Во-первых, мы показываем, что из свойства **UD** следует (iii). Пусть каждое дифференцирование $D : A \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}$ внутреннее, где X — банахов A-бимодуль, а $(X)_{\mathcal{U}}$ — его сверхстепень. Из леммы 1 следует, что A имеет ограниченную аппроксимативную единицу, скажем, (e_α). Предположим, что $E \in (A \widehat{\otimes} A)^{**}$ есть w^*-предел $(e_\alpha \otimes e_\alpha)$. Определим $D_1 : A \longrightarrow ((A)_{\mathcal{U}} \widehat{\otimes} (A)_{\mathcal{U}})^{**}$ с помощью $D_1(a) = a \cdot (E \cdot e_\alpha) - (E \cdot e_\alpha) \cdot a$ для каждого $a \in A$. Следует отметить, что $((A)_{\mathcal{U}} \widehat{\otimes} (A)_{\mathcal{U}})^{**} \cdot e_\alpha \subseteq ((A \widehat{\otimes})^{**})_{\mathcal{U}}$. Ясно, что $\Delta^{**}(D_1(A)) = 0$. Другими словами, $D_1(A) \subseteq \ker \Delta^{**} \subseteq (\ker \Delta^{**})_{\mathcal{U}}$. Очевидно, $\ker \Delta^{**}$ — банахов A-бимодуль, а $(\ker \Delta^{**})_{\mathcal{U}}$ — подмодуль в $((A)_{\mathcal{U}} \widehat{\otimes} (A)_{\mathcal{U}})^{**}$. Таким образом, существует элемент $N \in (\ker \Delta^{**})_{\mathcal{U}}$ такой, что

$$a \cdot (E \cdot e_\alpha) - (E \cdot e_\alpha) \cdot a = a \cdot N - N \cdot a$$

для каждого $a \in A$. Определим $M = E \cdot e_\alpha - N$. Тогда у нас есть

$$a \cdot M - M \cdot a = 0$$

и

$$a \cdot \Delta^{**}(M) = a \cdot \lim_\alpha e^3 = a$$

для каждого $a \in A$. Таким образом, M является ультравиртуальной диагональю для A.

(iii)$\longrightarrow$(iv). Теперь пусть A имеет ультравиртуальную диагональ, такую как $M \in ((A)_\mathcal{U}\widehat{\otimes}(A)_\mathcal{U})^{**}$ и (m_α) — ее w^*-предел, т. е. $M = w^* - \lim m_\alpha$ и, переходя к выпуклым комбинациям, можно заменить слабый предел нормальным пределом. Отсюда следует, что существует ограниченная сеть m_α в $(A)_\mathcal{U}\widehat{\otimes}(A)_\mathcal{U}$ такая, что

$$\|a \cdot m_\alpha - m_\alpha \cdot a\| \longrightarrow 0$$

и

$$\|a \cdot \Delta(m_\alpha) - a\| \longrightarrow 0$$

для каждого $a \in A$. Это означает, что m_α — ограниченная ультраприближенная диагональ для A.

(iii)$\longleftrightarrow$(i). Существование ограниченной ультраприближенной диагонали для A эквивалентно аменабельности $(A)_\mathcal{U}$ как банаховой алгебры для любого ультрафильтра $\mathcal{U}$. Отсюда следует, что A сверхаменабельна согласно определению сверхаменабельности банаховых алгебр. Обратное очевидно.

(i)$\longleftrightarrow$(ii). См. в [15, теорема 5.6]. $\square$

Вопрос 2. Пусть A — банахова алгебра. Если A сверхаменабельна, обладает ли она свойством **UD**?

По поводу сверхаменабельности групповых алгебр мы ссылаемся на [15], где Доус доказал много интересных результатов, связанных с групповыми алгебрами, и показал, что $L^1(G)$ сверхаменабельна тогда и только тогда, когда G конечна.

4. Сверхаменабельность персонажей. В этом разделе мы рассмотрим слабую версию сверхаменабельности, которая называется сверхаменабельностью персонажей. Во-первых, мы приводим некоторые результаты об общих банаховых алгебрах и особенно о второй сопряженной C^*-алгебре, а затем мы изучаем абстрактные алгебры Сигала и абстрактные алгебры Сигала относительно групповых алгебр. В этом разделе во всех представленных доказательствах мы доказываем аменабельность ультрахарактеров для левого случая, а поскольку правый случай аналогичен, мы опускаем его.

Пусть A — банахова алгебра, а $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на множестве индексов I. Банахова алгебра A называется аменабельным слева (справа) ультрахарактером, если каждая ультрастепень A является аменабельным слева (справа) характером.

Теорема 2. *Пусть A — банахова алгебра, I — множество индексов и $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на I. Кроме того, пусть (A_α) — семейство замкнутых слева (справа) ультрахарактерных аменабельных подалгебр в A такое, что $A_\alpha \subseteq A_\beta$, для любой $\alpha \leq \beta$, а $\bigcup_\alpha A_\alpha$ плотен в A. Тогда A является левой (правой) ультрасимвольной аменабельной алгеброй.*

Доказательство. Поскольку для каждой α A_α является подалгеброй в A, $(A_\alpha)_\mathcal{U}$ является подалгеброй в $(A)_\mathcal{U}$ и $\bigcup_\alpha (A_\alpha)_\mathcal{U}$ плотно в $(A)_\mathcal{U}$. Кроме того, $(A_\alpha)_\mathcal{U} \subseteq (A_\beta)_\mathcal{U}$. Левая (правая) аменабельность символов A_α для каждого α подразумевает аменабельность левых (правых) символов $(A_\alpha)_\mathcal{U}$. Таким образом, $(A)_\mathcal{U}$ является аменабельным слева (справа) характером [7, теорема 2.11]. $\square$

Пусть A и B — банаховы алгебры. Рассмотрим ℓ^∞-прямую сумму $A \oplus_\infty B$. Пусть $((a,b)_i) \subseteq A \oplus_\infty B$, тогда мы можем идентифицировать $((a,b)_i)$ последовательностью (net) $(a_i, b_i) \subseteq A \oplus_\infty B$. При этом имеем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть A и B — банаховы алгебры, пусть I — множество индексов, а $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на I. Тогда $(A \oplus_\infty B)_\mathcal{U} \simeq (A)_\mathcal{U} \oplus_\infty (B)_\mathcal{U}$.*

Доказательство. Определим карту $\Psi : (A \oplus_\infty B)_\mathcal{U} \longrightarrow (A)_\mathcal{U} \oplus_\infty (B)_\mathcal{U}$ с помощью $\Psi((a_i, b_i)_\mathcal{U}) = ((a_i)_\mathcal{U}, (b_i)_\mathcal{U})$ для любых $(a_i, b_i)_\mathcal{U} \in (A \oplus_\infty B)_\mathcal{U}$. Легко проверить, является ли Ψ изометрическим изоморфизмом. $\square$

По лемме 2 и [7, лемма 2.12] справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть A и B — банаховы алгебры, а $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на множестве индексов I. Тогда произведение $A \oplus_\infty B$ является левым (правым) ультрасимвольным аменабельным тогда и только тогда, когда A и B являются левыми (правыми) ультрааменабельными характерами.*

Следуя теореме 2, лемме 3 и [7, следствие 2.13], получаем следующий результат:

Следствие 2. *Пусть (A_α) — семейная банахова алгебра, а $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на множестве индексов I. Тогда $c_0 - \oplus_\alpha A_\alpha$ является левым (правым) ультрасимвольным аменабельным тогда и только тогда, когда каждый (A_α) является левым (правым) ультрааменабельным характером.*

Следуя [1, определение 1], рассмотрим отображение $(\Delta_A)_\mathcal{U} : (A \widehat{\otimes} A)_\mathcal{U} \longrightarrow A_\mathcal{U}$ с $(\Delta_A)_\mathcal{U}((u_i)_\mathcal{U}) = (\Delta_A(u_i))_\mathcal{U}$ для каждого $(u_i)_\mathcal{U} \in (A \widehat{\otimes} A)_\mathcal{U}$. Теперь мы представляем некоторые результаты, связанные со стягиваемостью характера.

Предложение 4. *Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство банаховых алгебр, а $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на множестве индексов I. Если существует $U \in \mathcal{U}$ такое, что $\varphi_i \in \sigma(A_i)$ для каждого $i \in U$ и A_i является левым (правым) φ_i-стягиваемым, то существует элемент $M \in (A \widehat{\otimes} A)_\mathcal{U}$ такой, что*

$$M \cdot a = (\varphi_i)_\mathcal{U}(a) M \qquad \text{и} \qquad (\varphi_i)_\mathcal{U}((\Delta_{A_i})_\mathcal{U}(M)) = 1 \tag{4}$$

для каждого $a \in (A_i)_\mathcal{U}$.

Доказательство. Предположим, что существует $U \in \mathcal{U}$ такое, что $\varphi_i \in \sigma(A_i)$ и A_i φ_i-стягиваемо слева для каждого $i \in U$. Таким образом, существует φ_i-диагональ $M_i \in A_i \widehat{\otimes} A_i$. Определим $M \in (A_i \widehat{\otimes} A_i)_\mathcal{U}$ как $M = M_i$ для любого $i \in U$ и $M = 0$ для любого $i \notin U$. Тогда можем записать

$$\begin{aligned} M \cdot a - (\varphi_i)_\mathcal{U}(a) M = (M_i)_\mathcal{U} \cdot (a_i)_\mathcal{U} - (\varphi_i)_\mathcal{U}((a_i)_\mathcal{U})(M_i)_\mathcal{U} = \\ = (M_i \cdot a_i)_\mathcal{U} - (\varphi_i)_\mathcal{U}((a_i)_\mathcal{U})(M_i)_\mathcal{U} = \\ = \lim_{I,\mathcal{U}} ((M_i \cdot a_i)_\mathcal{U} - \varphi_i(a_i)(M_i)_\mathcal{U}) = (M_i \cdot a_i)_\mathcal{U} - (\varphi_i(a_i) M_i)_\mathcal{U} = \\ = (M_i \cdot a_i - \varphi_i(a_i) M_i)_\mathcal{U} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

для каждого $a = (a_i)_{\mathcal{U}} \in (A)_{\mathcal{U}}$. Также получаем

$$(\varphi_i)_{\mathcal{U}}((\Delta_A)_{\mathcal{U}}(M)) = (\varphi_i)_{\mathcal{U}}((\Delta_A)_{\mathcal{U}}(M_i)_{\mathcal{U}}) = (\varphi_i)_{\mathcal{U}}(\Delta_A(M_i))_{\mathcal{U}} = \lim_{I,\mathcal{U}} \varphi_i(\Delta_A(M_i)) = 1. \tag{6}$$

Утверждение доказано. □

Аналогично предыдущему результату имеем следующее утверждение, доказательство которого аналогично.

Предложение 5. *Пусть A — банахова алгебра, а $\mathcal{U}$ — ультрафильтр на множестве индексов I. Если A является стягиваемым слева (справа) символом, то существует элемент $M \in (A\widehat{\otimes}A)_{\mathcal{U}}$ такой, что*

$$M \cdot a = \Phi(a)M \qquad \textit{и} \qquad \Phi((\Delta_A)_{\mathcal{U}}(M)) = 1 \tag{7}$$

для каждого $\Phi \in (\sigma(A))_{\mathcal{U}}$.

Доказательство. Пусть $\Phi \in (\sigma(A))_{\mathcal{U}}$. Тогда можно написать $\Phi = (\varphi_i)_{\mathcal{U}}$ так, что существует $U \in \mathcal{U}$ такое, что $\varphi_i \in \sigma(A)$ для каждого $i \in U$. Для каждого $i \in U$ существует левая φ_i-диагональ $m_i \in A\widehat{\otimes}A$, поскольку A φ_i-стягиваема слева.

Установим $M = (m_i)_{\mathcal{U}}$. Тогда для каждого $a = (a_i)_{\mathcal{U}} \in (A)_{\mathcal{U}}$ имеем

$$\begin{aligned} M \cdot a - \Phi(a)M &= (m_i)_{\mathcal{U}} \cdot (a_i)_{\mathcal{U}} - \Phi((a_i)_{\mathcal{U}})(m_i)_{\mathcal{U}} = \\ &= (m_i \cdot a_i)_{\mathcal{U}} - (\varphi_i)_{\mathcal{U}}((a_i)_{\mathcal{U}})(m_i)_{\mathcal{U}} = \\ &= \lim_{U,\mathcal{U}} ((m_i \cdot a_i)_{\mathcal{U}} - \varphi_i(a_i)(m_i)_{\mathcal{U}}) = (m_i \cdot a_i)_{\mathcal{U}} - (\varphi_i(a_i)m_i)_{\mathcal{U}} = \\ &= (m_i \cdot a_i - \varphi_i(a_i)m_i)_{\mathcal{U}} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Также получаем

$$\Phi((\Delta_A)_{\mathcal{U}}(M)) = (\varphi_i)_{\mathcal{U}}((\Delta_A)_{\mathcal{U}}(m_i)_{\mathcal{U}}) = (\varphi_i)_{\mathcal{U}}(\Delta_A(m_i))_{\mathcal{U}} = \lim_{U,\mathcal{U}} \varphi_i(\Delta_A(m_i)) = 1. \tag{9}$$

Что и требовалось доказать. □

Теперь возникает следующий вопрос.

Вопрос 3. Когда полученный элемент в предложениях 4 и 5 принадлежит $(A)_{\mathcal{U}}\widehat{\otimes}(A)_{\mathcal{U}}$?

5. Результаты, относящиеся ко множителям. В этом разделе мы обозначаем через π каноническое отображение банаховой алгебры A во вторую сопряженную ей алгебру. Если $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ имеет правое (соответственно левое) тождество E, то A имеет слабое правое (соответственно, левое) приблизительное тождество. Более того, E является правым (соответственно левым) тождеством для произведения $\bigcirc_1$ (соответственно, $\bigcirc_2$) [4, предложение 3].

Из [4, следствие 2] мы видим, что

$$\pi(a) \bigcirc_1 F = \pi(a) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} F = \pi(a) \bigcirc_2 F, \tag{10}$$

и

$$F \bigcirc_1 \pi(a) = F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} \pi(a) = F \bigcirc_2 \pi(a)$$

для всех $F \in A^{**}$ и $a \in A$. Пусть $T : A \longrightarrow A$ — левый (соответственно, правый) множитель, тогда произведение $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ на A^{**} такое, что T^{**} — левый (соответственно, правый) множитель $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ [4, предложение 10]. Пусть E — правая единица для A^{**}, а $T : A \longrightarrow A$ — правый множитель, тогда

$$(T^{**}(E) \bigcirc_1 f)(a) = f(T(a)) \tag{11}$$

для всех $f \in A^*$ и $a \in A$ [17, теорема 1]. Точно так же можно показать, что если T — левый множитель, то

$$(f \bigcirc_2 T^{**}(E))(a) = f(T(a)) \tag{12}$$

для всех $f \in A^*$ и $a \in A$. Если $T : A \longrightarrow A$ — левый (соответственно, правый) множитель, то $T^{**}(\pi(a)) = \pi(T(a))$ для каждого $a \in A$. Это означает, что

$$T^{**}(E) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} \pi(a) \in \pi(A) \qquad \big(\pi(a) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} T^{**}(E) \in \pi(A)\big) \tag{13}$$

для каждого $a \in A$. Пусть $T \in M_r(A)$, тогда (10) вместе с (11) подразумевает, что

$$T^{**}(\pi(a)) = \pi(a) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} T^{**}(E) \tag{14}$$

для каждого $a \in A$. Точно так же, если $T \in M_l(A)$, то (11) вместе с (12) подразумевает, что

$$T^{**}(\pi(a)) = T^{**}(E) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} \pi(a) \tag{15}$$

для каждого $a \in A$. Легко проверить, что $\|T^{**}(E)\| = \|T\|$, откуда следует, что $T \longmapsto T^{**}(E)$ является изометрией [18, лемма 5.1]. Пусть $T_1, T_2 \in M_r(A)$, тогда по [4, предложение 10] имеем

$$T_1^{**}(E) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} T_2^{**}(E) = T_2^{**}(T_1^{**}(E) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} E) = T_2^{**}T_1^{**}(E), \tag{16}$$

и аналогично, если $T_1, T_2 \in M_l(A)$, то

$$T_1^{**}(E) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} T_2^{**}(E) = T_1^{**}T_2^{**}(E). \tag{17}$$

Таким образом, мы резюмируем приведенные выше соотношения следующим образом.

Лемма 4. *Пусть A — банахова алгебра, а E — единица A^{**}.*

(i) Если $T \in M_r(A)$, то отображение $T \longmapsto T^{**}(E)$ является изометрическим антиизоморфизмом из $M_r(A)$ в $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$.

(ii) Если $T \in M_l(A)$, то отображение $T \longmapsto T^{**}(E)$ является изометрическим изоморфизмом из $M_l(A)$ в $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$.

Определим

$$\mathcal{N}_A = \left\{F \in A^{**} : \pi(a) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} F = 0\right\},\ \mathcal{M}_A = \{T^{**}(E) : T \in M_r(A)\}$$

и

$$\mathcal{N}'_A = \left\{F \in A^{**} : F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} \pi(a) = 0\right\},\ \mathcal{M}'_A = \{T^{**}(E) : T \in M_l(A)\}$$

для всех $a \in A$. Ясно, что если $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ имеет левую (правую) единицу, то $\mathcal{N}_A = 0$ ($\mathcal{N}'_A = 0$).

Пусть $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ имеет левую единицу E. Предположим, что $F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} \pi(a) \in \pi(A)$ для всех $F \in A^{**}$ и $a \in A$. Существует отображение $T \in M_l(A)$ такое, что

$T^{**}(\pi(a)) = F \bigcirc_2 \pi(a)$ для каждого $a \in A$, поскольку отображение $T \longmapsto T^{**}|_{\pi(A)}$ является изометрическим изоморфизмом из $M_l(A)$ в $M_l(\pi(A))$. Далее запишем

$$T^{**}(\pi(a)) = F \bigcirc_2 \pi(a) = F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} \pi(a) \tag{18}$$

для каждого $a \in A$ [4, предложение 13]. Затем, следуя (15), имеем

$$F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} \pi(a) = T^{**}(E) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} \pi(a) \tag{19}$$

для каждого $a \in A$. Это означает, что

$$(F - T^{**}(E)) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} \pi(a) = 0 \tag{20}$$

для каждого $a \in A$. Следовательно, $G = F - T^{**}(E) \in \mathcal{N}'_A$. Поэтому $F = T^{**}(E) + G$, $G \in \mathcal{N}'_A$. Уравнения (12) и (18) подразумевают, что

$$(f \bigcirc_2 F)(a) = f(T(a)) \tag{21}$$

для всех $f \in A^*$ и $a \in A$. Более того, из уравнений (13) и (15) следует, что

$$F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} \pi(a) \in \pi(A) \tag{22}$$

для каждого $a \in A$. Таким образом, все полученные выше результаты эквивалентны, и мы можем написать следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ имеет левую единицу E, и пусть $F \in A^{**}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} \pi(a) \in \pi(A)$, для каждого $a \in A$;

(ii) существуют $T \in M_l(A)$ и $G \in \mathcal{N}'_A$ такие, что $F = T^{**}(E) + G$;

(iii) существует $T \in M_l(A)$ такое, что $(f \bigcirc_2 F)(a) = f(T(a))$ для всех $f \in A^*$ и $a \in A$.

Аналогичным методом и с использованием [4, предложение 13] снова имеем утверждение.

Лемма 6. *Пусть $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ имеет правую единицу E, и пусть $F \in A^{**}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\pi(a) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} F \in \pi(A)$, для каждого $a \in A$;

(ii) существуют $T \in M_r(A)$ и $G \in \mathcal{N}_A$ такие, что $F = T^{**}(E) + G$;

(iii) существует $T \in M_r(A)$ такое, что $(F \bigcirc_1 f)(a) = f(T(a))$ для всех $f \in A^*$ и $a \in A$.

При некоторых условиях $\pi(A)$ может быть левым (соответственно, правым, двусторонним) идеалом $(A^{**}, \bigcirc_1)$, $(A^{**}, \bigcirc_2)$ или $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$. Для случая $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ $\pi(A)$ является левым (соответственно, правым) идеалом тогда и только тогда, когда R_a (соответственно, L_a) — слабокомпактный оператор на A [4, предложение 11]. Теперь мы характеризуем левую (соответственно, правую, двустороннюю) идеальность $\pi(A)$ в $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ следующим результатом.

Предложение 6. *Пусть $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ имеет левую (соответственно, правую) единицу E. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\pi(A)$ — левый (соответственно, правый) идеал в $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$;

(ii) R_a (L_a) — слабокомпактный оператор в A для любого $a \in A$;

(iii) каждый $F \in A^{**}$ имеет вид $F = T^{**}(E) + G$ для некоторых $T \in M_l(A)$ ($T \in M_r(A)$) и $G \in \mathcal{N}'_A$ ($G \in \mathcal{N}_A$);

(iv) для каждого $F \in A^{**}$ существует $T \in M_l(A)$ ($T \in M_r(A)$) такое, что

$$(f \bigcirc_2 F)(a) = f(T(a)) \quad (F \bigcirc_1 f)(a) = f(T(a))$$

для всех $f \in A^*$ и $a \in A$.

Приведенный выше результат вместе с [19, лемма 4.1] влечет за собой утверждение.

Следствие 2. *Рассмотрим $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ с единицей E и предположим, что A — полупростая алгебра. Если $(S,T) \in M(A)$, то $S^{**}(E) = T^{**}(E) + G$, где $G \in \mathcal{N}_A$.*

Предложение 7. *Пусть A полупроста и $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ имеет левую (соответственно, правую) единицу E такую, что $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ ассоциативен. Если $\pi(A)$ — левый (соответственно, правый) идеал в $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$, тогда*

(i) $A^{**} = \mathcal{N}'_A \oplus \mathcal{M}'_A$ ($A^{**} = \mathcal{N}_A \oplus \mathcal{M}_A$);

(ii) $\mathcal{N}'_A = \{G \in A^{**} : G \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} A^{**} = 0\}$ ($\mathcal{N}_A = \{G \in A^{**} : A^{**} \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} G = 0\}$);

(iii) $\mathcal{M}'_A = \{G \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} E : G \in A^{**}\}$ ($\mathcal{M}_A = \{E \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} G : G \in A^{**}\}$).

Доказательство. Исследуем только левый случай, а так как правый аналогичен, пропускаем его.

(i) Из предложения 7 следует, что $A^{**} = \mathcal{N}'_A + \mathcal{M}'_A$. Пусть $F \in \mathcal{N}'_A \cap \mathcal{M}'_A$. Отсюда следует, что $F \in \mathcal{M}'_A$ и, значит, $F = T^{**}(E)$ для некоторых $T \in M_l(A)$ и $F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} \pi(a) = 0$ для каждого $a \in A$, потому что $F \in \mathcal{N}'_A$. Тогда по (15) и тому факту, что $T^{**}(\pi(a)) = \pi(T(a))$, для каждого $a \in A$ имеем $T = 0$ и, следовательно, $F = 0$. Это доказывает (i).

(ii) Для любого $G \in A^{**}$ и сети $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$, сходящейся в w^*-топологии к $F \in A^{**}$, имеем $w^* - \lim_{\mathcal{U}} G \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} \pi(a_\alpha) = G \bigcirc_2 F$ [4, следствие 2]. Таким образом, $G \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} F$ является w^*-непрерывным для любого фиксированного $G \in A^{**}$. Кроме того, w^*-плотность $\pi(A)$ в A^{**} влечет выполнение (ii).

(iii) Пусть $F \in \mathcal{M}'_A$, тогда $F = T^{**}(E)$, где $T \in M_l(A)$. Следовательно,

$$F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} E = T^{**}(E) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} E = T^{**}(E \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} E) = T^{**}(E) = F.$$

Это означает, что $\mathcal{M}'_A \subseteq \{G \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} E : G \in A^{**}\}$. Пусть $F \in \{G \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} E : G \in A^{**}\}$. Тогда $F = G \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} E$ для некоторого $G \in A^{**}$. Из леммы 5 следует, что существуют $T \in M_l(A)$ и $G' \in \mathcal{N}'_A$ такие, что $F = T^{**}(E) + G'$. Тогда по случаю (ii) имеем

$$F = F \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} E = T^{**}(E) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} E + G' \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} E = T^{**}(E) \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} E = T^{**}(E).$$

Следовательно, $F = T^{**}(E)$. Это означает, что $\{G \bigcirc_{(J,\mathcal{U})} E : G \in A^{**}\} \subseteq \mathcal{M}'_A$. Таким образом, (iii) выполнено. □

Возникает такой вопрос: если $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ имеет единицу E и $(S,T) \in M(A)$, при каких условиях мы имеем $T^{**}(E) = S^{**}(E)$?

В [18–20] Томюк попытался ответить на этот вопрос для случая $(A^{**}, \bigcirc_2)$, но полученные результаты оказались неверны [21, 22]. Гроссер показал, что из регулярности Аренса банаховой алгебры A следует, что $T^{**}(E) = S^{**}(E)$ [21, теорема 1]. Кроме того, он показал, что это верно для коммутативных банаховых алгебр с ограниченной аппроксимационной единицей [21, теорема 2]. В случае $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ с единицей E, если $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ регулярно, то $T^{**}(E) = S^{**}(E)$, поскольку регулярность $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ сильнее, чем регулярность Аренса [4, предложение 6].

Пусть A — банахова алгебра, X — банахов A-бимодуль и $\mathcal{U}$ — ультрафильтр, тогда $(X)_{\mathcal{U}}$ становится банаховым A-бимодулем с поточечным действием модуля. Ультрастепени на модулях были изучены Доусом в [13], и он получил много интересных результатов, связанных с этим понятием и понятием $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ на банаховых алгебрах. Отображение $T : A \longrightarrow X$ называется левым (соответственно, правым) множителем, если $T(ab) = T(a) \cdot b$ ($T(ab) = a \cdot T(b)$) для всех $a, b \in A$.

Предложение 8. *Пусть A — банахова алгебра, X — банахов A-бимодуль и $T : A \longrightarrow X$ — левый (соответственно, правый) мультипликатор. Тогда существуют ультрафильтр $\mathcal{U}$ и $K : X^{**} \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}$ такие, что $K \circ T^{**}$ является левым (соответственно, правым) множителем из A^{**} в $(X)_{\mathcal{U}}$.*

Доказательство. Существование K подтверждается [13, теорема 3.2], и легко проверить, что это левый (соответственно, правый) множитель. □

Поскольку авторы в [4] отметили, что произведение $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ сильнее, чем произведение Аренса, Доус показал, что существует ультрафильтр, такой как $\mathcal{U}$, что если банахова алгебра A регулярна, то $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ согласуется с произведениями Аренса на A^{**} [13, теорема 4.2].

6. Дальнейшие задачи. В дополнение к проблемам, поднятым в этой статье, мы предлагаем следующие предложения для заинтересованных читателей.

1. Пусть A и B — две (коммутативные) банаховы алгебры. Полупростота инъективных и проективных тензорных произведений банаховых алгебр имеет интересные результаты, связанные с полупростотой A и B [23], поэтому может оказаться интересной полупростота ультрастепеней инъективных и проективных тензорных произведений. Таким образом, мы задаемся вопросом: при каких условиях ультрастепени инъективных и проективных тензорных произведений этих алгебр являются полупростыми, радикальными и регулярными банаховыми алгебрами?

2. Пусть A и B — две банаховых алгебры. У нас нет сведений об сверхаменабельности проективного тензорного произведения этих алгебр. Мы думаем, что это может быть сложным, но интересным случаем.

3. Как уже отмечалось, Доус был уверен, что сверхаменабельность групповых алгебр на локально компактной группе G эквивалентна конечности группы G. Другими словами, если это так, то для любой локально компактной группы сверхаменабельность и стягиваемость групповой алгебры $L^1(G)$ совпадают. Можно продемонстрировать слабую версию сверхаменабельности и сверхаменабельности персонажей, например версии, которые были определены для аменабельности.

4. Мультипликаторы и гомоморфизмы играют важную роль в теории банаховой алгебры. Следовательно, изучение мультипликаторов и гомоморфизмов ультрастепеней банаховых алгебр и особенно мультипликаторов ультрастепеней групповых алгебр может быть очень интересным.

Авторы благодарят рецензентов за внимательное прочтение статьи и полезные комментарии. Авторы признательны профессору Н. А. Широкову и его аспирантам за тщательное редактирование перевода статьи на русский язык.

Литература/References

1. Heinrich S. Ultraproducts in Banach spaces theory. *J. Reine Angew. Math.* **313**, 72–104 (1980).
2. Godefroy G., Iochum B. Arens-regularity of Banach algebras and geometry of Banach spaces. *J. Funct. Anal.* **80**, 47–59 (1988). https://doi.org/10.1016/0022-1236(88)90064-X
3. Iochum B., Loupias G. Remarks on the bidual of Banach algebras. *Colloque Montpellier* (1985).
4. Iochum B., Loupias G. Arens regularity and local reflexivity principle for Banach algebras. *Math. Ann.* **284**, 23–40 (1989). https://doi.org/10.1007/BF01443502
5. Daws M. Amenability of ultrapowers of Banach algebras. *Proc. Edin. Math. Soc.* **52**, 307–338 (2009). https://doi.org/10.1017/S0013091507001083
6. Monfared M. S. Character amenability of Banach algebras. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **144**, 697–706 (2008). https://doi.org/10.1017/S0305004108001126
7. Hu Z., Monfared M. S., Traynor T. On character amenable Banach algebras. *Studia Math.* **193** (1), 53–78 (2009). https://doi.org/10.4064/sm193-1-3
8. Kaniuth E., Lau A. T., Pym J. On ϕ-amenability of Banach algebras. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **144**, 85–96 (2008). https://doi.org/10.1017/S0305004107000874
9. Alaghmandan M., Nasr-Isfahani R., Nemati M. Character amenability and contractibility of abstract Segal algebras. *Bull. Aust. Math. Soc.* **82**, 274–281 (2010).
10. Dashti M., Nasr-Isfahani R., Renani S. S. Character amenability of Lipschitz algebras. *Canad. Math. Bull.* **57** (1), 37–41 (2014). https://doi.org/10.4153/CMB-2012-015-3
11. Gordji M. E., Jabbari A., Kim G. H. Some characterization of character amenable Banach algebras. *Bull. Korean Math. Soc.* **52** (3), 761–769 (2015). https://doi.org/10.4134/BKMS.2015.52.3.761
12. Kaniuth E., Lau A. T., Pym J. On character amenability of Banach algebras. *J. Math. Anal. Appl.* **344**, 942–955 (2008). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.03.037
13. Daws M. Ultrapowers of Banach algebras and modules. *Glasgow Math. J.* **50**, 539–559 (2008).
14. Behrends E. A generalization of the principle of local reflexivity. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* **31**, 293–296 (1986).
15. Johnson B. E. *Cohomology in Banach algebras.* In Ser.: Memoirs of the American Mathematical Society, no. 127. Providence, Rhode Island, Amer. Math. Soc. (1972).
16. Maté L. Embedding multiplier operators of a Banach algebra B into its second conjugate space B**. *Bull. Acad. Polon. Sei. Ser. Sei. Math. Astronom. Phys.* **13**, 809–812 (1965).
17. Tomiuk B. J. Multipliers on Banach algebras. *Studia Math.* **54**, 267–283 (1976).
18. Tomiuk B. J. Arens regularity and the algebra of double multipliers. *Proc. Amer. Math. Soc.* **81** (2), 293–298 (1981).
19. Tomiuk B. J. A correction to "Arens regularity and the algebra of double multipliers". *Proc. Amer. Math. Soc.* **91** (1), 171 (1984).
20. Grosser M. Arens semi-regular Banach algebras. *Mh. Math.* **98**, 41–52 (1984).
21. Grosser M., Losert V., Rindler H. Double multipliers' und asymptotisch invariante approximierende Einheiten. *Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss.*, 7–11 (1980).
22. Kaniuth E. *A course in commutative Banach algebras.* Springer (2009).

Статья поступила в редакцию 5 мая 2020 г.;
доработана 10 февраля 2022 г.;
рекомендована к печати 3 марта 2022 г.

Контактная информация:

Эбадян Али — PhD; ebadian.ali@gmail.com
Джаббари Али — науч. сотр.; jabbari_al@yahoo.com

Ultrapowers of Banach algebras

A. Ebadian, A. Jabbari

Urmia University, 24, Beneshti (Daneshkade) st., Urmia, Iran

For citation: Ebadian A., Jabbari A. Ultrapowers of Banach algebras. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 3, pp. 527–541. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.313 (In Russian)

In this paper, we consider ultrapowers of Banach algebras as Banach algebras and the product $\bigcirc_{(J,\mathcal{U})}$ on the second dual of Banach algebras. For a Banach algebra A, we show that if there is a continuous derivation from A into itself, then there is a continuous derivation from $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ into it. Moreover, we show that if there is a continuous derivation from A into X^{**}, where X is a Banach A-bimodule, then there is a continuous derivation from A into ultrapower of X i. e., $(X)_{\mathcal{U}}$. Ultra (character) amenability of Banach algebras is investigated and it will be shown that if every continuous derivation from A into $(X)_{\mathcal{U}}$ is inner, then A is ultra amenable. Some results related to left (resp. right) multipliers on $(A^{**}, \bigcirc_{(J,\mathcal{U})})$ are also given.

Keywords: amenability, arens products, derivation, multiplier, ultrapower, ultra amenable, ultra character amenability.

Received: May 5, 2020
Revised: February 10, 2022
Accepted: March 3, 2022

Authors' information:

Ali Ebadian — ebadian.ali@gmail.com
Ali Jabbari — jabbari_al@yahoo.com