

## МЕХАНИКА

УДК 531.381  
MSC 70E17, 70E40

## Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц\*

*А. С. Кулешов, М. М. Гаджиев*

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

**Для цитирования:** *Кулешов А. С., Гаджиев М. М.* Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 3. С. 550–560.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.315>

Рассматривается задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в свободном молекулярном потоке частиц. Показано, что уравнения движения тела обобщают классические уравнения Эйлера — Пуассона, описывающие движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, и представляются в форме классических уравнений Эйлера — Пуассона в случае, когда поверхность тела, обтекаемого потоком частиц, является сферой. Обсуждаются вопросы существования первых интегралов в рассматриваемой задаче.

*Ключевые слова:* твердое тело с неподвижной точкой, свободный молекулярный поток, первые интегралы.

**1. Постановка задачи. Вычисление момента, действующего на тело с неподвижной точкой.** Рассмотрим задачу о движении твердого тела в потоке частиц вокруг неподвижной точки. Будем предполагать, что поток частиц представляет собой свободный молекулярный поток постоянной плотности  $\rho$ , частицы которого движутся поступательно с постоянной абсолютной скоростью

$$-\mathbf{v} = v_0 \boldsymbol{\gamma},$$

где  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор, направленный вдоль набегающего потока. Тепловым движением молекул в потоке пренебрегаем.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00637).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2022

Будем рассматривать следующий механизм взаимодействия молекул набегающего потока с поверхностью тела. Частица при соударении отдает практически всю свою энергию и приходит в температурное равновесие с местом удара (теперь несколько нагретым). Когда это нагревание пройдет, частица выходит в пространство с тепловой скоростью, равной тепловой скорости молекул поверхности тела. Так как эта тепловая скорость существенно меньше тепловой скорости наружных частиц, то можно идеализировать эту картину гипотезой абсолютно неупругого удара, когда частицы полностью теряют свою энергию при столкновении с телом (и не отражаются).

Получим выражения для силы и момента, действующего на тело с неподвижной точкой со стороны потока частиц. Воспользуемся подходом, приведенным в монографии В. В. Белецкого [1] (см. также [2]). Обозначим через  $O$  неподвижную точку твердого тела. Распределение скоростей в твердом теле определяется формулой Эйлера

$$\mathbf{u}_M = [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OM}],$$

где  $M$  — произвольная точка твердого тела. Если обозначить угол между векторами  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\overrightarrow{OM}$  через  $\alpha$ , то будем иметь неравенство

$$|\mathbf{u}_M| = |\boldsymbol{\omega}| |\overrightarrow{OM}| \sin \alpha \leq |\boldsymbol{\omega}| |\overrightarrow{OM}|.$$

Предположим, что величина скорости набегающего потока  $v_0$  существенно превосходит произведение характерного значения угловой скорости твердого тела и характерного расстояния от неподвижной точки до любой из точек твердого тела, то есть

$$\frac{|\boldsymbol{\omega}| |\overrightarrow{OM}|}{v_0} \ll 1. \quad (1)$$

Тогда будем считать, что в абсолютном пространстве скорости всех точек твердого тела равны нулю. Определим, каким будет воздействие потока на тело, если тело неподвижно, а поток имеет постоянную скорость. Введем две системы координат: систему координат, жестко связанную с телом, с началом в неподвижной точке и осями, направленными вдоль главных осей инерции тела, и систему координат, движущуюся поступательно вместе с потоком. Относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с потоком, тело перемещается со скоростью

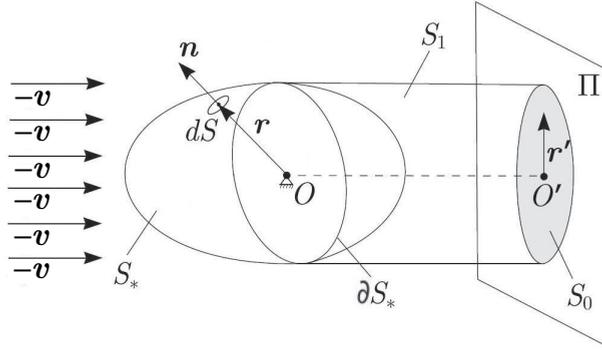
$$\mathbf{v} = -v_0 \boldsymbol{\gamma}.$$

Выделим на поверхности тела элементарную площадку  $dS$  и вычислим элементарный импульс, получаемый площадкой  $dS$ , движущейся поступательно относительно потока со скоростью  $\mathbf{v}$ , за время  $dt$  (см. рисунок). Во время такого движения площадка «заметает» объем

$$d\tau = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS dt,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к площадке, причем  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) > 0$ . Внутри объема  $d\tau$  содержится масса  $dm = \rho d\tau$ , где  $\rho$  — плотность потока. Элементарный импульс, получаемый площадкой, и действующая на нее сила определяются формулами

$$d\mathbf{Q} = -\mathbf{v} dm = -\mathbf{v} \rho d\tau = -\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS dt, \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS.$$



Тело с неподвижной точкой в потоке частиц.

Рассмотрим выпуклое тело, ограниченное гладкой замкнутой поверхностью и движущееся поступательно со скоростью  $\mathbf{v} = -v_0 \boldsymbol{\gamma}$  относительно потока. Главный вектор сил взаимодействия тела с молекулами задается формулой

$$\mathbf{F} = - \int_{S_*} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (2)$$

В формуле (2) через  $S_*$  обозначена часть поверхности тела, «омываемая» потоком молекул: на ее границе  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0$ , поскольку на границе направление потока является касательным к  $S_*$ , а во внутренних точках поверхности  $S_*$  внешняя нормаль  $\mathbf{n}$  удовлетворяет неравенству  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) > 0$ . Границу этой поверхности обозначим  $\partial S_*$  (см. рисунок).

Будем считать, что направление вектора скорости  $\mathbf{v}$  не зависит от выбора элементарной площадочки  $dS$ , и следовательно, интеграл в правой части равенства (2) может быть переписан в следующем виде:

$$\mathbf{F} = -\rho \mathbf{v} \int_{S_*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3)$$

Вычислим теперь главный момент сил взаимодействия молекул с телом относительно неподвижной точки  $O$ . Этот момент определяется формулой

$$\mathbf{M}_O = -\rho \int_{S_*} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho \left[ \mathbf{v} \times \int_{S_*} \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \right], \quad (4)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки поверхности тела относительно неподвижной точки  $O$ .

Для вычисления интегралов, входящих в формулы (3) и (4), введем новое тело  $T$ , которое построим следующим образом. Перпендикулярно вектору  $\mathbf{v}$  расположим плоскость  $\Pi$ . Удобно поместить эту плоскость на некотором расстоянии от точки  $O$  позади (по отношению к вектору  $\mathbf{v}$ ) тела. Проекция тела на плоскость  $\Pi$  вдоль вектора  $\mathbf{v}$  (ортогональная проекция) является некоторой плоской фигурой  $S_0$ . Введем еще цилиндрическую поверхность  $S_1$  с образующей  $\mathbf{v}$  и направляющей, совпадающей с границей  $\partial S_*$ . Поверхность  $S_1$  с одной стороны ограничена этой направляющей, а с

другой — линией пересечения с плоскостью  $\Pi$ . Поверхность  $\Sigma = S_* \cup S_1 \cup S_0$  ограничивает тело  $T$ , объем которого обозначим через  $\tau$  (см. рисунок). Согласно теореме Остроградского — Гаусса справедлива формула

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_T \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau = 0,$$

поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . Кроме того, выполняются соотношения

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{S_1} = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{S_0} = -v_0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = -v_0. \quad (5)$$

Отсюда имеем

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{S_*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0,$$

и, следовательно,

$$\int_{S_*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_{S_0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = v_0 \int_{S_0} dS = v_0 S,$$

где  $S$  — площадь фигуры  $S_0$ . Таким образом, получаем

$$\mathbf{F} = -\rho v v_0 S = \rho v_0^2 S \boldsymbol{\gamma}. \quad (6)$$

Введем систему координат  $Oxyz$  с началом в неподвижной точке  $O$  и осями, направленными вдоль главных осей инерции для точки  $O$ . Пусть в этой системе координат  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{v} = -v_0 (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ . По теореме Гаусса — Остроградского имеем

$$\int_{\Sigma} x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\Sigma} (x \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_T \operatorname{div} (x \mathbf{v}) d\tau = -v_0 \gamma_1 \tau$$

и аналогично можем записать

$$\int_{\Sigma} y (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -v_0 \gamma_2 \tau, \quad \int_{\Sigma} z (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = -v_0 \gamma_3 \tau.$$

Следовательно, получаем

$$\int_{\Sigma} \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \tau \mathbf{v}.$$

С другой стороны, с учетом формул (5) будем иметь равенство

$$\int_{\Sigma} \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{S_*} \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - v_0 \int_{S_0} \mathbf{r} dS.$$

На  $S_0$  вектор  $\mathbf{r}$  представляет собой вектор, соединяющий неподвижную точку с различными точками фигуры  $S_0$ . Поэтому на  $S_0$  представим вектор  $\mathbf{r}$  в виде

$$\mathbf{r} = -\frac{l\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \mathbf{r}' = l\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{r}',$$

где  $l$  — длина перпендикуляра, опущенного на плоскость  $\Pi$  из неподвижной точки. Для вектора  $\mathbf{r}'$  справедливо условие  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}') = 0$ , так как вектор  $\mathbf{r}'$  лежит в плоскости  $\Pi$  (см. рисунок). Тогда будем иметь

$$v_0 \int_{S_0} \mathbf{r} dS = v_0 l \gamma \int_{S_0} dS + v_0 \int_{S_0} \mathbf{r}' dS = -lS\mathbf{v} + v_0 \int_{S_0} \mathbf{r}' dS = -lS\mathbf{v} + v_0 \mathbf{P}_{O'}.$$

Интеграл

$$\mathbf{P}_{O'} = \int_{S_0} \mathbf{r}' dS \quad (7)$$

представляет собой первый момент фигуры  $S_0$  относительно точки  $O'$  — проекции неподвижной точки  $O$  на плоскость  $\Pi$ . Итак, получаем

$$\tau \mathbf{v} = \int_{S_*} \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + lS\mathbf{v} - v_0 \mathbf{P}_{O'}.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\int_{S_*} \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = (\tau - lS) \mathbf{v} + v_0 \mathbf{P}_{O'},$$

и в соответствии с формулой (4) имеем

$$\mathbf{M}_O = \rho v_0 [\mathbf{v} \times \mathbf{P}_{O'}] = -\rho v_0^2 [\gamma \times \mathbf{P}_{O'}]. \quad (8)$$

Теперь вычислим интеграл (7). В этом интеграле  $\mathbf{r}'$  представляет собой вектор, проведенный из точки  $O'$  в различные точки фигуры  $S_0$ . Представим теперь, что фигура  $S_0$  является наклеенной на плоскость  $\Pi$  бесконечно тонкой однородной пластинкой. Тогда

$$\int_{S_0} \mathbf{r}' dS = S \cdot \overrightarrow{O'G}.$$

Здесь  $S = S(\gamma)$  — площадь фигуры  $S_0$ , а  $\overrightarrow{O'G}$  — вектор, соединяющий точку  $O'$  — проекцию неподвижной точки  $O$  на плоскость  $\Pi$  — с центром масс  $G$  пластинки, ограниченной фигурой  $S_0$ . В общем случае будем иметь

$$S = S(\gamma), \quad \overrightarrow{O'G} = \mathbf{c} = \mathbf{c}(\gamma).$$

Введем также обозначение

$$\rho v_0^2 = f.$$

В результате формула (8) примет окончательный вид:

$$\mathbf{M}_O = -fS(\gamma) [\gamma \times \mathbf{c}(\gamma)]. \quad (9)$$

Таким образом, мы получили выражение для момента, действующего на твердое тело с неподвижной точкой, находящееся в потоке частиц. Несложно видеть, что этот момент зависит от направления потока, «омывающего» тело. Заметим, что при

выводе этой формулы мы использовали предположение (1). Поэтому формулой (9) следует пользоваться лишь при изучении медленных вращательных движений тела с неподвижной точкой.

Уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц имеют вид

$$\mathbb{J}\dot{\omega} + [\omega \times \mathbb{J}\omega] = -fS(\gamma)[\gamma \times c(\gamma)], \quad \dot{\gamma} + [\omega \times \gamma] = 0, \quad (10)$$

где  $\mathbb{J} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  — тензор инерции тела относительно неподвижной точки  $O$ .

**2. Обтекание сферы.** Вычислим момент  $M_O$ , определяемый формулой (9), в случае, когда тело с неподвижной точкой ограничено поверхностью сферы радиуса  $R$ , а неподвижной точкой является центр сферы. Тогда фигура  $S_0$  представляет собой круг, радиус которого равен радиусу  $R$  сферы. Площадь этого круга постоянна:

$$S(\gamma) = \pi R^2 = \text{const.}$$

Очевидно, что центр масс однородной пластины, имеющей форму фигуры  $S_0$ , будет располагаться в центре круга. Поэтому вектор  $c(\gamma)$ , соединяющий точку  $O'$  — проекцию неподвижной точки  $O$  на плоскость, перпендикулярную потоку — с центром масс пластины, имеющей форму фигуры  $S_0$ , в данном случае равен нулю. Поэтому

$$M_O = 0.$$

Вычислим теперь момент  $M_O$  в случае, когда в качестве неподвижной точки выбрана произвольная точка  $O_1$  внутри сферы. Введем систему координат  $O_1xyz$ , оси которой направлены по главным осям инерции тела для точки  $O_1$ . Координаты центра сферы — точки  $O$  в системе координат  $O_1xyz$  — обозначим  $a_1, a_2, a_3$ , то есть

$$\overrightarrow{O_1O} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,$$

где  $e_1, e_2, e_3$  — базисные векторы координатных осей системы  $O_1xyz$ . Согласно известной формуле теоретической механики, принимая во внимание формулу (6), получаем

$$M_{O_1} = M_O - [\overrightarrow{OO_1} \times \mathbf{F}] = [\overrightarrow{O_1O} \times \mathbf{F}] = [\overrightarrow{O_1O} \times fS(\gamma)\gamma] = f\pi R^2 [\overrightarrow{O_1O} \times \gamma].$$

Пусть

$$M_{O_1} = M_1e_1 + M_2e_2 + M_3e_3$$

в системе координат  $O_1xyz$ . Тогда

$$M_1 = f\pi R^2 (a_2\gamma_3 - a_3\gamma_2), \quad M_2 = f\pi R^2 (a_3\gamma_1 - a_1\gamma_3), \quad M_3 = f\pi R^2 (a_1\gamma_2 - a_2\gamma_1).$$

Уравнения (10) в скалярной форме записываются следующим образом:

$$A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 = M_1, \quad A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_1\omega_3 = M_2,$$

$$A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 = M_3;$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2.$$

Видно, что в этом случае уравнения (10) принимают вид классических уравнений Эйлера — Пуассона, описывающих движения тяжелого твердого тела вокруг

неподвижной точки. Поэтому можно рассматривать систему уравнений (10) как возможное обобщение классических уравнений Эйлера — Пуассона.

**3. Обтекание пластины.** Ранее мы предположили, что частицы потока, обтекающего тело с неподвижной точкой, движутся поступательно с постоянной абсолютной скоростью

$$-\mathbf{v} = v_0\gamma_1\mathbf{e}_x + v_0\gamma_2\mathbf{e}_y + v_0\gamma_3\mathbf{e}_z.$$

Данный вектор является вектором нормали к плоскости, перпендикулярной потоку. Таким образом, уравнение плоскости, перпендикулярной потоку, может быть записано в виде

$$x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3 = 0. \quad (11)$$

Здесь  $x$ ,  $y$  и  $z$  — координаты произвольной точки рассматриваемой плоскости. Возьмем теперь произвольную точку тела, задаваемую в системе координат, жестко связанной с телом, радиусом-вектором  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ , и найдем ее проекцию на плоскость (11).

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $(X, Y, Z)$  параллельно вектору  $-\mathbf{v}$ , имеют вид

$$x = X + v_0\gamma_1 t, \quad y = Y + v_0\gamma_2 t, \quad z = Z + v_0\gamma_3 t. \quad (12)$$

Указанные координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  должны удовлетворять уравнению (11). Подставляя выражения (12) для  $x$ ,  $y$  и  $z$  в уравнение (11), получаем, принимая во внимание условие  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ , что

$$X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3 + v_0 t = 0.$$

Отсюда получаем для  $t$  следующее выражение:

$$t = -\frac{X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3}{v_0}. \quad (13)$$

Вернемся к формулам (12). С учетом того, что  $t$  определяется выражением (13), данные уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x &= X - (X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3)\gamma_1, & y &= Y - (X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3)\gamma_2, \\ z &= Z - (X\gamma_1 + Y\gamma_2 + Z\gamma_3)\gamma_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Если вернуться к векторным обозначениям

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{R} = (X, Y, Z), \quad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

то формулы (14), связывающие между собой  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , можно переписать в виде одного векторного соотношения:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\gamma}.$$

Поскольку  $(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 1$ , то имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\gamma},$$

откуда получаем

$$\mathbf{r} = [\boldsymbol{\gamma} \times [\mathbf{R} \times \boldsymbol{\gamma}]]. \quad (15)$$

Формула (15) показывает, как связаны между собой координаты некоторой точки тела, заданной вектором  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$  с координатами ее проекции на плоскость  $\Pi$ , перпендикулярную потоку. Из формулы (15), очевидно, следует, что все точки внутренности тела, радиусы-векторы которых имеют вид

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} + g(\boldsymbol{\gamma}) \boldsymbol{\gamma},$$

где  $g(\boldsymbol{\gamma})$  — произвольная функция, проецируются в одну и ту же точку на плоскости  $\Pi$ . Таким образом, разным точкам внутренности твердого тела может соответствовать одна и та же точка на плоскости  $\Pi$ .

Но если предположить, что тело с неподвижной точкой представляет собой тонкую пластинку, и не рассматривать вырожденный случай, когда вектор  $\boldsymbol{\gamma}$  лежит в плоскости пластинки (в этом случае тень от пластинки вырождается в отрезок прямой, и о его площади говорить не приходится), тогда каждой точке пластинки, заданной вектором  $\mathbf{R}$ , соответствует точка проекции, определенная вектором  $\mathbf{r}$ , причем разным точкам пластинки отвечают разные точки проекции. Если теперь взять несколько точек пластинки, то для них получим

$$\mathbf{r}_i = [\boldsymbol{\gamma} \times [\mathbf{R}_i \times \boldsymbol{\gamma}]], \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

и, следовательно, если пластинка, обтекаемая потоком частиц, является однородной, то будем иметь

$$\frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \left[ \boldsymbol{\gamma} \times \left[ \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{R}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \times \boldsymbol{\gamma} \right] \right].$$

Отсюда следует, что в случае обтекания потоком частиц однородной пластинки ее центр масс должен проецироваться в центр масс проекции. Таким образом, в случае обтекания потоком частиц однородной пластинки с неподвижной точкой в качестве вектора  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$  в формуле (9) для момента  $\mathbf{M}_O$  может быть выбран вектор, соединяющий неподвижную точку с центром масс пластинки. Проверим этот вывод на нескольких примерах.

**Пример 1.** В качестве первого примера рассмотрим задачу, предложенную в работе В. В. Сазонова [3]. Рассматривается движение спутника, представляющего собой однородную пластину площади  $S_0$ , которая в осях, жестко связанных со спутником, лежит в плоскости  $Oxz$  и является симметричной относительно оси  $Ox$ . Это означает, что ось  $Oy$  перпендикулярна плоскости пластины. Рассмотрим твердое тело с неподвижной точкой  $O$ , имеющее вид такой пластины. В силу симметрии пластины относительно оси  $Ox$  центр масс  $C$  пластины также лежит на оси  $Ox$ . Пусть центр масс  $C$  пластины отстоит от неподвижной точки на расстояние  $a$  вдоль оси  $Ox$ , тогда вектор  $\mathbf{R}$  будет следующим:

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{OC} = a\mathbf{e}_x = (a, 0, 0).$$

Момент, действующий на пластину со стороны потока частиц, определяется формулой (9), причем в качестве вектора  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$ , как уже говорилось, можно взять

вектор  $\mathbf{R}$ . Вычислим площадь  $S(\boldsymbol{\gamma})$  тени. Эта площадь связана с площадью пластины формулой

$$S = S_0 \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между плоскостью пластины и плоскостью  $\Pi$ , причем  $\cos \varphi > 0$ . Как известно, угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами. Единичным вектором нормали к плоскости  $\Pi$  является вектор  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ . Поскольку вся пластина лежит в плоскости  $Oxz$ , то ось  $Oy$  перпендикулярна плоскости пластины, и единичный вектор нормали к пластине равен  $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$ .

Следовательно, учитывая, что оба вектора ( $\boldsymbol{\gamma}$  и  $\mathbf{e}_y$ ) единичные, имеем

$$\cos \varphi = |(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e}_y)| = |\gamma_2|$$

(мы берем модуль  $\gamma_2$ , чтобы добиться выполнения условия  $\cos \varphi > 0$ ). Тогда, окончательно, имеем

$$\mathbf{M}_O = f S_0 |\gamma_2| [\boldsymbol{\gamma} \times a \mathbf{e}_x]$$

(в точности как в работе В. В. Сазонова [3]).

**Пример 2.** В работе Т. А. Рыбниковой и Д. В. Трещева [4] рассматривалась пластина площади  $S_0$ , закрепленная на невесомой штанге длины  $l$ , соединяющей неподвижную точку и центр масс пластины, причем штанга перпендикулярна плоскости пластины. Направим по штанге ось  $Oz$  системы координат, жестко связанной с данным твердым телом. Тогда радиус-вектор центра масс тела имеет вид

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{OC} = l \mathbf{e}_z = (0, 0, l).$$

Теперь вычислим площадь  $S(\boldsymbol{\gamma})$  тени от данной пластины. Вектором нормали к пластине является вектор  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ . Используя рассуждения, представленные выше, находим, что

$$\cos \varphi = |(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e}_z)| = |\gamma_3|.$$

Таким образом, получаем

$$f S(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = f S_0 l |\gamma_3| \mathbf{e}_z = (0, 0, f S_0 l |\gamma_3|).$$

Можно представить этот вектор как вектор градиента некоторой функции  $U(\boldsymbol{\gamma})$ , равной

$$U(\boldsymbol{\gamma}) = \frac{f S_0 l}{2} |\gamma_3| \gamma_3,$$

то есть в точности как в работе [4].

#### 4. Потенциальность момента. Существование интеграла типа энергии.

Итак, уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц имеют вид уравнений (10). Эти уравнения обладают интегральным инвариантом плотности, равным единице, а также первыми интегралами:

$$J_1 = (\mathbb{J} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma}), \quad J_2 = (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 1.$$

Уравнения (10) обратимы, то есть выдерживают замену переменных и времени:  $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, t) \rightarrow (-\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, -t)$ . Однако в общем случае эти уравнения не допускают интеграла типа энергии. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** Если для любых  $i, j, i \neq j$ , выполнены соотношения

$$c_i \frac{\partial S}{\partial \gamma_j} + \frac{\partial c_i}{\partial \gamma_j} S(\gamma) = c_j \frac{\partial S}{\partial \gamma_i} + \frac{\partial c_j}{\partial \gamma_i} S(\gamma), \quad (16)$$

то уравнения движения допускают дополнительный первый интеграл типа интеграла энергии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$S(\gamma) \mathbf{c}(\gamma) = \frac{\partial U}{\partial \gamma} \quad (17)$$

для некоторой функции  $U(\gamma)$ . Тогда если функция  $U$  достаточно гладкая, то для выполнения соотношений (17) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (16). При этом уравнения движения (10) допускают первый интеграл:

$$J_0 = \frac{1}{2} (\mathbb{J} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - fU(\gamma) = \text{const.}$$

Очевидно, что в случае, когда тело с неподвижной точкой ограничено поверхностью сферы, то площадь  $S(\gamma)$  фигуры  $S_0$  и компоненты  $c_i$  вектора  $\mathbf{c}(\gamma)$  являются постоянными. Следовательно, соотношения (16) выполняются. Как уже говорилось, в этом случае уравнения движения тела совпадают с уравнениями движения твердого тела в однородном силовом поле.  $\square$

Однако соотношения (16) выполняются далеко не всегда. В примере из работы [3], рассмотренном выше, произведение  $S(\gamma) \mathbf{c}(\gamma)$  имеет вид

$$S(\gamma) \mathbf{c}(\gamma) = S_0 |\gamma_2| a \mathbf{e}_1 = (S_0 |\gamma_2| a, 0, 0).$$

В этом случае выражение  $S(\gamma) \mathbf{c}(\gamma)$  не будет представляться в виде градиента некоторой функции  $U(\gamma)$ .

Напротив, в примере из работы [4] момент сил, действующих на тело с неподвижной точкой, может быть представлен как вектор градиента некоторой функции, и уравнения движения системы из работы [4] допускают интеграл типа энергии.

## Литература

1. Белецкий В. В. *Движение искусственного спутника относительно центра масс*. Москва, Наука (1965).
2. Баранцев Р. Г., Цжень-юй У. Силы и моменты, действующие на тела вращения в свободно-молекулярном потоке. *Вестник Ленинградского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия*, вып. 13, 79–92 (1961).
3. Сазонов В. В. Об одном механизме потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника. Препринт ИПМ № 107. Москва (1988).
4. Рыбникова Т. А., Трещев Д. В. Существование инвариантных торов в задаче о движении спутника с солнечным парусом. *Космические исследования* **28** (2), 309–312 (1990).

Статья поступила в редакцию 17 декабря 2021 г.;  
доработана 14 февраля 2022 г.;  
рекомендована к печати 3 марта 2022 г.

Контактная информация:

Кулешов Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; kuleshov@mech.math.msu.su  
Гаджиев Максим Магомедович — аспирант; maxuta-jr@yandex.ru

# The problem of motion of a rigid body with a fixed point in a flow of particles\*

A. S. Kuleshov, M. M. Gadzhiev

Lomonosov Moscow State University,  
1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

**For citation:** Kuleshov A. S., Gadzhiev M. M. The problem of motion of a rigid body with a fixed point in a flow of particles. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 3, pp. 550–560. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.315> (In Russian)

The problem of motion of a rigid body with a fixed point in a free molecular flow of particles is considered. It is shown that the equations of motion of the body generalize the classical Euler – Poisson equations of motion of a heavy rigid body with a fixed point and they are represented in the form of the classical Euler – Poisson equations in the case, when the surface of the body in a flow of particles is a sphere. Problems of the existence of first integrals in the considered system are discussed

*Keywords:* body with a fixed point, free molecular flow, first integrals.

## References

1. Beletsky V. V. *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no centra mass*. Moscow, Nauka Publ. (1965). (In Russian) [Eng. transl.: Beletsky V. V. *Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass*. In Ser.: Mechanics of Space Flight Series. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation (1966)].
2. Barantsev R. G., Tszhen-yui U. Forces and Moments Acting on Solids of Revolution in a Free Molecular Flow. *Vestnik of Leningrad University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 3, 79–92 (1961). (In Russian)
3. Sazonov V. V. On the framework of loss of stability of the satellite's gravitational orientation mode. Preprint IPM no. 107. Moscow (1988). (In Russian)
4. Rybnikova T. A., Treschev D. V. Existence of invariant tori in the problem of motion of the satellite with a solar sail. *Cosmic Research* **28** (2), 309–312 (1990). (In Russian)

Received: December 17, 2021

Revised: February 14, 2022

Accepted: March 3, 2022

## Authors' information:

Alexander S. Kuleshov — [kuleshov@mech.math.msu.su](mailto:kuleshov@mech.math.msu.su)

Maxim M. Gadzhiev — [maxuta-jr@yandex.ru](mailto:maxuta-jr@yandex.ru)

---

\*This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00637).