УДК 519.8+330.4 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 4
MSC 15A80, 90C24, 90C47, 90B35

Алгебраическое решение задач оптимального планирования с учетом директивных сроков начала работ проекта

С. А. Губанов

Санкт-Петербургский филиал АО «КБ “Луч”»,
Российская Федерация, 197376, Санкт-Петербург, ул. Академика Павлова, 14А

Для цитирования: *Губанов С. А.* Алгебраическое решение задач оптимального планирования с учетом директивных сроков начала работ проекта // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 4. С. 602–611. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.403

Предлагается прямое аналитическое решение задач составления оптимального графика выполнения работ проекта, основанное на использовании моделей и методов тропической (идемпотентной) оптимизации. Задачи построения оптимального графика сводятся к задачам тропической оптимизации, которые заключаются в минимизации целевой функции при заданных строгих ограничениях на время выполнения работ. В качестве критерия оптимальности плана рассматривается максимальное отклонение от директивных сроков времени начала работ проекта, которое требуется минимизировать. Строгие ограничения на время выполнения работ проекта выражены в виде условий предшествования и границ на время начала и окончания работ проекта. Подобные задачи возникают при необходимости по тем или иным причинам (например, по технологическим ограничениям или требованиям безопасности) по возможности обеспечить начало работ в заданное время. В статье сначала описываются ограничения и целевые функции в терминах обычной математики и формально задаются исследуемые задачи управления проектами. Далее приводятся необходимые для представления задач составления оптимального графика элементы тропической математики. Затем задачи планирования формулируются в терминах идемпотентной математики и таким образом сводятся к задаче тропической оптимизации. Предлагается решение задачи, представленное в явном виде в аналитической форме, удобной как для формального анализа, так и для численных расчетов. В конце статьи предложен поясняющий численный пример.

Ключевые слова: тропическая математика, идемпотентное полуполе, тропическая оптимизация, управление проектами, сетевое планирование.

1. Введение. Полукольца и полуполя с идемпотентным сложением (которые изучает тропическая математика [1–5]) могут быть использованы, в частности, для составления оптимальных графиков (календарных планов) выполнения работ проекта [6–9], что является актуальной задачей, часто появляющейся в управлении проектами [10, 11]. В данной статье решаются задачи минимизации отклонения от директивных сроков начала работ проекта. Для решения задачи тропической оптимизации, к которой впоследствии сводятся задачи планирования, используются результаты работы [12].

2. Задачи оптимального календарного планирования. При составлении оптимальных графиков выполнения работ проекта часто возникает потребность синхронизировать выполнение работ во времени. Рассмотрим две подобные задачи. В первой — необходимо минимизировать максимальный выход времени начала всех работ за пределы некоторых заданных временных интервалов. Во второй — требуется минимизировать максимальное отклонение времени начала работ от заданных директивных сроков. Вторая задача является частным случаем первой, в которой нижние и верхние концы временных интервалов совпадают.

В задачах имеются строгие ограничения, заданные в форме минимально допустимых временных интервалов между началом и завершением работ и в виде границ для времени начала и завершения каждой работы.

Рассмотрим проект, который заключается в параллельном выполнении n работ со временными ограничениями, описываемыми при помощи отношений предшествования «старт — старт», «старт — финиш» и «финиш — старт», а также с границами для наиболее раннего и наиболее позднего допустимого времени начала и наиболее позднего времени завершения работ.

При помощи величин x_i и y_i обозначим время начала и завершения для каждой работы $i = 1, \ldots, n$, а при помощи g_i, h_i и f_i введем соответственно наиболее раннее и наиболее позднее возможное время начала работы и самое позднее допустимое время завершения работы. На время начала и завершения накладываются следующие ограничения:

$$g_i \leq x_i \leq h_i, \qquad y_i \leq f_i.$$

Ограничениями «старт — старт» назовем ограничения, которые определяются для каждой работы i при помощи неравенств $b_{ij} + x_j \leq x_i$ для всех $j = 1, \ldots, n$, где b_{ij} — минимально допустимый интервал времени между началом работы i и началом работы j.

В случае, если величина b_{ij} не задана, будем считать, что $b_{ij} = -\infty$. Заменим полученные неравенства эквивалентным неравенством

$$\max_{1 \leq j \leq n} (b_{ij} + x_j) \leq x_i.$$

Для каждой работы i ограничение «старт — финиш» определяется при помощи неравенства $c_{ij} + x_j \leq y_i$, где c_{ij} — минимально допустимый интервал между временем начала работы j и завершением i. В случае, если интервал не задан, считаем $c_{ij} = -\infty$. Объединяя представленные неравенства в одно, получим

$$\max_{1 \leq j \leq n} (c_{ij} + x_j) \leq y_i.$$

Считаем, что работа завершается немедленно после выполнения наложенных на нее ограничений «старт — финиш», а следовательно, хотя бы для одного j должно выполняться равенство $c_{ij} + x_j = y_i$. Тогда предыдущее неравенство можно заменить равенством

$$\max_{1 \leq j \leq n} (c_{ij} + x_j) = y_i.$$

При помощи неравенств $d_{ij} + y_j \leq x_i$ зададим ограничения «финиш — старт», где d_{ij} является минимально допустимым интервалом между временем завершения работы j и временем начала i (если интервал не задан, будем считать $d_{ij} = -\infty$). Объединяя неравенства в одно, получим

$$\max_{1 \leq j \leq n} (d_{ij} + y_j) \leq x_i.$$

Пусть p_i и q_i обозначают соответственно нижний и верхний концы интервала директивных сроков начала для каждой работы $i = 1, \ldots, n$. Будем считать, что в задаче требуется по возможности минимизировать максимальный по всем i выход за нижний конец интервала $p_i - x_i$ и максимальный — за верхний конец $x_i - q_i$. Определим критерий оптимальности, который требуется минимизировать в виде

$$\max \left(\max_{1 \leq i \leq n} (p_i - x_i), \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - q_i) \right).$$

Сформулируем задачу минимизации максимального выхода за пределы интервала директивных сроков начала работ при введенных выше ограничениях:

$$\begin{aligned} \min_{x_i, y_i} \quad & \max \left(\max_{1 \leq i \leq n} (p_i - x_i), \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - q_i) \right), \\ & \max_{1 \leq j \leq n} (b_{ij} + x_j) \leq x_i, \quad \max_{1 \leq j \leq n} (c_{ij} + x_j) = y_i, \\ & \max_{1 \leq j \leq n} (d_{ij} + y_j) \leq x_i, \quad g_i \leq x_i \leq h_i, \quad y_i \leq f_i, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

Заметим, что в случае равенства значений $p_i = q_i$ временные интервалы сужаются до значений директивных сроков начала работ, а критерий оптимальности может быть представлен в следующем виде:

$$\max \left(\max_{1 \leq i \leq n} (p_i - x_i), \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - p_i) \right).$$

Запишем задачу минимизации максимального отклонения от директивных сроков:

$$\begin{aligned} \min_{x_i, y_i} \quad & \max \left(\max_{1 \leq i \leq n} (p_i - x_i), \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - p_i) \right) \\ & \max_{1 \leq j \leq n} (b_{ij} + x_j) \leq x_i, \quad \max_{1 \leq j \leq n} (c_{ij} + x_j) = y_i, \\ & \max_{1 \leq j \leq n} (d_{ij} + y_j) \leq x_i, \quad g_i \leq x_i \leq h_i, \quad y_i \leq f_i, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

Ниже эти задачи будут сформулированы в терминах тропической математики и решены с помощью методов тропической оптимизации.

3. Элементы тропической математики. Для описания и решения задачи тропической оптимизации, к которой впоследствии сводятся задачи планирования, потребуется привести обзор определений и результатов тропической (идемпотентной) математики [1–5].

Пусть множество $\mathbb{X}$ замкнуто относительно ассоциативных и коммутативных операций сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$. При этом сложение обладает свойством идемпотентности (для любого $x \in \mathbb{X}$ выполняется равенство $x \oplus x = x$), умножение дистрибутивно относительно сложения и обратимо (для каждого ненулевого x существует обратный элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$). Множество $\mathbb{X}$ содержит нейтральные элементы: по сложению — ноль $\mathbb{0}$ и по умножению — единицу $\mathbb{1}$.

Алгебраическую систему $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$ называют идемпотентным полуполем. Знак операции умножения $\otimes$ для простоты далее будет опускаться.

При помощи идемпотентного сложения может быть задан частичныый порядок. Будем считать, что $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Предполагаем, что предложенный частичный порядок дополнен до линейного.

Определим целую степень следующим образом: $x^0 = \mathbb{1}$, $x^p = x^{p-1}x$, $x^{-p} = (x^{-1})^p$, $\mathbb{0}^p = \mathbb{0}$ для каждого $x \neq \mathbb{0}$ и целого $p > 0$. Считаем, что операция возведения в рациональную степень также определена.

В качестве примера идемпотентного полуполя $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$ можно рассматривать вещественное полуполе $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, + \rangle$, где $\mathbb{0} = -\infty$, $\mathbb{1} = 0$, $\oplus = \max$ и $\otimes = +$. Полуполе $\mathbb{R}_{\max,+}$, которое обычно называют $(\max, +)$-алгеброй, будет далее использовано для решения задач оптимального планирования.

Множество матриц, состоящее из m строк и n столбцов с элементами из $\mathbb{X}$ обозначим через $\mathbb{X}^{m \times n}$, а множество векторов из n элементов через $\mathbb{X}^n$.

Для согласованных по размеру матриц и векторов сложение, умножение и умножение на скаляр выполняются как обычно — с заменой арифметических операций $+$ и $\times$ на $\oplus$ и $\otimes$. Отношение порядка, заданное выше, обобщается на матрицы (векторы) и понимается покомпонентно.

Определим для каждого вектора $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathbb{X}^n$ его транспонированный вектор $\boldsymbol{x}^T$ и мультипликативно сопряженный вектор-строку $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$, где $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$ в противном случае.

Вектор без нулевых элементов будем называть регулярным, а матрицу без нулевых столбцов — регулярной по столбцам. Введем обозначение $\mathbf{1} = (\mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1})^T$.

Вектор $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^n$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a} \in \mathbb{X}^n$, если $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}$ для некоторого скаляра $x \in \mathbb{X}$.

Рассмотрим более подробно квадратные матрицы в $\mathbb{X}^{n \times n}$. Матрица $\boldsymbol{I}$ с единицами на главной диагонали и нулями вне ее называется единичной.

Определим целую степень $p > 0$ квадратной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ следующим образом: $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A}$.

Введем след матрицы $\operatorname{tr} \boldsymbol{A}$ и тропический аналог определителя $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A})$ в виде

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}, \quad \operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^k.$$

Если выполняется условие $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, то определена матрица Клини в виде конечной суммы степеней матрицы

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

Пусть заданы матрица $\boldsymbol{C} \in \mathbb{X}^{m \times n}$ и вектор $\boldsymbol{f} \in \mathbb{X}^m$. Рассмотрим задачу решения относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ неравенства

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{f}. \tag{3}$$

Представим утверждение, которое дает решение задачи.

Лемма 1 ([2]). *Для регулярной по столбцам матрицы $\boldsymbol{C}$ и регулярного вектора $\boldsymbol{f}$ вектор $\boldsymbol{x}$ является решением неравенства* (3) *тогда и только тогда, когда*

$$\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{f}^- \boldsymbol{C})^-.$$

4. Решение задачи оптимального планирования. Представим решение задачи минимизации максимального выхода за пределы временного интервала директивных сроков начала работ (1) с ограничениями вида «старт — старт», «старт — финиш», «финиш — старт» и границами для самого раннего и самого позднего допустимого времени начала и самого позднего приемлемого времени завершения работ. Сначала сведем эту задачу к задаче тропической оптимизации, а затем предложим ее решение.

Переформулируем задачу (1) в терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$. Для этого введем матрично-векторные обозначения:

$$\boldsymbol{B} = (b_{ij}), \quad \boldsymbol{C} = (c_{ij}), \quad \boldsymbol{D} = (d_{ij}),$$
$$\boldsymbol{x} = (x_i), \quad \boldsymbol{f} = (f_i), \quad \boldsymbol{g} = (g_i), \quad \boldsymbol{h} = (h_i), \quad \boldsymbol{p} = (p_i), \quad \boldsymbol{q} = (q_i).$$

Перепишем задачу, заменяя арифметические операции на операции полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$. Выход за нижний конец интервала для работы i принимает вид $x_i^{-} p_i$, а выход за верхний конец интервала — $q_i^{-} x_i$. Целевую функцию можно представить следующим образом:

$$\min_{x_i, y_i} \quad \bigoplus_{1 \leq i \leq n} x_i^{-} p_i \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq n} q_i^{-} x_i.$$

Переформулируем задачу в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$:

$$\begin{aligned} \min_{x_i, y_i} \quad & \bigoplus_{1 \leq i \leq n} x_i^{-} p_i \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq n} q_i^{-} x_i, \\ & \bigoplus_{1 \leq j \leq n} b_{ij} x_j \leq x_i, \qquad \bigoplus_{1 \leq j \leq n} c_{ij} x_j = y_i, \\ & \bigoplus_{1 \leq j \leq n} d_{ij} y_j \leq x_i, \quad g_i \leq x_i \leq h_i, \quad y_i \leq f_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

В векторной форме задача имеет вид

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}} \quad & \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{D}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{f}. \end{aligned} \tag{4}$$

Сначала рассмотрим известную задачу с меньшим набором ограничений:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение этой задачи дает следующее утверждение.

Теорема 1 ([12]). *Пусть* $\boldsymbol{B}$ *— матрица, удовлетворяющая условию* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$. *Пусть* $\boldsymbol{g}$ *— вектор, а* $\boldsymbol{q}$ *и* $\boldsymbol{h}$ *— регулярные векторы такие, что* $\boldsymbol{h}^{-} \boldsymbol{B}^{*} \boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$.

Тогда минимальное значение целевой функции в задаче (5)

$$\theta = (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{B}^{*} \boldsymbol{p})^{1/2} \oplus \boldsymbol{h}^{-} \boldsymbol{B}^{*} \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{B}^{*} \boldsymbol{g},$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}^{*} \boldsymbol{u},$$

где $\boldsymbol{u}$ *— любой регулярный вектор, который удовлетворяет условиям*

$$\boldsymbol{g} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{u} \leq ((\boldsymbol{h}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{q}^{-})\boldsymbol{B}^{*})^{-}.$$

Затем представим результат, предлагающий решение задачи тропической оптимизации (4). Заметим, что целевые функции в задачах (4) и (5) совпадают. Для того чтобы свести новую задачу (4) к известной (5), потребуется свести бóльший набор ограничений к меньшему, что можно сделать, воспользовавшись взаимосвязью между неизвестными и заменяя ограничения на эквивалентные. Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{D}$ *— матрицы,* $\boldsymbol{C}$ *— регулярная по столбцам матрица такие, что матрица* $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{DC}$ *удовлетворяет условию* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}) \leq \mathbb{1}$*. Пусть* $\boldsymbol{g}$ *— вектор, а* $\boldsymbol{f}$ *и* $\boldsymbol{h}$ *— регулярные векторы такие, что вектор* $\boldsymbol{s}^{T} = \boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{h}^{-}$ *удовлетворяет условию* $\boldsymbol{s}^{T}\boldsymbol{R}^{*}\boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$*.*

Тогда минимальное значение целевой функции в задаче (4)

$$\theta = (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{R}^{*}\boldsymbol{p})^{1/2} \oplus \boldsymbol{s}^{T}\boldsymbol{R}^{*}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{R}^{*}\boldsymbol{g},$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^{*}\boldsymbol{u},$$

где $\boldsymbol{u}$ *— любой регулярный вектор, который удовлетворяет условиям*

$$\boldsymbol{g} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{u} \leq ((\boldsymbol{s}^{T} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{q}^{-})\boldsymbol{R}^{*})^{-}.$$

Доказательство. Принимая во внимание, что $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx}$, заменим ограничения $\boldsymbol{Dy} \leq \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{f}$ на $\boldsymbol{DCx} \leq \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{Cx} \leq \boldsymbol{f}$. После объединения неравенств $\boldsymbol{Bx} \leq \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{DCx} \leq \boldsymbol{x}$ в одно неравенство $\boldsymbol{Rx} \leq \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{DC}$, представим задачу следующим образом:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{Rx} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{Cx} \leq \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}. \end{aligned}$$

Применив лемму 1, получим, что $\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C})^{-}$. В силу антитонности обращения неравенства, ограничивающие вектор $\boldsymbol{x}$ сверху, можно переписать следующим образом: $\boldsymbol{x}^{-} \geq \boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{x}^{-} \geq \boldsymbol{h}^{-}$. Объединяя два неравенства в одно, получим $\boldsymbol{x}^{-} \geq \boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{h}^{-}$ или $\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{f}^{-}\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{h}^{-})^{-} = (\boldsymbol{s}^{T})^{-}$.

Заметим, что исходную задачу теперь можно записать в виде

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{Rx} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{s}^{T})^{-}. \end{aligned}$$

Полученная задача имеет вид задачи (5), где в роли матрицы $\boldsymbol{B}$ и вектора $\boldsymbol{h}$ берутся соответственно $\boldsymbol{R}$ и $(\boldsymbol{s}^{T})^{-}$. □

Задача (2) сводится к задаче (1) и решается при помощи леммы 2, в которой следует положить $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$.

6. Численный пример. Для иллюстрации полученного результата представим численный пример решения задачи минимизации максимального отклонения от директивных сроков начала работ проекта (2). Рассмотрим проект, который состоит из $n = 3$ работ с ограничениями, заданными с использованием обозначения $\mathbb{0} = -\infty$ при помощи следующих матриц и векторов:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -6 \\ \mathbb{0} & -4 & -7 \\ -5 & \mathbb{0} & -4 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим вспомогательные матрицы:

$$\boldsymbol{DC} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{DC} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

и затем найдем степени:

$$\boldsymbol{R}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что выполняется условие $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}) = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{R} \oplus \mathrm{tr}\,\boldsymbol{R}^2 \oplus \mathrm{tr}\,\boldsymbol{R}^3 = 0 \le \mathbb{1}$, последовательно находим

$$\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}^*\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{g} = -1, \qquad \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{g} = -1.$$

Проверим, что выполняется условие

$$\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{f}^-\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{h}^-)\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{g} = -1 < \mathbb{1}.$$

Вычислим значения:

$$\boldsymbol{p}^-\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{p} = 1, \quad \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{p} = 1, \quad \boldsymbol{p}^-\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{g} = 0.$$

Используя полученные величины, найдем минимум целевой функции:

$$\theta = (\boldsymbol{p}^-\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{p})^{1/2} \oplus \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{p}^-\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{g} = 1.$$

Вычислим следующие векторы:

$$\boldsymbol{s}^T \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{p}^- = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{g} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ((\boldsymbol{s}^T \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{p}^-)\boldsymbol{R}^*)^- = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь запишем все решения $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ при помощи вектора параметров $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ в форме

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{u} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку все столбцы матрицы $\boldsymbol{R}^*$ коллинеарны, ее можно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим скаляр $u = u_1 \oplus (-1)u_2 \oplus (1)u_3$. Заменив вектор параметров $\boldsymbol{u}$ на введенный скаляр и вычислив границы для u, получим решение:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} u, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} u, \quad 1 \leq u \leq 2.$$

Запишем координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в терминах обычных арифметических операций:

$$x_1 = u, \quad x_2 = u + 1, \quad x_3 = u - 1, \quad y_1 = u + 4, \quad y_2 = u + 3, \quad y_3 = u + 2. \quad 1 \leq u \leq 2.$$

7. Заключение. Получено прямое явное решение двух задач составления оптимального графика выполнения работ, которые заключаются в минимизации максимального отклонения времени начала работ от директивных сроков. В задачах заданы строгие ограничения на время выполнения работ вида «старт — старт», «старт — финиш», «финиш — старт», а также ограничения на самое раннее и самое позднее допустимое время начала и самое позднее время окончания работ. Представленное решение может быть использовано как при формальном анализе исследуемых задач, так и для непосредственных вычислений.

Литература

1. Маслов В. П., Колокольцев В. Н. *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении.* Москва, Физматлит (1994).

2. Golan J. S. *Semirings and Affine Equations Over Them: Theory and Applications.* In Ser.: Mathematics and Its Applications **556**. New York, Springer (2003). https://doi.org/10.1007/978-94-017-0383-3

3. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. *Max Plus at Work.* Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton, Princeton University Press (2006).

4. Butkovič P. Max-linear Systems: Theory and Algorithms. In: *Springer Monographs in Mathematics.* London, Springer (2010).

5. Кривулин Н. К. *Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем.* Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2009).

6. Krivulin N. Direct solution to constrained tropical optimization problems with application to project scheduling. *Computational Management Science* **14** (1), 91–113 (2017). https://doi.org/10.1007/s10287-016-319-0259-0

7. Krivulin N. Tropical optimization problems with application to project scheduling with minimum makespan. *Annals of Operations Research* **256** (1), 75–92 (2017). https://doi.org/10.1007/s10479-015-1939-9

8. Krivulin N. Tropical optimization problems in time-constrained project scheduling. *Optimization* **66** (2), 205–224 (2017). https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1264946

9. Кривулин Н. К., Губанов С. А. Алгебраическое решение задачи оптимального планирования сроков проекта в управлении проектами. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8** (66), вып. 1, 73–87 (2021). https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.107

10. T'kindt V., Billaut J. C. *Multicriteria Scheduling. Theory, Models and Algorithms.* 2nd ed. Berlin, Springer (2006). https://doi.org/10.1007/b106275

11. Kerzner H. *Project Management.* 10th ed. Hoboken, Wiley (2010).

12. Krivulin N. Complete solution of a constrained tropical optimization problem with application to location analysis. *Relational and Algebraic Methods in Computer Science.* Cham, Springer, 362–378 (2014). https://doi.org/10.1007/978-3-319-06251-8-22 (Lecture Notes in Computer Science, vol. 8428.)

Статья поступила в редакцию 21 апреля 2022 г.;
доработана 8 июня 2022 г.;
рекомендована к печати 9 июня 2022 г.

Контактная информация:

Губанов Сергей Александрович — инженер-программист; segubanov@mail.ru

Algebraic solution of optimal sheduling problems subject to due dates for start time of project jobs

S. A. Gubanov

St Petersburg Branch of Design Bureau "Luch",
14A, ul. Akademika Pavlova, St Petersburg, 197376, Russian Federation

For citation: Gubanov S. A. Algebraic solution of optimal sheduling problems subject to due dates for start time of project jobs. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 4, pp. 602–611.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.403 (In Russian)

A direct solution is proposed for problems of drawing up the optimal schedule for jobs in a project based on using models and methods of tropical optimization. The problems of the development of an optimal plan are reduced to problems of tropical optimization, which consist in minimizing the objective function under given strict constraints on the start and finish time of jobs. As optimality criteria of the plan the maximum deviation from the due dates of the start of the jobs of the project is taken, which needs to be minimized. Strict time constraints for the jobs are given in the form of precedence relations and bounds for the start and finish times of the jobs. Such tasks arise if it is necessary for one reason or another (for example, due to technological limitations or safety requirements) to start jobs at specified time. In the article constraints and objective functions are first described in terms of ordinary mathematics and then the considered problems of project sheduling are set. Elements of tropical mathematics are discussed which are necessary for the presentation of the problems of drawing up the optimal schedule in a tropical form. Then the sheduling problems are formulated in terms of the idempotent mathematics and reduced to the problem of tropical optimization. Solution of the problems are presented in an explicit analytical form, which well suited for both formal analysis and numerical computations. An explanatory numerical example is provided at the end of the article.

Keywords: tropical mathematics, idempotent semifield, tropical optimization, project sheduling, network planning.

References

1. Maslov V. P., Kolokoltsev V. N. *Idempotent analysis and its application in optimal control.* Moscow, Fizmatlit Publ. (1994). (In Russian)

2. Golan J. S. *Semirings and Affine Equations Over Them: Theory and Applications.* In Ser.: Mathematics and Its Applications, vol. 556. New York, Springer (2003). https://doi.org/10.1007/978-94-017-0383-3

3. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. *Max Plus at Work.* Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton, Princeton University Press (2006).

4. Butkovič P. Max-linear Systems: Theory and Algorithms. In: *Springer Monographs in Mathematics.* London, Springer (2010).

5. Krivulin N. *Methods of Idempotent Algebra in Problems of Complex Systems Modeling and Analysis.*, St Petersburg, St Petersburg University Press (2009). (In Russian)

6. Krivulin N. Direct solution to constrained tropical optimization problems with application to project scheduling. *Computational Management Science* **14** (1), 91–113 (2017). https://doi.org/10.1007/s10287-016-319-0259-0

7. Krivulin N. Tropical optimization problems with application to project scheduling with minimum makespan. *Annals of Operations Research* **256** (1), 75–92 (2017). https://doi.org/10.1007/s10479-015-1939-9

8. Krivulin N. Tropical optimization problems in time-constrained project scheduling. *Optimization* **66** (2), 205–224 (2017). https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1264946

9. Krivulin N., Gubanov S. Algebraic solution of the problem of assigning a project planning term in project management. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **8** (66), iss. 1, 73–87 (2021). https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.107 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **54**, iss. 1, 58–68 (2021). https://doi.org/10.1134/S1063454121010088].

10. T'kindt V., Billaut J. C. *Multicriteria Scheduling. Theory, Models and Algorithms.* Berlin, Springer. 2$^{\text{nd}}$ ed. (2006). https://doi.org/10.1007/b106275

11. Kerzner H. *Project Management.* 10$^{\text{th}}$ ed. Hoboken, Wiley (2010).

12. Krivulin N. Complete solution of a constrained tropical optimization problem with application to location analysis. *Relational and Algebraic Methods in Computer Science. Cham: Springer*, 362–378 (2014). https://doi.org/10.1007/978-3-319-06251-8-22 (Lecture Notes in Computer Science, vol. 8428.)

Received: April 21, 2022
Revised: June 8, 2022
Accepted: June 9, 2022

Author's information:

Sergei A. Gubanov — segubanov@mail.ru