УДК 517 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 4
MSC 26D15

Дополнение к неравенству Гёльдера для кратных интегралов. II*

Б. Ф. Иванов

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна,
Российская Федерация, 191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 18
Высшая школа технологии и энергетики,
Российская Федерация, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4

Для цитирования: *Иванов Б. Ф.* Дополнение к неравенству Гёльдера для кратных интегралов. II // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 4. С. 612–624. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.404

Данная статья является второй, заключительной, частью работы автора, опубликованной в предыдущем номере журнала. Основной результат статьи составляет утверждение о том, что если для функций $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n), \dots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$, где $m \geqslant 2$ и числа $p_1, \dots, p_m \in (1, +\infty]$ таковы, что $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1$ выполнено «нерезонансное» условие (понятие, введенное автором в предыдущей работе для функций из пространств $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1, +\infty]$), то: $\sup_{a,b\in\mathbb{R}^n} \left| \int\limits_{[a,b]} \prod\limits_{k=1}^{m} [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right| \leqslant C \prod\limits_{k=1}^{m} \|\gamma_k + \Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)}$, где $[a, b]$ — n-мерный параллелепипед, константа $C > 0$ не зависит от функций $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$, а $L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant k \leqslant m$ — это некоторые специально построенные нормированные пространства. Кроме того, в терминах выполнения некоторого нерезонансного условия в работе дан признак ограниченности интеграла от произведения функций при интегрировании по подмножеству $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: резонанс, неравенство Гёльдера, преобразование Фурье, интегральные неравенства.

1. Введение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$ множество — положительной меры Лебега, $m \geqslant 2$, числа $p_1, \dots, p_m \in (1, +\infty]$, функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(D), \dots, \gamma_m \in L^{p_m}(D)$ и выполнено условие

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1.$$

Тогда для этих функций выполняется неравенство Гёльдера (см., например, [2, с. 232]):

$$\left| \int\limits_D \prod_{k=1}^{m} \gamma_k(\tau) d\tau \right| \leqslant \prod_{k=1}^{m} \|\gamma_k\|_{L^{p_k}(D)}. \tag{1}$$

Если же

$$\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1, \tag{2}$$

*Первая часть работы опубликована здесь: *Иванов Б. Ф.* Дополнение к неравенству Гёльдера для кратных интегралов. I // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 255–268. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.207

и $mes\, D < +\infty$, то для функций $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ очевидно выполняется неравенство, аналогичное неравенству (1).

В настоящей статье, являющейся второй, заключительной частью работы автора [1], вопрос об оценке интеграла от произведения функций рассматривается в предположении, что выполнено неравенство (2) и $mes\, D = \infty$.

Статья состоит из двух частей, включая введение. Введение содержит основные результаты, полученные в [1], и некоторые вспомогательные утверждения. Основное утверждение работы — теорема 6 — содержится во второй части и состоит в следующем.

Если числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют неравенству (2), функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$ и для этих функций выполнено «нерезонансное» условие (определение 4), то

$$\sup_{a,b \in R^n} \left| \int\limits_{[a,b]} \prod_{k=1}^{m} [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right| \leqslant C \prod_{k=1}^{m} \|\gamma_k + \Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)}, \tag{3}$$

где $[a,b]$ — n-мерный параллелепипед, константа $C > 0$ не зависит от функций $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$, а $L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$ — пространства со специально определенной нормой, состоящие из тех элементов $L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, множество «резонансных» точек (определение 1) которых лежит в заранее выбранной окрестности множества резонансных точек функции γ_k, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Также в терминах отсутствия резонанса рассмотрен вопрос (теорема 7) об ограниченности интеграла от произведения функций при интегрировании по множеству вида $D \cap [a,b] \subset \mathbb{R}^n$, где $mes\, D = +\infty$ и $[a,b]$ — произвольный n-мерный параллелепипед.

В работе использованы следующие обозначения и формулы:

• $\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$;

• $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^n)\}$ — множество резонансных точек функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$;

• $\mathcal{R}_k$ — множество резонансных точек функции γ_k;

• $\mathcal{F}$ — объединение координатных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$;

• $d = \operatorname{dist}\bigl[\mathcal{F}, \sum\limits_{k=1}^{m} \mathcal{R}_k\bigr] > 0$ — нерезонансное соотношение (определение операции сложения множеств из $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ приводится);

• Π — открытый n-мерный куб с ребром 2 и центром в начале координат;

• $V(W, \delta) = \bigcup_{w \in W} (w + \delta\Pi)$, где $W \subset \mathbb{R}^n$ и $\delta > 0$;

• $V(W, \delta, \Delta) = \bigcup_{u \in W} B_u$, где $W \subset \widetilde{\mathbb{R}}^n$, $\delta, \Delta > 0$ и $B_u = u + \delta\Pi$, если u — конечно, а в случае, когда u бесконечно, то B_u — это бесконечный параллелепипед с центром в точке $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^n \backslash \mathbb{R}^n$);

• $V(W)$ — общее обозначение для множеств $V(W, \delta)$ и $V(W, \delta, \Delta)$.

Приведем некоторые обозначения и утверждения из первой части работы автора [1].

Для любой функция $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ обозначим ее преобразование Фурье через $\widehat{u}$ и выберем его в виде

$$\widehat{u}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y,\tau)} u(\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Обратное преобразование Фурье функции $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $\widetilde{v}$. Оно будет иметь вид

$$\widetilde{v}(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{iy\tau} v(y)\, dy.$$

Через $S(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций, быстро убывающих на бесконечности, а через $S'(\mathbb{R}^n)$ — пространство медленно растущих обобщенных функций или, что то же самое, пространство обобщенных функций медленного роста.

Пусть $p \in [1, +\infty]$ и $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$, тогда, как известно (см., например, [3, с. 77]), функционал

$$(\gamma, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\gamma(t)} \varphi(t)\, dt, \qquad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

принадлежит пространству $S'(\mathbb{R}^n)$.

Известно также, что преобразованием Фурье медленно растущей обобщенной функции f называется линейный непрерывный функционал на $S(\mathbb{R}^n)$, обозначаемый в соответствии с (4) через $\widehat{f}$ и задаваемый (с учетом выбора определения для (f, φ) и вида записи преобразования Фурье) формулой $(\widehat{f}, \widehat{\varphi}) = (2\pi)^n (f, \varphi)$. Тогда с учетом введенных выше обозначений известная формула (см., например, [4, с. 240]) принимает вид

$$(2\pi)^n \{\gamma_1(\tau)\gamma_2(\tau)\}\widehat{\ }(y) = \widehat{\gamma}_1(y) * \widehat{\gamma}_2(y), \tag{5}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $p \in [1, +\infty]$, $n \geq 1$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ — произвольный вектор с положительными координатами и $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим:

1) $Q(\varepsilon) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{y \,|\, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ |y_k| < \varepsilon_k\}$, таким образом $Q(\varepsilon)$ — «крестоообразная» окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$;

2) $\Gamma(\mathbb{R}^n \setminus Q(\varepsilon), p)$ — множество всех функций $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$, носители преобразования Фурье которых лежат в $\mathbb{R}^n \setminus Q(\varepsilon)$;

3) $E_t = \{\tau \,|\, \tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \in R^n,\ \tau_j \in [0, t_j]$, если $t_j \geq 0$, и $\tau_j \in [t_j, 0]$, если $t_j < 0,\ 1 \leq j \leq n\}$ — параллелепипед в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 1$, $p \in (1, +\infty]$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_k > 0$, $1 \leq k \leq n$. Тогда для любой функции $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^n \setminus Q(\varepsilon), p)$ справедливо неравенство:*

$$\left\| \int\limits_{E_t} \gamma(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \left[\frac{4\sqrt{\pi}}{(p-1)^{\frac{1}{p}}} \right]^n \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_k^{1/q}} \right] \|\gamma\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Положим $\widetilde{\mathbb{R}}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ и будем считать окрестностью точки ∞ всякое множество вида $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, где $a, b \in \mathbb{R}^1, a \leqslant b$. По определению $\widetilde{\mathbb{R}}^n = \{v | v = (v_1, \ldots, v_n), v_j \in \mathbb{R}^1 \bigcup \{\infty\}, \quad 1 \leq j \leq n\}$ — пространство с топологией прямого произведения, где в качестве координат точек v из $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ могут выступать как обычные числа, так и символ ∞.

Пусть числа $p_0, p \in (1, +\infty]$.

Определение 1. Точка $u \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$ называется *нерезонансной точкой* функции $\gamma \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$, если существует такая функция $\alpha_u \in L^q(\mathbb{R}^n)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, для которой $\widehat{\gamma}(y)=\widehat{\alpha}_u(y)$ в какой-либо окрестности точки u. Остальные точки множества $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ называются *резонансными точками* функции γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ и их множество обозначается $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^n)\}$.

Отметим, что равенство $\widehat{\gamma}(y)=\widehat{\alpha}_u(y)$ в определении 1 понимается, вообще говоря, в обобщенном смысле.

Из определения 1, очевидно, следует, что $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^n)\}$ — замкнутое множество и, если $\gamma \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^n)\}=\varnothing$.

Пример 1. Пусть $n=2$, $\gamma(\tau_1,\tau_2)=\sum\limits_{k=1}^{r}\sum\limits_{l=1}^{s} c_{kl}e^{i\lambda_k\tau_1}e^{i\mu_l\tau_2}$, где $r,s\in\mathbb{N}$, $c_{kl}\in\mathbb{C}$, $c_{kl}\neq 0$, $\lambda_k\in\mathbb{R}^1$, $\mu_l\in\mathbb{R}^1$, $1\leqslant k\leqslant r$, $1\leqslant l\leqslant s$, $\tau_1,\tau_2\in\mathbb{R}^1$. Тогда для любого $p\in(1,+\infty]$ множество резонансных точек многочлена γ относительно пространства $L^p(\mathbb{R}^2)$ совпадает со спектром этого многочлена: $\mathcal{R}\{\gamma, L^p(\mathbb{R}^2)\}=\bigcup\limits_{k=1}^{r}\bigcup\limits_{l=1}^{s}(\lambda_k,\mu_l)$.

Пусть $0<\delta<\Delta<\infty$ и множество $W \subsetneqq \widetilde{\mathbb{R}}^n$. Для каждой точки $u=(u_1,\ldots,u_n)\in W$ обозначим через B_u окрестность этой точки, которую определим следующим образом. Если u — конечная точка, то положим $B_u=u+\delta\Pi$. Если u — бесконечная точка, у которой не все координаты бесконечны, то через B_u будем обозначать множество $B_u=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n$ где $I_j=(u_j-\delta,u_j+\delta)$, когда u_j — конечно и $I_j=(-\infty,-\Delta+\delta)\cup\{\infty\}\cup(\Delta-\delta,+\infty)$, если $u_j=\infty$, $1\le j\le n$. Если же $u=(\infty,\infty,\ldots,\infty)$, то положим $B_u=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n$, где $I_j=(-\infty,-\Delta+\delta)\cup\{\infty\}\cup(\Delta-\delta,+\infty)$, $1\le j\le n$.

Обозначим
$$V(W,\delta,\Delta)=\bigcup_{u\in W}B_u.$$

Теорема 2. *Пусть $p_0,p\in(1,+\infty]$, $\gamma\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, резонансное множество $\mathcal{R}_\gamma=\mathcal{R}\{\gamma,L^p(\mathbb{R}^n)\}\neq\widetilde{\mathbb{R}}^n$, $\mathcal{R}_\gamma\backslash\mathbb{R}^n\neq\emptyset$ и $x\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ — произвольная функция. Тогда существуют числа $0<\delta_0<\frac{1}{2}\Delta_0<\infty$ такие, что для любых $0<\delta<\delta_0$, $\Delta_0<\Delta<\infty$ можно указать функцию $G(\tau)=G(\tau,\mathcal{R}_\gamma,\delta,\Delta)$, удовлетворяющую условиям:*

1) $\widehat{G}(y)=0$, если $y\in\overline{V(\mathcal{R}_\gamma,\frac{1}{4}\delta,\Delta)}\cap\mathbb{R}^n$ и $\widehat{G}(y)=1$, если $y\notin V(\mathcal{R}_\gamma,\frac{13}{16}\delta,\Delta)$;

2) определена свертка $h(\tau,x)=x(\tau)*G(\tau)\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ и выполняется разложение:
$$x(\tau)=h(\tau,x)+H(\tau,x),$$
где $\operatorname{supp}\widehat{h}(y,x)\bigcap\overline{V(\mathcal{R}_\gamma,1/4\delta,\Delta)}=\emptyset$, $H(\tau,x)=x(\tau)-x(\tau)*G(\tau)\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp}\widehat{H}(y,x)\subseteq\overline{V(\mathcal{R}_\gamma,\frac{13}{16}\delta,\Delta)}$;

3) $h(\tau,\gamma)=\gamma(\tau)*G(\tau)\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Пусть $\rho>0$ и множество $W\subset\mathbb{R}^n$. Обозначим:
$$V(W,\delta)=W+\delta\Pi=\bigcup_{w\in W}(w+\delta\Pi).$$

Теорема 3. *Пусть $p_0,p\in(1,+\infty]$ и $\gamma\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, резонансное множество $\mathcal{R}_\gamma=\mathcal{R}\{\gamma,L^p(\mathbb{R}^n)\}\neq\varnothing$ не содержит точек, имеющих хоть одну бесконечную координату и, $x\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ — произвольная функция. Тогда для любого $\delta>0$ можно указать функцию $F(\tau)=F(\tau,\mathcal{R}_\gamma,\delta)$, удовлетворяющую условиям:*

1) $\widehat{F}(y)=0$, *если* $y\in\overline{V(\mathcal{R}_\gamma,\frac{1}{4}\delta)}\cap\mathbb{R}^n$ *и* $\widehat{F}(y)=1$, *если* $y\in\mathbb{R}^n$ *и* $y\notin V(\mathcal{R}_\gamma,\frac{3}{4}\delta)$*;*

2) определена свертка $h(\tau,x)=x(\tau)*F(\tau)\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ *и выполняется разложение:*

$$x(\tau)=h(\tau,x)+H(\tau,x),$$

где $\operatorname{supp}\widehat{h}(y,x)\bigcap\overline{V(\mathcal{R}_\gamma,\frac{1}{4}\delta)}=\emptyset$, $H(\tau,x)=x(\tau)-x(\tau)*F(\tau)\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ *и* $\operatorname{supp}\widehat{H}(y,\gamma)\subseteq\overline{V(\mathcal{R}_\gamma,\frac{3}{4}\delta)}\cap\mathbb{R}^n$*;*

3) $h(\tau,\gamma)=\gamma(\tau)*F(\tau)\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Замечание 1. *Из доказательства теорем 1 и 2 видно, что функции* $G(\tau)$ *и* $F(\tau)$*, удовлетворяющие условиям этих теорем, могут быть построены не единственным способом.*

В дальнейшем, если это не будет приводить к путанице, вместо $V(W,\delta)$ и $V(W,\delta,\Delta)$ будем использовать общее обозначение $V(W)$.

Теорема 4. *Пусть* $p_0,p\in(1,+\infty]$ *и* $\gamma\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$*. Тогда* $\gamma\in L^q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *только в том случае, когда резонансное множество* $\mathcal{R}\{\gamma,L^p(\mathbb{R}^n)\}=\varnothing$*.*

2. Оценка интеграла от произведения функций. Пусть $m\geqslant 2$, числа $p_1,\ldots,p_m\in(1,+\infty]$ удовлетворяют неравенству (2) и функции $\gamma_1\in L^{p_1}(\mathbb{R}^n),\ldots,\gamma_m\in L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$. В этой части для функций из пространств $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p\in(1,+\infty]$ вводится понятие «нерезонансное» условие (определение 2). Затем с использованием этого термина формулируется и доказывается теорема 5 об условиях ограниченности интеграла

$$\int\limits_{E_t}\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(\tau)d\tau.$$

Далее по функциям γ_k и их разложениям $\gamma_k(\tau)=h_k(\tau,\gamma_k)+H_k(\tau,\gamma_k)$ строятся нормированные пространства $L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant k\leqslant m$, и доказывается (теорема 6) неравенство (3). В завершение этой части рассматривается вопрос (теорема 7) об ограниченности интеграла при интегрировании по подмножеству $\mathbb{R}^n$.

Введем некоторые обозначения и определения. Положим:

$$\frac{1}{s}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_j},\quad f(\tau)=\prod_{j=1}^{m}\gamma_j(\tau);\quad \frac{1}{s_k}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\frac{1}{p_j},\quad f_k(\tau)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\gamma_j(\tau),\quad 1\leqslant k\leqslant m,$$

Тогда $s,s_1,\ldots,s_m\in(1,+\infty]$ и

$$\|f\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\|\gamma_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^n)},\tag{6}$$

$$\|f_k\|_{L^{s_k}(\mathbb{R}^n)}\leqslant\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\|\gamma_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^n)},\quad 1\leqslant k\leqslant m.\tag{7}$$

Определим на $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ операцию сложения следующим образом.

Определение 2. Суммой элементов $\omega_1,\omega_2\in\widetilde{\mathbb{R}}^1$ будем называть элемент из $\widetilde{\mathbb{R}}^1$, обозначаемый $\omega_1+\omega_2$ и определяемый для конечных элементов как обычно, а в остальных случаях по правилам:

1) выражение $\infty + \infty$ не определено;

2) $\omega + \infty = \infty$, $\omega \in \mathbb{R}^1$.

Введенную так операцию будем предполагать коммутативной и ассоциативной, сумму более чем двух слагаемых определять индуктивно и при этом выражение, содержащие более одного символа ∞, считать не имеющим смысла.

Определение 3. По определению сложение векторов $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \widetilde{\mathbb{R}}^n$ производится покоординатно в предположении, что сложение координат осуществляется по правилам сложения в $\widetilde{\mathbb{R}}^1$:

$$a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \in \widetilde{\mathbb{R}}^n.$$

Для $A, B, \ldots, C \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}^n$ обозначим:

$$A + B + \ldots + C = \{x \,|\, x = a + b + \ldots + c,\ a \in A,\ b \in B\ ,\ldots,\ c \in C\}.$$

Сумма множеств считается определенной, если определены соответствующие суммы элементов этих множеств.

Лемма 1. *Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (2), $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — вектор с положительными координатами, множества $W_1, \ldots, W_m \subset \widetilde{\mathbb{R}}^n$ таковы, что определена сумма $\sum\limits_{k=1}^{m} W_k$ и*

$$Q(\varepsilon) \bigcap \sum_{k=1}^{m} W_k = \varnothing, \tag{8}$$

а функции $x_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n), \ldots, x_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют условиям: $\operatorname{supp} \widehat{x}_k \subseteq W_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$. *Тогда*

$$\left| \int\limits_{E_t} \prod_{k=1}^{m} x_k(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \left[\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}} \right]^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon_k^{1/r}} \cdot \prod_{k=1}^{m} \|x_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)}, \tag{9}$$

где $\frac{1}{s} = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k}$ и $\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{s}$.

Доказательство. Обозначим $\gamma(\tau) = \prod\limits_{k=1}^{m} x_k(\tau)$. Тогда в силу (6)

$$\|\gamma\|_{L^s(\mathbb{R}^1)} \leqslant \prod_{k=1}^{m} \|x_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^1)}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{s} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k}.$$

А так как согласно [5; с. 69] $\operatorname{supp} \widehat{\gamma} = \operatorname{supp}\{\widehat{x}_1 * \ldots * \widehat{x}_m\} \subseteq \overline{\sum\limits_{k=1}^{m} W_k}$, то из (8) получаем, что $\operatorname{supp} \widehat{\gamma} \cap Q(\varepsilon) = \varnothing$, откуда по теореме 1 и следует утверждение леммы. □

При каждом $k = 1, 2, \ldots, m$ положим $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}\{\gamma_k, L^{s_k}(\mathbb{R}^1)\}$, где $\frac{1}{s_k} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \frac{1}{p_j}$, и обозначим через $\mathcal{F} = \cup_{k=1}^{n} \{y \,|\, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ |y_k| = 0\}$ — объединение координатных гиперплоскостей.

Определение 4. Будем считать, что для функций $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $\ldots$, $\gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^1)$ выполнено нерезонансное условие, если справедливо какое-либо из двух утверждений:

1) все резонансные множества $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$ не пусты, определена сумма $\sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k$ и выполнено нерезонансное соотношение

$$d = \operatorname{dist}\bigl[\mathcal{F}, \sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k\bigr] > 0; \tag{10}$$

2) хотя бы одно из резонансных множеств $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$ пусто.

Другими словами, сумма резонансных множеств должна быть отделена от координатных гиперплоскостей или хотя бы одно из них должно быть пустым.

Пример 2. *Пусть*

$$\gamma_1(\tau_1, \tau_2) = \sum_{k=1}^{r_1} \sum_{l=1}^{s_1} c_{kl} e^{i\lambda_k \tau_1} e^{i\mu_l \tau_2} \quad \text{и} \quad \gamma_2(\tau_1, \tau_2) = \sum_{m=1}^{r_2} \sum_{n=1}^{s_2} d_{mn} e^{i\xi_m \tau_1} e^{i\eta_n \tau_2}.$$

Тогда нерезонансное соотношение для $\gamma_1(\tau_1, \tau_2)$ и $\gamma_2(\tau_1, \tau_2)$ превращается в соответствии с результатом из примера 1 в арифметические соотношения между частотами этих многочленов: $0 \neq \lambda_k + \xi_m$, $\quad 0 \neq \mu_l + \eta_n$ для всех допустимых k, l, m, n.

Пусть резонансные множества $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, не пусты, определена их сумма (т. е. при сложении по каждой координате имеется не более одного символа ∞) и выполнено нерезонансное соотношение (10). Тогда можно указать такие $\delta = \delta(d) > 0$ и $\Delta = \Delta(d) > 0$, что для окрестностей этих резонансных множеств $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{2} d \leqslant \operatorname{dist}\bigl[\mathcal{F}, \sum_{k=1}^m V(\mathcal{R}_k)\bigr], \tag{11}$$

где $V(\mathcal{R}_k) = V(\mathcal{R}_k, \delta, \Delta)$, если $\mathcal{R}_k \setminus \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ и $V(\mathcal{R}_k) = V(\mathcal{R}_k, \delta)$, если $\mathcal{R}_k \subset \mathbb{R}^n$. Функции $H(t, \gamma)$, $h(t, \gamma)$, найденные в теоремах 2 и 3, будем для $\delta(d)$ и $\Delta(d)$ обозначать через $H(t, \gamma, d)$ и $h(t, \gamma, d)$ соответственно. Таким образом, согласно теоремам 2 и 3, при каждом $1 \leqslant k \leqslant m$ будет выполняться включение $\operatorname{supp} \widehat{H}(y, \gamma_k, d) \subset V(\mathcal{R}_k)$.

Теорема 5. *Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (2); функции $\gamma_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant k \leqslant m$; резонансные множества $\mathcal{R}_k \neq \varnothing$, $1 \leqslant k \leqslant m$, определена сумма $\sum_{k=1}^m \mathcal{R}_k$, выполнено нерезонансное соотношение (10), а $V(\mathcal{R}_k)$ — окрестности резонансных множеств $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, выбраны так, что выполняется (11). Тогда*

$$\Bigl|\int\limits_{E_t} \prod_{k=1}^m \gamma_k(\tau)\, d\tau\Bigr| \leqslant \Bigl\{\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}} \cdot \Bigl(\frac{2}{d}\Bigr)^{1/r} + 1\Bigr\}^n \prod_{k=1}^m \Bigl\{\|H(\tau, \gamma_k, d)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^n)} +$$

$$+ \|h(\tau, \gamma_k, d)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^n)} + \|h(\tau, \gamma_k, d)\|_{L^{r_k}(\mathbb{R}^n)}\Bigr\}, \tag{12}$$

где $\frac{1}{s} = \sum\limits_{j=1}^m \frac{1}{p_j}$, $\quad \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{s}$ и $\quad \frac{1}{r_k} = 1 - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^m \frac{1}{p_j}$, $\quad 1 \leqslant k \leqslant m$.

Замечание 2. Если существует $k \in \{1, \ldots, n\}$, при котором $\mathcal{R}_k = \varnothing$, то оценка интеграла от произведения функций производится с помощью неравенства Гёльдера.

Доказательство теоремы 5. При сделанных выше обозначениях и предположениях, согласно теоремам 2 и 3, функции $\gamma_k(\tau)$ можно записать в виде $\gamma_k(\tau) = H(\tau, \gamma_k, d) + h(\tau, \gamma_k, d)$, где $H(\tau, \gamma_k, d) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$ и $h(\tau, \gamma_k, d) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n) \cap L^{r_k}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда, обозначив для упрощения записи $H_k(\tau) = H(\tau, \gamma_k, d)$ и $h_k(\tau) = h(\tau, \gamma_k, d)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, при каждом $t \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\left| \int\limits_{E_t} \left[\prod_{k=1}^{m} \gamma_k(\tau) \right] d\tau \right| \leqslant \left| \int\limits_{E_t} \prod_{k=1}^{m} H_k(\tau)\, d\tau \right| + \sum_{\alpha=1}^{m} \left| \int\limits_{E_t} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha}}^{m} H_j(\tau) \right] h_\alpha(\tau)\, d\tau \right| +$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha<\beta}}^{m} \left| \int\limits_{E_t} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha,\beta}}^{m} H_j(\tau) \right] h_\alpha(\tau) h_\beta(\tau)\, d\tau \right| + \ldots + \left| \int\limits_{E_t} \prod_{\alpha=1}^{m} h_\alpha(\tau)\, d\tau \right|. \qquad (13)$$

Оценим каждое слагаемое из правой части (13). Рассмотрим первое слагаемое. Согласно теоремам 2 и 3, функции $H_k(\tau) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, причем $\operatorname{supp} \widehat{H}_k(y) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_k, \frac{13}{16}\delta, \Delta)} \cap \mathbb{R}^n$, если $\mathcal{R}_k \setminus \mathbb{R}^n \neq \emptyset$ и $\operatorname{supp} \widehat{H}_k(y) \subseteq \overline{V(\mathcal{R}_k, \frac{3}{4}\delta)} \cap \mathbb{R}^n$, если $\mathcal{R}_k \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leqslant k \leqslant m$. А так как множества $V(\mathcal{R}_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, удовлетворяют (11), то по лемме 1 выполняется неравенство (9) при $x_k(\tau) = H_k(\tau)$, $1 \leqslant k \leqslant m$ и $\varepsilon = d/2$:

$$\left| \int\limits_{E_t} \prod_{k=1}^{m} H_k(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \left\{ \frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}} \cdot \frac{1}{(d/2)^{1/r}} \right\}^n \prod_{k=1}^{m} \|H_k\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^n)}. \qquad (14)$$

Оценим слагаемые, входящие в первую сумму из правой части (13). Рассмотрим каждый интеграл из этой суммы по отдельности. Обозначим $f_\alpha(\tau) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha}}^{m} H_j(\tau)$.

В силу (7)

$$\|f_\alpha\|_{L^{s_\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha}}^{m} \|H_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^n)},$$

где $\frac{1}{s_\alpha} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha}}^{m} \frac{1}{p_j}$. При этом функция $h_\alpha \in L^{r_\alpha}(\mathbb{R}^n)$, где $\frac{1}{r_\alpha} = 1 - \frac{1}{s_\alpha}$. Следовательно, используя неравенство Гёльдера, получим

$$\left| \int\limits_{E_t} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha}}^{m} H_j(\tau) \right] h_\alpha(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha}}^{m} \|H_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^n)} \right] \|h_\alpha\|_{L^{r_\alpha}(\mathbb{R}^n)}, \qquad (15)$$

где $\frac{1}{r_\alpha} = 1 - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha}}^{m} \frac{1}{p_j}$.

Оценим слагаемые из второй суммы, стоящей в правой части (13). Опять-таки рассмотрим каждый интеграл из этой суммы по отдельности. Так как, согласно теореме 2, функция $h_\alpha \in L^{p_\alpha}(\mathbb{R}^n),\ 1 \leqslant \alpha \leqslant m$, то в силу (7) и неравенства Гёльдера

$$\left|\int\limits_{E_t} \Big[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha,\beta}}^{m} H_j(\tau)\Big] h_\alpha(\tau) h_\beta(\tau)\, d\tau\right| \leqslant \Big[\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{m} \|H_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^n)}\Big] \|h_\alpha\|_{L^{p_\alpha}(\mathbb{R}^n)} \|h_\beta\|_{L^{r_\beta}(\mathbb{R}^n)}, \tag{16}$$

где $\frac{1}{r_\beta} = 1 - \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq\beta}}^{m} \frac{1}{p_j}$. Аналогично оцениваются остальные слагаемые, причем для последнего слагаемого имеем

$$\left|\int\limits_{E_t} \prod_{j=1}^{m} h_j(\tau)\, d\tau\right| \leqslant \Big[\prod_{j=1}^{m-1} \|h_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^n)}\Big] \|h_m\|_{L^{r_m}(\mathbb{R}^n)}, \tag{17}$$

где $\frac{1}{r_m} = 1 - \sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{1}{p_j}$. Так как при всех $1 \leqslant j \leqslant m$:

$$\|h_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^n)},\ \|h_j\|_{L^{r_j}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|h_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^n)} + \|h_j\|_{L^{r_j}(\mathbb{R}^n)},$$

то в силу (13)–(17) неравенство (12) выполняется. □

Теперь рассмотрим вопрос о допустимых в нерезонансном случае возмущениях $\Delta\gamma_1, \ldots, \Delta\gamma_m$ функций $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ соответственно, при которых возмущенный интеграл

$$\int\limits_{E_t} \prod_{k=1}^{m} [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)] d\tau$$

допускает оценку, аналогичную (12).

С этой целью по каждой функции $\gamma_k(\tau)$, $1 \leqslant k \leqslant m$ построим нормированное пространство следующим образом. Для каждой функции γ_k найдем множество $\mathcal{R}_k$ и предположим, что все $\mathcal{R}_k \neq \widetilde{\mathbb{R}}^n$.

Если $\mathcal{R}_k \backslash \mathbb{R}^n \neq \emptyset$, то согласно теореме 2 существуют числа $0 < \delta_{0k} < \frac{1}{2}\Delta_{0k} < \infty$ такие, что для любых $0 < \delta_k < \delta_{0k},\ \Delta_{0k} < \Delta_k < \infty$ можно указать функцию $G_k(\tau) = G_k(\tau, \mathcal{R}_k, \delta_k, \Delta_k)$, удовлетворяющую условиям $\widehat{G}_k(y) = 0$, если $y \in \overline{V(\mathcal{R}_k, \frac{1}{4}\delta_k, \Delta_k)} \cap \mathbb{R}^n$ и $\widehat{G}_k(y) = 1$, если $y \in \mathbb{R}^n$ и $y \notin V(\mathcal{R}_k, \frac{13}{16}\delta_k, \Delta_k)$.

Далее, используя функцию $G_k(\tau)$, напишем для произвольной функции $x \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$ разложение

$$x(\tau) = H(\tau, x) + h(\tau, x),$$

где $h(\tau, x) = x(\tau) * G_k(\tau) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, $H(\tau, x) = x(\tau) - x(\tau) * G_k(\tau) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} \widehat{H}(y, x) \subseteq V(\mathcal{R}_k, \frac{13}{16}\delta_k, \Delta_k)$.

Если же резонансное множество $\mathcal{R}_k \neq \emptyset$ и не содержит точек, имеющих хоть одну бесконечную координату, то, согласно теореме 3, для любого $\delta_k > 0$ можно указать функцию $F_k(\tau) = F_k(\tau, \mathcal{R}_k, \delta)$, удовлетворяющую условиям $\widehat{F}_k(y) = 0$, если $y \in V(\mathcal{R}_k, \frac{1}{4}\delta_k) \cap \mathbb{R}^n$, и $\widehat{F}_k(y) = 1$, если $y \in \mathbb{R}^n$ и $y \notin V(\mathcal{R}_k, \frac{3}{4}\delta_k)$. Затем, используя функцию $F_k(\tau)$, напишем для произвольной функции $x \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$ разложение

$$x(\tau) = H(\tau, x) + h(\tau, x),$$

где $h(\tau, x) = x(\tau) * F_k(\tau) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, $H(\tau, x) = x(\tau) - x(\tau) * F_k(\tau) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} \widehat{H}(y, x) \subseteq V(\mathcal{R}_k, \frac{3}{4}\delta_k)$.

Далее будем считать, что в окрестностях $V(\mathcal{R}_k)$ числа δ_k, Δ_k при всех $1 \leqslant k \leqslant m$ выбраны одни и те же.

Обозначим через $L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$ множество всех таких функций $x \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, для которых $\|h(\tau, x)\|_{L^{r_k}(\mathbb{R}^n)} < +\infty$, где $\frac{1}{r_k} = 1 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m} \frac{1}{p_j}$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда $\gamma_k \in L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$, и если $x \in L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$, то резонансное множество $\mathcal{R}\{x, L^{s_k}(\mathbb{R}^n)\}$ функции x располагается в соответствующей окрестности $V(\mathcal{R}_k)$.

Зададим в $L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$ норму следующим образом:

$$\|x\|_{L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)} = \|H(\tau, x)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^n)} + \|h(\tau, x)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^n)} + \|h(\tau, x)\|_{L^{r_k}(\mathbb{R}^n)}, \quad x \in L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n). \tag{18}$$

Теорема 6. *Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (2), функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$, резонансные множества $\mathcal{R}_k \neq \varnothing$, $1 \leqslant k \leqslant m$, определена сумма $\sum_{k=1}^{m} \mathcal{R}_k$, выполнено нерезонансное соотношение (10), а $V(\mathcal{R}_k)$ — окрестности резонансных множеств $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, выбраны так, что выполняется (11). Тогда для любых $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant k \leqslant m$,*

$$\sup_{a, b \in \mathbb{R}^n} \left| \int\limits_{[a,b]} \prod_{k=1}^{m} [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)] d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \left\{ \frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}} \cdot \left(\frac{2}{d}\right)^{1/r} + 1 \right\}^n \prod_{k=1}^{m} \|\gamma_k + \Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)}, \tag{19}$$

где $\frac{1}{s} = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k}$ и $\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{s}$.

Доказательство. По заданному d в зависимости от ограниченности или неограниченности множества $\mathcal{R}_k$ выберем при каждом $1 \leqslant k \leqslant m$ числа δ_k, $\Delta_k > 0$, построим функции F_k или G_k соответственно и запишем для $\gamma_k \in L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$ и произвольной функции $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$ разложения (см. теоремы 2 и 3):

$$\gamma_k(\tau) = H(\tau, \gamma_k) + h(\tau, \gamma_k), \qquad \Delta\gamma_k(\tau) = H(\tau, \Delta\gamma_k) + h(\tau, \Delta\gamma_k),$$

где $H(\tau, \gamma_k)$, $H(\tau, \Delta\gamma_k)$, $h(\tau, \gamma_k)$, $h(\tau, \Delta\gamma_k) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, $h(\tau, \gamma_k)$, $h(\tau, \Delta\gamma_k) \in L^{r_k}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{r_k} = 1 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m} \frac{1}{p_j}$ и $\operatorname{supp} \widehat{H}(y, \gamma_k)$, $\operatorname{supp} \widehat{H}(y, \Delta\gamma_k) \subset V(\mathcal{R}_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда в силу линейности операторов $H(\tau, \cdot)$ и $h(\tau, \cdot)$ получаем, что $H(\tau, \gamma_k + \Delta\gamma_k)$, $h(\tau, \gamma_k + \Delta\gamma_k) \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, $h(\tau, \gamma_k + \Delta\gamma_k) \in L^{r_k}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} \widehat{H}(y, \gamma_k + \Delta\gamma_k) \subseteq V(\mathcal{R}_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Так как

$$\prod_{k=1}^{m} [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)] = \prod_{k=1}^{m} H(\tau, \gamma_k + \Delta\gamma_k) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{m} \left[\prod_{\substack{k=1\\ k\neq\alpha}}^{m} H(\tau, \gamma_k + \Delta\gamma_k) \right] h(\tau, \gamma_k + \Delta\gamma_k) + \ldots + \prod_{k=1}^{m} h(\tau, \gamma_k + \Delta\gamma_k)$$

и, следовательно,

$$\left|\int\limits_{E_t}\prod_{k=1}^{m}[\gamma_k(\tau)+\Delta\gamma_k(\tau)]\,d\tau\right| \leqslant \left|\int\limits_{E_t}\prod_{k=1}^{m}H(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\,d\tau\right|+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{m}\left|\int\limits_{E_t}\left[\prod_{\substack{k=1\\k\neq\alpha}}^{m}H(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\right]h(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\,d\tau\right|+\ldots+\left|\int\limits_{E_t}\prod_{k=1}^{m}h(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\,d\tau\right|,$$

то, рассуждая, как и при оценке каждого слагаемого из правой части (13), получим

$$\left|\int\limits_{E_t}\prod_{k=1}^{m}[\gamma_k(\tau)+\Delta\gamma_k(\tau)]d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}}\cdot\left(\frac{2}{d}\right)^{1/r}+1\right\}^{n}\prod_{k=1}^{m}\big\{\|H(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^n)}+$$

$$+\|h(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^n)}+\|h(\tau,\gamma_k+\Delta\gamma_k)\|_{L^{r_k}(\mathbb{R}^n)}\big\},$$

откуда с учетом обозначения (18) следует (19). □

Замечание 3. *Неравенство (19) можно рассматривать в качестве дополнения к неравенству Гёльдера.*

Теперь дадим оценку интеграла при интегрировании по подмножеству $\mathbb{R}^n$.

Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу, $m\geqslant 2$, числа $p_1,\ldots,p_{m-1}\in(1,+\infty]$, $p_m=\infty$, удовлетворяют условию (2) или, что равносильно, условию

$$\frac{1}{p_1}+\ldots\frac{1}{p_{m-1}}<1 \tag{20}$$

и функции $\gamma_1\in L^{p_1}(\mathbb{R}^n),\ldots,\gamma_{m-1}\in L^{p_{m-1}}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma_m=\xi_D\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, где ξ_D — характеристическая функция множества D. Для этих функций $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ и показателей $p_1,\ldots,p_{m-1}$, $p_m=\infty$, построим соответствующие множества $\mathcal{R}_k=\mathcal{R}\{\gamma_k,L^{s_k}(\mathbb{R}^n)\}$, $1\leqslant k\leqslant m$. Отметим при этом, что $\mathcal{R}_m=\mathcal{R}\{\xi_D,L^{s_m}(\mathbb{R}^n)\}=\varnothing$ тогда и только тогда, когда $mes\,D<+\infty$.

Действительно, так как $\frac{1}{s_m}=\sum\limits_{j=1}^{m-1}\frac{1}{p_j}<1$ и $\frac{1}{r_m}=1-\frac{1}{s_m}$, то $r_m<+\infty$. По теореме 2 для выполнения условия $\mathcal{R}_m=\varnothing$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\xi_D\in L^{r_m}(\mathbb{R}^n)$, а это возможно тогда и только тогда, когда $mes\,D<+\infty$.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{D\cap[a,b]}\prod_{k=1}^{m-1}\gamma_k(\tau)d\tau=\int\limits_{[a,b]}\left[\prod_{k=1}^{m-1}\gamma_k(\tau)\right]\xi_D(\tau)d\tau,\quad t\in\mathbb{R}^n,$$

где по определению при $m=2$ будем полагать

$$\int\limits_{D\cap[a,b]}\prod_{k=1}^{m-1}\gamma_k(\tau)d\tau=\int\limits_{D\cap[a,b]}\gamma_1(\tau)d\tau.$$

Из теоремы 5 очевидным образом получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть $m \geqslant 2$, числа $p_1, \ldots, p_{m-1} \in (1, +\infty]$ удовлетворяют условию (20); $D \subset \mathbb{R}^n$, $mes\, D = +\infty$, функции $\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$, $\ldots$, $\gamma_{m-1} \in L^{p_{m-1}}(\mathbb{R}^n)$, $\gamma_m = \xi_D \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, имеют непустые резонансные множества $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и определена сумма $\sum\limits_{k=1}^{m} \mathcal{R}_k$. Тогда, если выполнено нерезонансное соотношение (10), а $V(\mathcal{R}_k)$ — окрестности резонансных множеств $\mathcal{R}_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, выбраны так, что выполняется (11), то при любых $a, b \in \mathbb{R}^n$ будет справедливо неравенство:*

$$\left| \int\limits_{D \cap [a,b]} \prod_{k=1}^{m-1} \gamma_k(\tau) d\tau \right| \leqslant 2^n \left\{ \frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)^{1/s}} \cdot \left(\frac{2}{d} \right)^{1/r} + 1 \right\}^n \left\{ \prod_{k=1}^{m-1} \|\gamma_k\|_{L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)} \right\} \|\xi_D\|_{L^{p_m}_{h_m}(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Автор выражает глубокую признательность проф. Н. А. Широкову за внимание к работе и ценные замечания.

Литература

1. Иванов Б. Ф. Дополнение к неравенству Гёльдера для кратных интегралов. I. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 2 , 255–268 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.207

2. Бурбаки Н. *Интегрирование. Меры, интегрирование мер*, пер. с франц. Москва, Наука (1967).

3. Креин С. Г. (ред.) Функциональный анализ. В сер.: Справочная математическая библиотека. Москва, Наука (1972).

4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. В сер.: Обобщенные функции, вып. 1. Москва, Физматлит (1959).

5. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. Москва, Наука (1979).

Статья поступила в редакцию 16 февраля 2022 г.;
доработана 20 апреля 2022 г.;
рекомендована к печати 9 июня 2022 г.

Контактная информация:

Иванов Борис Филиппович — канд. физ.-мат. наук, доц.; ivanov-bf@yandex.ru

Complement to the Hölder inequality for multiple integrals. II*

B. F. Ivanov

St Petersburg State University of Industrial Technologies and Design,
18, ul. Bolshaya Morskaya, St Petersburg, 191186, Russian Federation
Higher School of Technology and Energy,
4, ul. Ivana Chernykh, St Petersburg, 198095, Russian Federation

For citation: Ivanov B. F. Complement to the Hölder inequality for multiple integrals. II. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 4, pp. 612–624. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.404 (In Russian)

This article is the second and final part of the author's work published in the previous issue of the journal. The main result of the article is the statement that if for functions

*See Part I: Ivanov B. F. Complement to the Hölder inequality for multiple integrals. I. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 255–268. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.207 (In Russian)

$\gamma_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n), \ldots, \gamma_m \in L^{p_m}(\mathbb{R}^n)$, where $m \geqslant 2$ and the numbers $p_1, \ldots, p_m \in (1, +\infty]$ are such that $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} < 1$ the "non-resonant" condition is fulfilled (the concept introduced by the author in the previous work for functions from spaces $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1, +\infty]$), then: $\sup_{a,b \in \mathbb{R}^n} \left| \int\limits_{[a,b]} \prod\limits_{k=1}^{m} [\gamma_k(\tau) + \Delta\gamma_k(\tau)]\, d\tau \right| \leqslant C \prod\limits_{k=1}^{m} \|\gamma_k + \Delta\gamma_k\|_{L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)}$, where $[a, b]$ — n-dimensional parallelepiped, the constant $C > 0$ does not depend on functions of $\Delta\gamma_k \in L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n)$ and $L^{p_k}_{h_k}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant k \leqslant m$ are some specially constructed normalized spaces. In addition, in terms of the fulfillment of some non-resonant condition, the paper gives a test of a boundedness of the integral from the product of functions when integrating over a subset of $\mathbb{R}^n$.

Keywords: resonance, Hölder inequality, Fourier transform, integral inequalities.

References

1. Ivanov B. F Complement to tht Holder ineguality for multiple integrals. I. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 2, 255–268 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.207 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **55**, iss. 2, 174–185 (2022). https://doi.org/10.1134/S1063454122020066].

2. Bourbaki N. Intégration. Livre VI. In: *Éléments de mathématique.* Paris, Hermann & Cie (1956) [Rus. ed.: Bourbaki N. *Integrirovanie. Mery, integrirovanie mer.* Moscow, Nauka Publ. (1967)].

3. Krein S. G. *Functional analysis.* In Ser.: The reference mathematical library. Moscow, Nauka Publ. (1972). (In Russian)

4. Gel'fand I. M., Shilov G. E. *The generalized functions and actions over them.* In Ser.: The generalized functions, iss. 1. Moscow, Fizmatlit Publ. (1959). (In Russian)

5. Vladimirov V. S. *Generalized functions in mathematical physics.* Moscow, Nauka Publ. (1979). (In Russian)

Received: February 16, 2022
Revised: April 20, 2022
Accepted: June 9, 2022

Author's information:

Boris F. Ivanov — ivanov-bf@yandex.ru