УДК 519.8 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 4
MSC 90C24, 15A80, 90C47, 90B85

Решение задачи о размещении двух объектов в пространстве с метрикой Чебышёва

Н. К. Кривулин, М. А. Брюшинин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Кривулин Н. К., Брюшинин М. А.* Решение задачи о размещении двух объектов в пространстве с метрикой Чебышёва // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 4. С. 625–635.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.405

Рассматривается минимаксная задача о размещении двух объектов в многомерном пространстве с метрикой Чебышёва при наличии интервальных ограничений на допустимую область размещения. В задаче имеются две группы объектов с заданными координатами и требуется найти координаты оптимального размещения двух новых объектов с учетом заданных ограничений. Размещение новых объектов считается оптимальным, если оно минимизирует максимум следующих величин: расстояние от первого объекта до самого удаленного от него объекта из первой группы имеющихся объектов, расстояние от второго объекта до самого удаленного объекта из второй группы, а также расстояние между первым и вторым новыми объектами. Задача размещения формулируется как задача многомерной оптимизации в терминах тропической математики, которая изучает теорию и приложения алгебраических систем с идемпотентными операциями. На основе использования методов и результатов тропической оптимизации найдено прямое аналитическое решение задачи. Получен результат, который описывает область оптимального размещения новых объектов в параметрической форме, удобной для формального анализа решения и непосредственных вычислений.

Ключевые слова: тропическая оптимизация, идемпотентное полуполе, минимаксная задача оптимизации, задача о размещении двух объектов.

1. Введение. Задачи оптимального размещения объектов в многомерном пространстве составляют класс задач оптимизации, которые представляют значительный теоретический интерес и имеют важное значение для приложений. Систематическое изучение задач размещения началось в XVII в. и связано с именами П. Ферма, У. Торричелли, Я. Штейнера, Д. Д. Сильвестра, А. Вебера [1]. Многие результаты, полученные при решении задач размещения, внесли существенный вклад в развитие различных направлений математики и теории оптимизации, включая вычислительную геометрию, целочисленное программирование, комбинаторную оптимизацию и др. [1–3].

Пусть имеется множество точек в пространстве, которые задают координаты существующих объектов, а также область возможного размещения новых объектов. Типичная задача размещения формулируется как задача поиска координат размещения одного или нескольких новых объектов (точек пространства), которые обеспечивают минимум некоторой функции расстояния от новых объектов до уже существующих.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2022

Для решения таких задач обычно применяются численные методы на основе итерационных алгоритмов и вычислительных процедур линейного и нелинейного программирования, комбинаторной оптимизации, оптимизации на графах. Один из подходов к решению задач размещения, который позволяет получить результаты в аналитической форме, состоит в применении моделей и методов тропической математики, изучающей теорию и приложения алгебраических систем с идемпотентными операциями [4–7]. Для некоторых классов задач, включая минимаксные задачи размещения одиночного объекта в пространстве с метрикой Чебышёва и прямоугольной (манхэттенской) метрикой, получены прямые аналитические решения на основе методов тропической оптимизации [8–10]. Модели размещения с расстоянием Чебышёва применяются при анализе движения различных устройств и механизмов, включая мостовые краны, автоматические сверлильные станки, плоттеры, 3D-принтеры, а также некоторые типы беспилотных летательных аппаратов.

В настоящей статье рассматривается минимаксная задача о размещении двух объектов в многомерном пространстве с метрикой Чебышёва при наличии интервальных ограничений на допустимую область размещения. В задаче имеются две группы объектов с заданными координатами и требуется найти координаты оптимального размещения двух новых объектов с учетом заданных ограничений. Размещение новых объектов считается оптимальным, если оно минимизирует максимум следующих величин: расстояние от первого объекта до самого удаленного от него объекта из первой группы имеющихся объектов, расстояние от второго объекта до самого удаленного объекта из второй группы, а также расстояние между первым и вторым новыми объектами. Рассматриваемая задача размещения формулируется как задача многомерной оптимизации в терминах тропической математики. На основе использования методов и результатов тропической оптимизации найдено прямое аналитическое решение задачи. Получен результат, который описывает область оптимального размещения новых объектов в параметрической форме, удобной для формального анализа решения и непосредственных вычислений.

2. Задача о размещении двух объектов. Рассмотрим пространство вещественных векторов $\mathbb{R}^n$, расстояние между которыми измеряется при помощи метрики Чебышёва. Для любых двух векторов $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n)^T$ и $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)^T$ метрика Чебышёва вычисляется по формуле

$$d(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = \max_{1 \le i \le n} |r_i - s_i|.$$

Предположим, что имеются две группы объектов: первая группа из l объектов (точек пространства) с координатами $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_l$ и вторая группа из m объектов с координатами $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_m$. Требуется найти координаты $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ оптимального размещения двух новых объектов с учетом заданных ограничений.

Объекты необходимо разместить так, чтобы минимизировать максимум расстояний от точки $\boldsymbol{x}$ до самой удаленной от нее точки из набора точек $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_l$, от точки $\boldsymbol{y}$ до самой удаленной точки из $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_m$, а также расстояния между $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Указанный максимум записывается в виде целевой функции задачи:

$$\max \left\{ \max_{1 \le j \le l} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}_j), \max_{1 \le k \le m} d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_k), d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right\}.$$

Допустимые области размещения новых объектов определены при помощи заданных векторов $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ в форме интервальных ограничений

$$\boldsymbol{g}_1 \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}_1, \qquad \boldsymbol{g}_2 \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{h}_2.$$

Объединение целевой функции и ограничений приводит к задаче оптимизации в виде

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \max\left\{\max_{1\leq j\leq l} d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}_j),\ \max_{1\leq k\leq m} d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{s}_k), d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\}; \\ &\boldsymbol{g}_1 \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}_1, \qquad \boldsymbol{g}_2 \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{h}_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Нетрудно понять, что задачу (1) можно представить в виде задачи линейного программирования, а затем найти численное решение с помощью одного из известных алгоритмов решения таких задач. В следующих разделах предлагается прямое аналитическое решение задачи, полученное с помощью методов тропической оптимизации.

3. Элементы тропической алгебры. В этом разделе перечислены основные понятия, обозначения и предварительные результаты тропической алгебры [4–7], которые используются для решения задачи размещения, представленной в форме задачи тропической оптимизации.

3.1. Идемпотентное полуполе. Рассмотрим непустое множество $\mathbb{X}$, которое замкнуто относительно операций сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$ и содержит их нейтральные элементы нуль $\mathbb{0}$ и единицу $\mathbb{1}$. Алгебраическая система $(\mathbb{X}, \mathbb{0}, \oplus)$ является коммутативной идемпотентной полугруппой с нейтральным элементом, система $(\mathbb{X}\setminus\{\mathbb{0}\}, \mathbb{1}, \otimes)$ — коммутативной группой, а умножение $\otimes$ дистрибутивно относительно сложения $\oplus$. Систему $(\mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \oplus)$ обычно называют идемпотентным полуполем.

В идемпотентном полуполе операция $\oplus$ является идемпотентной: для любого $x \in \mathbb{X}$ выполняется $x \oplus x = x$, а операция $\otimes$ обратимой: для любого $x \neq \mathbb{0}$ существует x^{-1} такой, что $xx^{-1} = \mathbb{1}$ (здесь и далее знак операции $\otimes$ умножения опускается).

Целая степень обозначает результат многократного умножения числа на себя: $x^p = xx^{p-1}$, $x^{-p} = (x^{-1})^p$, $x^0 = \mathbb{1}$ и $\mathbb{0}^p = \mathbb{0}$ для любого $x \in \mathbb{X}$ и целого $p > 0$. Предполагается, что для любого $a \in \mathbb{X}$ и целого $p \neq 0$ уравнение $x^p = a$ имеет единственное решение, а потому степень с рациональными показателем также определена.

В полуполе задано отношение частичного порядка: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Предполагается, что этот частичный порядок дополнен до линейного.

Операции полуполя являются монотонными по каждому аргументу: из неравенства $x \leq y$ следуют неравенства $x \oplus z \leq y \oplus z$ и $xz \leq yz$ при любом z. Сложение обладает экстремальным свойством, которое выражается неравенствами: $x \leq x \oplus y$ и $y \leq x \oplus y$. Неравенство $x \oplus y \leq z$ равносильно системе $x \leq z$ и $y \leq z$. Операция возведения в степень монотонна в том смысле, что для $x, y \neq \mathbb{0}$ и рационального q из неравенства $x \leq y$ следует $x^q \leq y^q$, если $q \geq 0$, и $x^q \geq y^q$ в противном случае.

Для любых $x, y \in \mathbb{X}$ и рационального $q \geq 0$ справедливо биномиальное тождество $(x \oplus y)^q = x^q \oplus y^q$, которое обобщается на случай произвольного числа слагаемых.

В качестве примера идемпотентного полуполя рассмотрим вещественное полуполе $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, +)$, для которого операции и их нейтральные элементы определены так: $\oplus = \max$, $\otimes = +$, $\mathbb{0} = -\infty$ и $\mathbb{1} = 0$. Обратный элемент x^{-1} совпадает с противоположным элементом $-x$ в обычной арифметике. Степень x^y соответствует арифметическому произведению xy. Порядок, индуцированный операцией идемпотентного сложения, является эквивалентным обычному линейному порядку на $\mathbb{R}$.

3.2. ***Алгебра векторов и матриц.*** Обозначим через $\mathbb{X}^{m\times n}$ множество матриц из m строк и n столбцов, а через $\mathbb{X}^n$ множество векторов-столбцов, состоящих из n элементов, над идемпотентным полуполем $\mathbb{X}$. Матрица и вектор, все элементы которых равны $\mathbb{0}$, называются нулевыми. Вектор, у которого нет нулевых элементов, называется регулярным.

Операции с матрицами (векторами) выполняются по обычным правилам с заменой арифметических сложения и умножения на операции $\oplus$ и $\otimes$. Свойства монотонности скалярных операций обобщаются на операции над матрицами (векторами), для которых неравенства понимаются покомпонентно.

Для любого ненулевого вектора-столбца $\boldsymbol{x} = (x_i)$ определим операцию мультипликативно сопряженного транспонирования, результатом которой является вектор-строка $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$ с элементами $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$ в противном случае. Для ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$ справедливо очевидное равенство $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{x} = \mathbb{1}$.

Рассмотрим множество квадратных матриц $\mathbb{X}^{n\times n}$. Матрица, у которой все элементы на диагонали равны $\mathbb{1}$, а вне диагонали — $\mathbb{0}$, обозначается через $\boldsymbol{I}$ и называется единичной. Для любой матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и целого $p > 0$ определена степень так, что $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{p-1}$ и $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$. След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ вычисляется как сумма ее диагональных элементов:

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn} = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$ находится по формуле

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n) = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}^k).$$

Если выполняется условие $\rho(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, то для матрицы $\boldsymbol{A}$ определена матрица Клини в виде суммы степеней

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^k.$$

3.3. ***Задача тропической оптимизации.*** Предположим, что заданы матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$, векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{X}^n$ и скаляр $r \in \mathbb{X}$. Пусть требуется найти регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, которые решают задачу

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{x}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^-\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^-\boldsymbol{x} \oplus r; \\ & \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}. \end{aligned} \tag{2}$$

Решение задачи (2) найдено в работах [11, 12] в следующей форме (см. также [13]).

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — матрица со спектральным радиусом $\rho(\boldsymbol{A})$. Пусть $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{g}$ — векторы, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{h}$ — регулярные векторы, а r — скаляр, для которых выполняются условия $\boldsymbol{h}^-\boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$ и $\rho(\boldsymbol{A}) \oplus (\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{p})^{1/2} \oplus r > \mathbb{0}$. Тогда минимум целевой функции* *задачи* (2) *равен*

$$\mu = \rho(\boldsymbol{A}) \oplus \bigoplus_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{A}^{k} \boldsymbol{p})^{1/(k+2)} \oplus \bigoplus_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^{-} \boldsymbol{A}^{k} \boldsymbol{g} \oplus \boldsymbol{h}^{-} \boldsymbol{A}^{k} \boldsymbol{p})^{1/(k+1)} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} (\boldsymbol{h}^{-} \boldsymbol{A}^{k} \boldsymbol{g})^{1/k} \oplus r,$$

а все решения записываются в параметрической форме

$$\boldsymbol{x} = (\mu^{-1} \boldsymbol{A})^{*} \boldsymbol{u},$$

где $\boldsymbol{u}$ *— вектор параметров, который удовлетворяет условию*

$$\mu^{-1} \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{u} \leq ((\mu^{-1} \boldsymbol{q}^{-} \oplus \boldsymbol{h}^{-})(\mu^{-1} \boldsymbol{A})^{*})^{-}.$$

4. Алгебраическое решение задачи размещения. Представим задачу о размещении двух объектов (1) в контексте идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ как задачу тропической оптимизации. Сначала заметим, что расстояние Чебышёва между векторами $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^{n}$ можно записать в виде

$$d(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = \bigoplus_{i=1}^{n} (r_i^{-1} s_i \oplus s_i^{-1} r_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} r_i^{-1} s_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} s_i^{-1} r_i = \boldsymbol{r}^{-} \boldsymbol{s} \oplus \boldsymbol{s}^{-} \boldsymbol{r}.$$

Тогда задача (1) формулируется в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ следующим образом. В пространстве $\mathbb{R}^{n}$ заданы два набора векторов $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_l$ и $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_m$, а также векторы $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$. Требуется найти векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n}$, на которых достигается минимум

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad & \bigoplus_{j=1}^{l} (\boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{r}_j \oplus \boldsymbol{r}_j^{-} \boldsymbol{x}) \oplus \bigoplus_{k=1}^{m} (\boldsymbol{y}^{-} \boldsymbol{s}_k \oplus \boldsymbol{s}_k^{-} \boldsymbol{y}) \oplus \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-} \boldsymbol{x}; \\ & \boldsymbol{g}_1 \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}_1, \qquad \boldsymbol{g}_2 \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{h}_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Полное решение задачи дает следующий результат.

Лемма 2. *Введем обозначения для сумм векторов:*

$$\boldsymbol{p}_1 = \bigoplus_{j=1}^{l} \boldsymbol{r}_j, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \bigoplus_{k=1}^{m} \boldsymbol{s}_k, \qquad \boldsymbol{q}_1^{-} = \bigoplus_{j=1}^{l} \boldsymbol{r}_j^{-}, \qquad \boldsymbol{q}_2^{-} = \bigoplus_{k=1}^{m} \boldsymbol{s}_k^{-}.$$

Тогда минимум в задаче (3) *равен*

$$\begin{aligned} \mu = (\boldsymbol{q}_2^{-} \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_1^{-} \boldsymbol{p}_2)^{1/3} \oplus (\boldsymbol{q}_1^{-} \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^{-} \boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{q}_2^{-} \boldsymbol{g}_1 \oplus \boldsymbol{q}_1^{-} \boldsymbol{g}_2 \oplus \boldsymbol{h}_2^{-} \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{h}_1^{-} \boldsymbol{p}_2)^{1/2} \oplus \\ \oplus \boldsymbol{q}_1^{-} \boldsymbol{g}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^{-} \boldsymbol{g}_2 \oplus \boldsymbol{h}_1^{-} \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{h}_2^{-} \boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{h}_2^{-} \boldsymbol{g}_1 \oplus \boldsymbol{h}_1^{-} \boldsymbol{g}_2, \end{aligned}$$

а все регулярные решения записываются в параметрической форме

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 \oplus \mu^{-1} \boldsymbol{u}_2, \qquad \boldsymbol{y} = \mu^{-1} \boldsymbol{u}_1 \oplus \boldsymbol{u}_2,$$

где $\boldsymbol{u}_1$ *и* $\boldsymbol{u}_2$ *— векторы параметров, которые удовлетворяют условиям*

$$\mu^{-1} \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{g}_1 \leq \boldsymbol{u}_1 \leq (\mu^{-1} \boldsymbol{q}_1^{-} \oplus \boldsymbol{h}_1^{-} \oplus \mu^{-1} (\mu^{-1} \boldsymbol{q}_2^{-} \oplus \boldsymbol{h}_2^{-}))^{-},$$

$$\mu^{-1}\boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{g}_2 \leq \boldsymbol{u}_2 \leq (\mu^{-1}(\mu^{-1}\boldsymbol{q}_1^- \oplus \boldsymbol{h}_1^-) \oplus \mu^{-1}\boldsymbol{q}_2^- \oplus \boldsymbol{h}_2^-)^-.$$

Доказательство. Рассмотрим целевую функцию задачи тропической оптимизации (3) и преобразуем ее путем перегруппировки слагаемых к виду

$$\bigoplus_{j=1}^{l} \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{r}_j \oplus \bigoplus_{j=1}^{l} \boldsymbol{r}_j^- \boldsymbol{x} \oplus \bigoplus_{k=1}^{m} \boldsymbol{y}^- \boldsymbol{s}_k \oplus \bigoplus_{k=1}^{m} \boldsymbol{s}_k^- \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^- \boldsymbol{x} =$$
$$= \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}^- \boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^- \boldsymbol{x}.$$

Введем следующие блочные векторы и матрицу порядка $2n$:

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_1 \\ \boldsymbol{g}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{h}_1 \\ \boldsymbol{h}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

С использованием введенных обозначений задача (3) записывается так:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{z}} \quad & \boldsymbol{z}^- \boldsymbol{J} \boldsymbol{z} \oplus \boldsymbol{z}^- \boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^- \boldsymbol{z}; \\ & \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{h}. \end{aligned} \tag{4}$$

Учитывая, что полученная задача имеет форму задачи (2), для ее решения можно применить теорему 1 при условии, что $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}$ и $r = \mathbb{0}$. Из теоремы следует, что минимум целевой функции задачи (4) равен

$$\mu = \rho(\boldsymbol{J}) \oplus \bigoplus_{k=0}^{2n-1} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{J}^k \boldsymbol{p})^{1/(k+2)} \oplus \bigoplus_{k=0}^{2n-1} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{J}^k \boldsymbol{g} \oplus \boldsymbol{h}^- \boldsymbol{J}^k \boldsymbol{p})^{1/(k+1)} \oplus \bigoplus_{k=1}^{2n-1} (\boldsymbol{h}^- \boldsymbol{J}^k \boldsymbol{g})^{1/k}. \tag{5}$$

Чтобы упростить полученное выражение, заметим, что для целых $i \geq 0$ выполняются равенства $\boldsymbol{J}^{2i} = \boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{J}^{2i+1} = \boldsymbol{J}$, откуда следует, что $\operatorname{tr} \boldsymbol{J}^{2i} = \mathbb{1}$ и $\operatorname{tr} \boldsymbol{J}^{2i+1} = \mathbb{0}$.

Найдем спектральный радиус $\rho(\boldsymbol{J})$, объединяя вместе слагаемые с нечетными и четными степенями матрицы $\boldsymbol{J}$. Это дает следующий результат:

$$\rho(\boldsymbol{J}) = \bigoplus_{k=1}^{2n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{J}^k) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \operatorname{tr}^{1/(2i+1)}(\boldsymbol{J}^{2i+1}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/2i}(\boldsymbol{J}^{2i}) = \mathbb{1}.$$

Из полученного результата, в частности, следует, что $\mu \geq \rho(\boldsymbol{J}) = \mathbb{1}$.

Определим значения оставшихся сумм в выражении (5) для величины μ, каждую их которых преобразуем путем группировки слагаемых с четными и нечетными степенями матрицы $\boldsymbol{J}$. Сначала разобьем на две части сумму:

$$\bigoplus_{k=0}^{2n-1} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{J}^k \boldsymbol{p})^{1/(k+2)} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{p})^{1/(2i+2)} \oplus \bigoplus_{i=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{J} \boldsymbol{p})^{1/(2i+3)},$$

и заметим, что выражения в основании степеней справа записываются в виде

$$\boldsymbol{q}^- \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_2, \qquad \boldsymbol{q}^- \boldsymbol{J} \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_2.$$

Проверим, что первое из этих выражений не меньше $\mathbb{1}$. Действительно, используя экстремальное свойство сложения, получим неравенства

$$\boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{p}_1 = \bigoplus_{i=1}^{l}\boldsymbol{r}_i^-\bigoplus_{j=1}^{l}\boldsymbol{r}_j \geq \boldsymbol{r}_1^-\boldsymbol{r}_1 = \mathbb{1}, \qquad \boldsymbol{q}_2^-\boldsymbol{p}_2 = \bigoplus_{i=1}^{m}\boldsymbol{s}_i^-\bigoplus_{k=1}^{m}\boldsymbol{s}_k \geq \boldsymbol{s}_1^-\boldsymbol{s}_1 = \mathbb{1},$$

объединение которых дает неравенство $\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^-\boldsymbol{p}_2 \geq \mathbb{1}$.

В силу монотонности степени и идемпотентного сложения, для первой части рассматриваемой суммы имеем

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1}(\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{p})^{1/(2i+2)} = (\boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^-\boldsymbol{p}_2)^{1/2} \geq \mathbb{1}.$$

Рассмотрим вторую часть суммы и предположим, что выполняется условие

$$\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{J}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}_2^-\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{p}_2 \geq \mathbb{1}.$$

При этом условии для второй части суммы получим

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1}(\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{J}\boldsymbol{p})^{1/(2i+3)} = (\boldsymbol{q}_2^-\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{p}_2)^{1/3}.$$

В то же время, если справедливо противоположное неравенство $\boldsymbol{q}_2^-\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{p}_2 < \mathbb{1}$, то все слагаемые второй части меньше $\mathbb{1}$ и не влияют на значение всей суммы, которое в соответствии со значением первой части больше, чем $\mathbb{1}$. Следовательно, полученное выражение для второй части суммы можно использовать при любом условии: это выражение либо учитывается при вычислении всей суммы, если оно больше $\mathbb{1}$, либо его значение несущественно и его можно игнорировать, в противном случае.

Объединяя полученные выражения, находим величину всей суммы в виде

$$\bigoplus_{k=0}^{2n-1}(\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{p})^{1/(k+2)} = (\boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^-\boldsymbol{p}_2)^{1/2} \oplus (\boldsymbol{q}_2^-\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{p}_2)^{1/3}.$$

Перейдем к анализу следующей суммы в (5) и представим ее в виде двух сумм:

$$\bigoplus_{k=0}^{2n-1}(\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{g} \oplus \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{p})^{1/(k+1)} = \bigoplus_{i=0}^{n-1}(\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{g} \oplus \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{p})^{1/(2i+1)} \oplus \bigoplus_{i=0}^{n-1}(\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{J}\boldsymbol{g} \oplus \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{J}\boldsymbol{p})^{1/(2i+2)}.$$

С учетом того, что $\mu \geq \mathbb{1}$, будем рассуждать так же, как при определении значения предыдущей суммы. В результате получим

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1}(\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{g} \oplus \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{p})^{1/(2i+1)} = \boldsymbol{q}^-\boldsymbol{g} \oplus \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{g}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^-\boldsymbol{g}_2 \oplus \boldsymbol{h}_1^-\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{h}_2^-\boldsymbol{p}_2,$$

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1}(\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{J}\boldsymbol{g} \oplus \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{J}\boldsymbol{p})^{1/(2i+2)} = (\boldsymbol{q}^-\boldsymbol{J}\boldsymbol{g} \oplus \boldsymbol{h}^-\boldsymbol{J}\boldsymbol{p})^{1/2} = (\boldsymbol{q}_2^-\boldsymbol{g}_1 \oplus \boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{g}_2 \oplus \boldsymbol{h}_2^-\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{h}_1^-\boldsymbol{p}_2)^{1/2}.$$

Наконец, рассмотрим последнюю сумму и разделим ее слагаемые на две части:

$$\bigoplus_{k=1}^{2n-1} (\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{J}^{k}\boldsymbol{g})^{1/k} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{g})^{1/2i} \oplus \bigoplus_{i=0}^{n-1} (\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{J}\boldsymbol{g})^{1/(2i+1)}.$$

В силу условия $\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$ первая из полученных сумм меньше $\mathbb{1}$ и ее можно не учитывать. Для второй суммы тем же путем, что и раньше, получим

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1} (\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{J}\boldsymbol{g})^{1/(2i+1)} = \boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{J}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}_2^{-}\boldsymbol{g}_1 \oplus \boldsymbol{h}_1^{-}\boldsymbol{g}_2.$$

Объединяя все полученные результаты, находим минимум задачи (4), а значит и задачи (3), в виде

$$\mu = (\boldsymbol{q}_2^{-}\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_1^{-}\boldsymbol{p}_2)^{1/3} \oplus (\boldsymbol{q}_1^{-}\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^{-}\boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{q}_2^{-}\boldsymbol{g}_1 \oplus \boldsymbol{q}_1^{-}\boldsymbol{g}_2 \oplus \boldsymbol{h}_2^{-}\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{h}_1^{-}\boldsymbol{p}_2)^{1/2} \oplus \\ \oplus \boldsymbol{q}_1^{-}\boldsymbol{g}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^{-}\boldsymbol{g}_2 \oplus \boldsymbol{h}_1^{-}\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{h}_2^{-}\boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{h}_2^{-}\boldsymbol{g}_1 \oplus \boldsymbol{h}_1^{-}\boldsymbol{g}_2.$$

Теперь опишем множество векторов, на которых целевая функция достигает своего минимума μ. Чтобы записать векторы решения в соответствии с теоремой 1, введем векторы параметров $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$ порядка n и построим вектор

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}.$$

По теореме 1 множество решений задачи (3) состоит из векторов

$$\boldsymbol{z} = (\mu^{-1}\boldsymbol{J})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \mu^{-1}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{u} \leq ((\mu^{-1}\boldsymbol{q}^{-} \oplus \boldsymbol{h}^{-})(\mu^{-1}\boldsymbol{J})^{*})^{-}.$$

Преобразуем матрицу Клини следующим образом:

$$(\mu^{-1}\boldsymbol{J})^{*} = \bigoplus_{k=0}^{2n-1} \mu^{-k}\boldsymbol{J}^{k} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mu^{-2i}\boldsymbol{J}^{2i} \oplus \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mu^{-(2i+1)}\boldsymbol{J}^{2i+1}.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{J}^{2i} = \boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{J}^{2i+1} = \boldsymbol{J}$, а также, что $\mu \geq \mathbb{1}$, получим

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mu^{-2i}\boldsymbol{J}^{2i} = \boldsymbol{I}, \qquad \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mu^{-(2i+1)}\boldsymbol{J}^{2i+1} = \mu^{-1}\boldsymbol{J},$$

откуда следует, что

$$(\mu^{-1}\boldsymbol{J})^{*} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mu^{-1}\boldsymbol{I} \\ \mu^{-1}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}.$$

Запишем решение задачи в терминах исходной задачи (3). Полученное выше равенство для вектора $\boldsymbol{z}$ принимает форму двух равенств:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 \oplus \mu^{-1}\boldsymbol{u}_2, \qquad \boldsymbol{y} = \mu^{-1}\boldsymbol{u}_1 \oplus \boldsymbol{u}_2.$$

Условие на вектор параметров $\boldsymbol{u}$ записывается в виде неравенств

$$\mu^{-1}\boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{g}_1 \leq \boldsymbol{u}_1 \leq (\mu^{-1}\boldsymbol{q}_1^{-} \oplus \boldsymbol{h}_1^{-} \oplus \mu^{-1}(\mu^{-1}\boldsymbol{q}_2^{-} \oplus \boldsymbol{h}_2^{-}))^{-},$$

$$\mu^{-1}\boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{g}_2 \leq \boldsymbol{u}_2 \leq (\mu^{-1}(\mu^{-1}\boldsymbol{q}_1^- \oplus \boldsymbol{h}_1^-) \oplus \mu^{-1}\boldsymbol{q}_2^- \oplus \boldsymbol{h}_2^-)^-,$$

что завершает доказательство леммы. □

5. Заключение. В работе рассмотрена задача оптимального размещения двух объектов в пространстве с метрикой Чебышёва при условии интервальных ограничений на допустимую область размещения. С помощью методов тропической оптимизации получено новое аналитическое решение задачи, в котором множество решений представлено в параметрическом виде в компактной векторной форме.

Дальнейшие исследования будут направлены на решение задач размещения с другими типами ограничений, а также задач с числом объектов размещения больше двух.

Литература

1. Eiselt H. A., Marianov V. Pioneering developments in location analysis. In: *Foundations of Location Analysis. International Series in Operations Research and Management Science*, vol. 155, 3–22. New York, Springer (2011). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7572-0-1

2. Moradi E., Bidkhori M. Single facility location problem. In: *Facility Location. Contributions to Management Science*, 3–22. Heidelberg, Physica-Verlag (2009). https://doi.org/10.1007/978-3-7908-2151-2-3

3. Drezner Z. Continuous center problems. In: *Foundations of Location Analysis. International Series in Operations Research and Management Science*, vol. 155, 63–78. New York, Springer (2011). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7572-0-4

4. Kolokoltsov V. N., Maslov V. P. Idempotent Analysis and Its Applications. In Ser.: *Mathematics and Its Applications*, vol. 401. Dordrecht, Springer (1997). https://doi.org/10.1007/978-94-015-8901-7

5. Golan J. S. Semirings and Affine Equations Over Them. In Ser.: *Mathematics and Its Applications*, vol. 556. New York, Springer (2003). https://doi.org/10.1007/978-94-017-0383-3

6. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. Max Plus at Work. In Ser.: *Princeton Series in Applied Mathematics*. Princeton, Princeton University Press (2006).

7. Maclagan D., Sturmfels B. Introduction to Tropical Geometry. In Ser.: *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 161. Providence, AMS (2015). https://doi.org/10.1090/gsm/161

8. Krivulin N. Complete solution of a constrained tropical optimization problem with application to location analysis. In: *Relational and Algebraic Methods in Computer Science. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 8428, 362–378. Cham, Springer (2014). https://doi.org/10.1007/978-3-319-06251-8-22

9. Krivulin N. Using tropical optimization to solve constrained minimax single-facility location problems with rectilinear distance. *Comput. Manag. Sci.* **14** (4), 493–518 (2017). https://doi.org/10.1007/s10287-017-0289-2

10. Krivulin N. Algebraic solution of minimax single-facility constrained location problems with Chebyshev and rectilinear distances. *J. Log. Algebr. Methods Program.* **115**, 100578 (2020). https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2020.100578

11. Krivulin N. Algebraic solutions of tropical optimization problems. *Lobachevskii J. Math.* **36** (4), 363–374 (2015). https://doi.org/10.1134/S199508021504006X

12. Krivulin N. Direct solution to constrained tropical optimization problems with application to project scheduling. *Comput. Manag. Sci.* **14** (1), 91–113 (2017). https://doi.org/10.1007/s10287-016-0259-0

13. Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems. *Linear Algebra Appl.* **468**, 211–232 (2015). https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.044

Статья поступила в редакцию 8 мая 2022 г.;
доработана 8 июня 2022 г.;
рекомендована к печати 9 июня 2022 г.

Контактная информация:

Кривулин Николай Кимович — д-р физ.-мат. наук, проф.; nkk@math.spbu.ru
Брюшинин Максим Андреевич — студент; st076630@student.spbu.ru

Solving a two-facility location problem in a space with Chebyshev metric

N. K. Krivulin, M. A. Briushinin

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Krivulin N. K., Briushinin M. A. Solving a two-facility location problem in a space with Chebyshev metric. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 4, pp. 625–635. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.405 (In Russian)

A minimax two-facility location problem in multidimensional space with Chebyshev metric is examined subject to box constraints on the feasible location area. In the problem, there are two groups of points with known coordinates, and one needs to find coordinates for optimal location of two new points under the given constraints. The location of the new points is considered optimal if it minimizes the maximum of the following values: the distance between the first new point and the farthest point in the first group, the distance between the second new point and the farthest point in the second group, and the distance between the first and second new points. The location problem is formulated as a multidimensional optimization problem in terms of tropical mathematics that studies the theory and applications of algebraic systems with idempotent operations. A direct analytical solution to the problem is derived based on the use of methods and results of tropical optimization. A result is obtained which describes the set of optimal location of the new points in a parametric form ready for formal analysis of solutions and straightforward calculation.

Keywords: tropical optimization, idempotent semifield, minimax optimization problem, two-facility location problem.

References

1. Eiselt H. A., Marianov V. Pioneering developments in location analysis. In: *Foundations of Location Analysis. International Series in Operations Research and Management Science*, vol. 155, 3–22. New York, Springer (2011). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7572-0-1

2. Moradi E., Bidkhori M. Single facility location problem. In: *Facility Location. Contributions to Management Science*, 3–22. Heidelberg, Physica-Verlag (2009). https://doi.org/10.1007/978-3-7908-2151-2-3

3. Drezner Z. Continuous center problems. In: *Foundations of Location Analysis. International Series in Operations Research and Management Science*, vol. 155, 63–78. New York, Springer (2011). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7572-0-4

4. Kolokoltsov V. N., Maslov V. P. Idempotent Analysis and Its Applications. In Ser.: *Mathematics and Its Applications*, vol. 401. Dordrecht, Springer (1997). https://doi.org/10.1007/978-94-015-8901-7

5. Golan J. S. Semirings and Affine Equations Over Them. In Ser.: *Mathematics and Its Applications*, vol. 556. New York, Springer (2003). https://doi.org/10.1007/978-94-017-0383-3

6. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. Max Plus at Work. In Ser.: *Princeton Series in Applied Mathematics*. Princeton, Princeton University Press (2006).

7. Maclagan D., Sturmfels B. Introduction to Tropical Geometry. In Ser.: *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 161. Providence, AMS (2015). https://doi.org/10.1090/gsm/161

8. Krivulin N. Complete solution of a constrained tropical optimization problem with application to location analysis. In: *Relational and Algebraic Methods in Computer Science. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 8428, 362–378. Cham, Springer (2014). https://doi.org/10.1007/978-3-319-06251-8-22

9. Krivulin N. Using tropical optimization to solve constrained minimax single-facility location problems with rectilinear distance. *Comput. Manag. Sci.* **14** (4), 493–518 (2017). https://doi.org/10.1007/s10287-017-0289-2

10. Krivulin N. Algebraic solution of minimax single-facility constrained location problems with Chebyshev and rectilinear distances. *J. Log. Algebr. Methods Program.* **115**, 100578 (2020). https://doi.org/10.1016/j.jlamp.2020.100578

11. Krivulin N. Algebraic solutions of tropical optimization problems. *Lobachevskii J. Math.* **36** (4), 363–374 (2015). https://doi.org/10.1134/S199508021504006X

12. Krivulin N. Direct solution to constrained tropical optimization problems with application to project scheduling. *Comput. Manag. Sci.* **14** (1), 91–113 (2017). https://doi.org/10.1007/s10287-016-0259-0

13. Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems. *Linear Algebra Appl.* **468**, 211–232 (2015). https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.044

Received: May 8, 2022
Revised: June 8, 2022
Accepted: June 9, 2022

Authors' information:

Nikolai K. Krivulin — nkk@math.spbu.ru
Maksim A. Briushinin — st076630@student.spbu.ru

ХРОНИКА

13 апреля 2022 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Полякова в санкт-петербургском Доме ученых им. М. Горького выступили д-р техн. наук, проф. В. И. Горбулин и канд. техн. наук Н. И. Алимов (Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского) с докладом на тему «Методы теоретической механики в задачах синтеза спутниковых систем и формирования управления пространственным поворотом космического аппарата».

Краткое содержание доклада:

Предложены принципы оптимальности и методы оптимизации орбитального построения глобальных спутниковых систем на произвольном множестве начальных положений искусственного спутника Земли (ИСЗ). Получены примеры спутниковых систем, которые по показателям качества превосходят известные. Обоснован новый класс орбитального построения глобальных спутниковых систем — диссимметричные баллистические структуры. Рассмотрен метод синтеза управления пространственным поворотом ИСЗ как твердого тела на базе решения первой основной задачи динамики. Одним из главных этапов является формирование траекторий углового движения ИСЗ как на управляемых, так и на неуправляемых участках. Для построения траектории свободного углового движения динамически симметричного ИСЗ, обеспечивающего требуемую переориентацию за заданное время, предложены эффективные алгоритмы. Численные исследования показали, что данная задача имеет несколько решений, которые позволяют достаточно точно оценивать энергозатраты, необходимые для требуемого пространственного поворота ИСЗ за заданное время.