Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 4
УДК 519.2, 517.93
MSC 60F15, 37D25, 37E05

Об усиленных формах леммы Бореля — Кантелли и динамических системах с полиномиальным убыванием корреляций

А. Н. Фролов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Фролов А. Н.* Об усиленных формах леммы Бореля — Кантелли и динамических системах с полиномиальным убыванием корреляций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 4. С. 644–652. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.407

Усиленные формы леммы Бореля — Кантелли являются вариантами усиленных законов больших чисел для сумм индикаторов событий, ряд из вероятностей которых расходится. При этом суммы центрируются средними и нормируются некоторой функцией от средних. В настоящей работе получен новый вариант усиленной леммы Бореля — Кантелли при более широких, чем ранее, условиях на дисперсии приращений сумм. Усиленные формы широко применяются при изучении свойств динамических систем. Мы применим наш результат для исследования свойств некоторых сохраняющих меру растягивающих преобразований отрезка $[0, 1]$ с неподвижной точкой в нуле. Подобные результаты могут быть также получены для аналогичных многомерных отображений.

Ключевые слова: лемма Бореля — Кантелли, количественная лемма Бореля — Кантелли, усиленная форма леммы Бореля — Кантелли, суммы индикаторов событий, усиленный закон больших чисел, сходимость почти наверное, динамические системы, полиномиальное убывание корреляций.

1. Введение. Лемма Бореля — Кантелли широко используется в теории вероятностей для доказательства сильных предельных теорем. Обычно применяются различные ее варианты, содержащие достаточные условия для сходимости п. н. (почти наверное) или расходимости ряда из индикаторов событий (см., например, [1–7]). Для изучения статистических свойств динамических систем используется усиленная форма леммы Бореля — Кантелли, представляющая собой результат типа усиленного закона больших чисел для сумм индикаторов событий. При этом суммы центрируются средними и нормируются некоторой функцией от средних. Основным условием в усиленной форме является оценка сверху для дисперсий приращений сумм индикаторов событий. Так как события обычно зависимы, условия на дисперсии можно получить из условий на ковариации индикаторов. В теории динамических систем имеются результаты оценки ковариаций случайных величин (не обязательно индикаторов). Для суммируемых ковариаций подходит усиленная форма леммы Бореля — Кантелли из работ [8–10], а результаты ее приложения к динамическим системам можно найти в [11–14]. Поэтому интересен случай несуммируемых ковариаций. Классический вариант леммы Бореля — Кантелли применялся к динамическим системам в этом случае в работе [15]. Автором [16] было предложено обобщение усиленной формы, позволяющее рассматривать случай несуммируемых ковариаций, а также было дано ее применение к некоторым динамическим системам. Отметим, что оценка ковариаций — достаточно сложная задача (см., например, [17–19]). При этом в оценке появляются нормы функций в различных банаховых пространствах. Как мы увидим ниже, для индикаторов это приводит к таким условиям на дисперсии, для которых имеющиеся усиленные формы леммы Бореля — Кантелли не подходят. В настоящей работе мы восполним этот пробел и применим новый результат для исследования свойств некоторых сохраняющих меру растягивающих преобразований отрезка $[0,1]$ с неподвижной точкой в нуле.

2. Результаты. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство и $\{A_n\}$ — последовательность событий. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{A_k}, \quad E_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k), \tag{1}$$

где $\mathbb{I}_{A_n}$ — индикатор события A_n, $n \geqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть $\psi(x)$ и $g_i(x)$, $x \geqslant 0$, — неубывающие положительные функции такие, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/(n\psi(n))$ сходится, $g_i(0) = 0$, $g_i(x)/x$ и $x^{2-\delta}/g_i(x)$ не убывают для некоторого $\delta \in (0,1)$, $i = 1, 2$. Пусть $\theta(x)$, $x \geqslant 0$, — неотрицательная функция.*

Пусть $E_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и неравенства

$$\mathbf{D}(S_m - S_n) \leqslant g_1\left(E_m - E_n\right) + \theta(m-n) \tag{2}$$

выполнены для всех $m > n$ и всех достаточно больших n.

Положим $n_0 = 0$, $n_k = \max\{n : E_n < k\}$ для всех натуральных k. Предположим, что

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{r g_2(2^r)} \sum_{s=0}^{r} \sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} \theta(n_{(t+1)2^s} - n_{t2^s}) < \infty. \tag{3}$$

Тогда

$$S_n = E_n + o\left(B_n\right) \quad \text{п. н.} \tag{4}$$

при $n \to \infty$, где $B_n = \sqrt{g(E_n)\psi(\ln E_n)}\ln E_n$, $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$.

Для $\theta(x) \equiv 0$ теорема 1 доказана автором в [16].

Условие (3) выполнено, если функция $\theta(x)$ ограничена. При этом можно взять $g_1(x) = g_2(x)$.

Теорема 2. *Пусть $c(x)$, $x \geqslant 0$, — положительная невозрастающая непрерывная функция такая, что $c(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и $f(x) = x/c(x)$ возрастает. Положим $c_n = c(n)$ для всех натуральных n. Пусть $\{b_n\}$ и $\{d_n\}$ — последовательности вещественных положительных чисел, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. Предположим, что*

$$\mathbf{P}(A_i A_j) \leqslant (1 + c_{j-i})\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j) + b_{j-i}\mathbf{P}(A_i) + d_{j-i} \tag{5}$$

для всех $j > i$.

Тогда соотношение (2) выполнено с $g_1(x) = xf^{-1}(x)$ и $\theta(m-n) = \sum\limits_{n<i<j\leqslant m} d_{j-i}$, где $f^{-1}(x)$ — функция, обратная $f(x)$. Если неравенства (5) выполнены для всех $j > i$ с 0 вместо c_{j-i}, то соотношение (2) выполнено с $g_1(x) = x$.

Для $d_n = 0$ теорема 2 доказана автором в [16].

Перейдем к динамическим системам.

Пусть T — эргодическое сохраняющее меру преобразование вероятностного пространства $(X, \mathbb{B}, \mu)$. Далее мы опишем п. в. (почти всюду) асимптотическое поведение сумм

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{I_k} \circ T^k(x)$$

для некоторого класса преобразований $T : X \to X$, где $X = [0,1]$ и $\{I_k\}$ — последовательность интервалов, содержащихся в $[0,1]$). Аналогичные результаты можно также доказать в многомерном случае. Вообще, если имеются подходящие оценки убывания (с ростом k) корреляций случайных величин $f \circ T^k(x)$ и $\varphi(x)$ для f и φ из определенных классов функций, то результаты о поведении $S_n(x)$ могут быть получены с помощью теорем 1 и 2. Мы рассматриваем ниже системы с полиномиальным убыванием корреляций.

Нам потребуется следующая теорема, вытекающая из теоремы C в [19].

Теорема 3. *Пусть $T : [0,1] \to [0,1]$ и существуют точки $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_K = 1$ такие, что $T|_{(a_{j-1}, a_j)}$ являются C^2-диффеоморфизмами на своих образах для всех j. Пусть $d \in (0, a_1)$. Определим $\widehat{T} : [d,1] \to [d,1]$ соотношением $\widehat{T}(x) = T^{\tau(x)}(x)$, где $\tau(x) = \min\{n : T^n(x) \in [d,1]\}$ — время первого возвращения в $[d,1]$.*

Предположим, что

1) $T(0) = 0$;

2) $\inf\limits_{x\in[d,1]} |T'(x)| > 2$ и $\sup\limits_{x\in[d,1]} |\widehat{T}''(x)|(\widehat{T}'(x))^{-2} < \infty$;

3) $T(x)$ — топологически перемешивающее отображение;

4) $T(x)$, $T'(x)$ и $T''(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$(T(x) - Cx^{1+\gamma})^{(k)} = O(x^{1+\gamma+\varepsilon}), \quad k = 0, 1, 2,$$

в окрестности 0, где $C > 0$, $\gamma \in (0,1)$ и $\varepsilon > 0$ — некоторые постоянные.

Тогда существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что неравенство

$$\left| \int f \circ T^n \varphi d\mu - (1 + \mathbf{c}_n) \int f d\mu \int \varphi d\mu \right| \leqslant C_1 F_\gamma(n) \|f\|_\infty \|\varphi\|_{\mathcal{B}} \tag{6}$$

выполнено для всех натуральных n и $f \in L^\infty([0,1], \nu)$ и $\varphi \in \mathcal{B}$ таких, что $\operatorname{supp} f \subset [d,1]$ и $\operatorname{supp} \varphi \subset [d,1]$, где

$$F_\gamma(n) = \begin{cases} n^{-1/\gamma}, & \text{при } \gamma < 1/2, \\ n^{-2} \ln n, & \text{при } \gamma = 1/2, \\ n^{2-2/\gamma} & \text{при } \gamma > 1/2, \end{cases}$$

$\mathcal{B} = \{f \in L^1([d,1], (1-d)^{-1}\nu) : \|f\|_{\mathcal{B}} = \operatorname{Var}_{[d,1]} f + (1-d)^{-1}\|f\|_1 < \infty\}$, ν — мера Лебега. Кроме того, $\mathbf{c}_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \mu(\tau > k) = O(n^{1-1/\gamma})$.

Мы применим неравенство (6) к индикаторам. Ясно, что нормы в правой части в этом случае дадут постоянную. Это и приводит к необходимости ввести добавочную функцию $\theta(x)$ в теореме 1.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и* $\{I_n\}$ *— последовательность интервалов таких, что* $I_n \subset [d,1]$ *для всех* n. *Положим* $E_n = \sum_{k=1}^{n} \mu I_k$ *и определим по ним* $\{n_k\}$ *так же, как в теореме 1.*

Если $\gamma \in (0, 2/3]$ *и* $E_n \geqslant n^{1/q}$ *для всех* n, *где* $1 \leqslant q < 1+\gamma$, *то для п. в.* x

$$S_n(x) = E_n + o\left(B_n\right), \tag{7}$$

где $B_n = E_n^{(1+\gamma)/2} \ln E_n \ln\ln E_n$. *Этот результат сохранится при* $1+\gamma \leqslant q < 2$, *если в формуле для* B_n *заменить* $1+\gamma$ *на* q *и при* $\gamma = 2/3$ *дополнительно к этому заменить* $\ln E_n$ *на* $(\ln E_n)^{3/2}$.

Если $\gamma > 2/3$ *и* $E_n \geqslant n^{1/q}$ *для всех* n, *где* $1 \leqslant q < 1/(2-1/\gamma)$, *то для п. в.* x *выполнено соотношение (7) с* $B_n = E_n^{(1+\tau)/2} \ln E_n \ln\ln E_n$, *где* $\tau = \max\{(4-2/\gamma)q - 1, \gamma\}$.

Предположим дополнительно, что существует строго возрастающая, непрерывно дифференцируемая, выпуклая вверх функция $E(x)$ *такая, что* $E_n = E(n)$ *для всех* n. *Положим* $n(x) = E^{-1}(x)$.

Если $\gamma \in (2/3, 1)$ *и* $n(x) = x^q$, $1 \leqslant q < 1 + 1/(4-2/\gamma)$, *то для п. в.* x *выполнено соотношение (7) с* $B_n = E_n^{(1+\tau)/2} \ln E_n \ln\ln E_n$, *где* $\tau = \max\{(4-2/\gamma)(q-1), \gamma\}$.

В частности, из соотношения (7) следует, что для п. в. x

$$\frac{S_n(x)}{E_n} \to 1. \tag{8}$$

Если выполнено соотношение (8), то в работах [11–13] и ряде других $\{I_n\}$ называют SBC-последовательностью (SBC — сокращение от strong Borel—Cantelli). Отысканию условий, достаточных для (8), и посвящены упомянутые работы. Наша теорема 4 расширяет класс отображений, для которых это свойство можно устанавливать. Отметим, что мы выбрали для примера простейший вариант — преобразования интервала $[0,1]$. Теорема 1 позволяет рассматривать и более общую ситуацию. Например, используя теорему D из [19], можно доказать аналогичные результаты в многомерном случае.

В заключение заметим, что с точки зрения предельных теорем свойство (8) можно также называть сильной устойчивостью. Аналогия с устойчивостью случайного блуждания очевидна, разница лишь в типе сходимости и нормировке.

3. Доказательства. Перейдем к доказательствам наших результатов.

Доказательство теоремы 1. Доказательство представляет собой модификацию доказательства теоремы 1 из работы автора [16].

Для $m > n$ положим

$$S(n,m) = S_m - S_n, \quad E(n,m) = E_m - E_n, \quad \tilde{S}(n,m) = S(n,m) - E(n,m).$$

Пусть r и s — целые числа такие, что $r \geqslant 1$ и $0 \leqslant s \leqslant r$. Тогда для любого s мы имеем $\bigcup\limits_{t=0}^{2^{r-s}-1} (t2^s, (t+1)2^s] = (0, 2^r]$ и

$$\sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} E\left(n_{t2^s}, n_{(t+1)2^s}\right) < 2^r. \tag{9}$$

Положим

$$T_r = \sum_{s=0}^{r} \sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} \left(\tilde{S}\left(n_{t2^s}, n_{(t+1)2^s}\right)\right)^2.$$

В силу соотношений (2), (3), (9) и неубывания функции $g(x)/x$ получим

$$\begin{aligned} ET_r &\leqslant \sum_{s=0}^{r} \sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} \left(g_1\left(E\left(n_{t2^s}, n_{(t+1)2^s}\right)\right) + \theta\left(n_{(t+1)2^s} - n_{t2^s}\right)\right) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{s=0}^{r} \sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} \frac{g_1\left(2^r\right)}{2^r} E\left(n_{t2^s}, n_{(t+1)2^s}\right) + C(r+1) g_2\left(2^r\right) \leqslant \\ &\leqslant C(r+1)\left(g_1\left(2^r\right) + g_2\left(2^r\right)\right) \leqslant C(r+1) g\left(2^r\right). \end{aligned}$$

Далее доказательство совпадает с доказательством в [16]. Поэтому мы дадим его краткую версию.

Оценка ET_r влечет сходимость ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{ET_r}{r^2 g(2^r)\psi(cr)} \leqslant 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r\psi(cr)} < \infty,$$

где $c = (\ln 2)/4$. Отсюда вытекает

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{T_r}{r^2 g(2^r)\psi(cr)} < \infty \quad \text{и} \quad \frac{T_r}{r^2 g(2^r)\psi(cr)} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty \quad \text{п. н.}$$

Возьмем целое k такое, что $2^{r-1} < k \leqslant 2^r$. По неравенству Коши — Буняковского имеем

$$\begin{aligned} (S_{n_k} - E_{n_k})^2 &\leqslant (r+1)\left(\sum_{j=0}^{r-1} \left(\tilde{S}(n_{2^{j-1}}, n_{2^j})\right)^2 + \left(\tilde{S}(n_{2^{r-1}}, n_k)\right)^2\right) \leqslant \\ &\leqslant (r+1) T_r = o\left(r^3 g(2^r)\psi(cr)\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty \quad \text{п. н.} \end{aligned}$$

Учитывая определение n_k, неравенство $E_{n_k+1} \leqslant E_{n_k} + 1$ и свойства функций $\psi(x)$ и $g(x)$, имеем $g(2^r) \leqslant 2^{2-\delta} g(E_{n_k})$ и $\psi(cr) \leqslant \psi((\ln E_{n_k})/2)$ для всех достаточно больших r. Это дает соотношение (4) для $n = n_k$.

Для n таких, что $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, выполняются неравенства

$$S_{n_k} - E_{n_k} - 2 \leqslant S_n - E_n \leqslant S_{n_{k+1}} - E_{n_{k+1}} + 2.$$

Отсюда и из соотношения (4) для $n = n_k$ вытекает требуемое. $\square$

Доказательство теоремы 2 вытекает из доказательства теоремы 2 работы автора [16], в которой $d_n = 0$ для всех n. Нужно лишь учесть, что в формуле, выражающей дисперсии $\mathbf{D}(S_m - S_n)$ через ковариации, появится дополнительная сумма d_{j-i}, которая и даст дополнительное слагаемое $\theta(m-n)$ в правой части (2).

Доказательство теоремы 4. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций таких, что $\max\{\|f_n\|_\infty, \|f_n\|_\mathcal{B}\} \leqslant M$ для всех n. Тогда из соотношения (6) следует, что

$$\begin{aligned}
&\left|\int (f_j \circ T^j)(f_i \circ T^i) d\mu - \int f_i \circ T^i d\mu \int f_j \circ T^j d\mu\right| = \\
&\quad = \left|\int f_j \circ T^{j-i} f_i d\mu - \int f_i d\mu \int f_j d\mu\right| \leqslant \\
&\leqslant |\mathbf{c}_{j-i}| \left|\int f_i d\mu \int f_j d\mu\right| + C_1 M^2 F_\gamma(j-i) \leqslant \\
&\leqslant C'(j-i)^{1-1/\gamma} \left|\int f_i d\mu \int f_j d\mu\right| + C_1 M^2 F_\gamma(j-i).
\end{aligned} \tag{10}$$

для всех $j > i$.

Положим $f_n = \mathbb{I}_{I_n}$, $A_n = \{x : T^n(x) \in I_n\}$ для всех n. Тогда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{A_k}, \tag{11}$$

а неравенство (10) превращается в (5) с $\mathbf{P} = \mu$, $c_{j-i} = C'(j-i)^{1-1/\gamma}$, $b_{j-i} = 0$, $d_{j-i} = C_1 M^2 F_\gamma(j-i)$. Отсюда следует, что $c(x) = x^{1-1/\gamma}$, $f(x) = x^{1/\gamma}$ и $g_1(x) = x^{1+\gamma}$.

Положим $p = 1/\gamma$ при $\gamma \in (0, 1/2]$ и $p = (2/\gamma) - 2$ при $\gamma \in (1/2, 1)$. При $\gamma < 2/3$ и $\gamma \neq 1/2$ мы имеем $p > 1$ и

$$\sum_{n<i<j\leqslant m} F_\gamma(j-i) = \sum_{i=n+1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} (j-i)^{-p} \leqslant \sum_{i=n+1}^{m-1} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-p} \leqslant c_1(m-n).$$

При $\gamma = 1/2$ эта оценка сохранится, так как дополнительный логарифмический множитель не повлияет на сходимость последнего ряда. При $p = 1$ ($\gamma = 2/3$) имеем

$$\sum_{n<i<j\leqslant m} F_\gamma(j-i) = \sum_{i=n+1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} (j-i)^{-1} \leqslant c_2(m-n)\ln(m-n).$$

Далее при $p < 1$ ($\gamma > 2/3$) получим

$$\sum_{n<i<j\leqslant m} F_\gamma(j-i) = \sum_{i=n+1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} (j-i)^{-p} \leqslant c_3(m-n)^{2-p}.$$

Следовательно, можно положить $\theta(x) = x$ при $\gamma \in (0, 2/3)$, $\theta(x) = x \ln x$ при $\gamma = 2/3$ и $\theta(x) = x^{4-2/\gamma}$ при $\gamma > 2/3$. Для $\gamma \neq 2/3$, положив $v = \max\{1, 4 - 2/\gamma\}$, имеем

$$\sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} \theta(n_{(t+1)2^s} - n_{t2^s}) = \sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} (n_{(t+1)2^s} - n_{t2^s})^v \leqslant$$

$$\leqslant n_{2^r}^{v-1} \sum_{t=0}^{2^{r-s}-1} (n_{(t+1)2^s} - n_{t2^s}) = n_{2^r}^v.$$

Если $\gamma \in (0, 2/3)$, то последнее неравенство можно заменить равенством. Для $\gamma = 2/3$ аналогичная выкладка даст оценку сверху $n_{2^r} \ln n_{2^r}$.

Значит, при $\gamma \in (0, 2/3)$ условие (3) превращается в

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{n_{2^r}}{g_2(2^r)} < \infty.$$

Из условия $E_n \geqslant n^{1/q}$ следует, что $n_k \leqslant k^q$. Поэтому можно взять $g_2(x) = x^q$. При $\gamma = 2/3$ условием, достаточным для (3), будет

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{n_{2^r} \ln 2^r}{g_2(2^r)} < \infty.$$

Это дает $g_2(x) = x^q \ln x$. При $\gamma > 2/3$ условием, достаточным для (3), будет

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{(n_{2^r})^{4-2/\gamma}}{g_2(2^r)} < \infty.$$

Это дает $g_2(x) = x^{q(4-2/\gamma)}$. При этом нужно дополнительно предположить, что $q(4-2/\gamma) < 2$.

Так как $g_1(x) = x^{1+\gamma}$, функция $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ ведет себя на бесконечности как $x^{1+\tau}$ с $\tau = \max\{\gamma, q-1\}$ при $\gamma < 2/3$ и $\tau = \max\{\gamma, q(4-2/\gamma)-1\}$ при $\gamma > 2/3$. Если $\gamma = 2/3$, то функция $g(x)$ ведет себя как $x^{1+\gamma}$ при $q < 1+\gamma$ и как $x^q \ln x$ при $1+\gamma \leqslant q < 2$.

Из условия следует, что $n_k = \max\{l : l < n(k)\}$, где $n(x)$ — строго возрастающая, непрерывно дифференцируемая, выпуклая вниз функция. Тогда

$$n_{(t+1)2^s} - n_{t2^s} \leqslant \int_{t2^s}^{(t+1)2^s} n'(x)dx + 1 \leqslant 2^s n'((t+1)2^s) + 1.$$

Если $n(x) = n^q$, то $n_{(t+1)2^s} - n_{t2^s} \leqslant q2^{sq}(t+1)^{q-1} + 1$. Это даст $g_2(x) = x^{(4-2/\gamma)(q-1)+1}$, где $q < 1 + 1/(4-2/\gamma)$.

Выбирая $\psi(x) = (\ln x)^2$, по теореме 1 мы получаем требуемое. $\square$

Автор выражает благодарность анонимным рецензентам за ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению текста статьи.

Литература

1. Chung K. L., Erdős P. On the application of the Borel — Cantelli lemma. *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**, 179–186 (1952).

2. Erdős P., Rényi A. On Cantor's series with convergent $\sum 1/q$. *Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Math.* **2**, 93–109 (1959).

3. Spitzer F. *Principles of random walk*. Van Nostrand, Princeton (1964).

4. Móri T. F., Székely G. J. On the Erdős — Rényi generalization of the Borel — Cantelli lemma. *Studia Sci. Math. Hungar.* **18**, 173–182 (1983).

5. Petrov V. V. A note on the Borel — Cantelli lemma. *Statist. Probab. Lett.* **58**, 283–286 (2002).

6. Frolov A. N. Bounds for probabilities of unions of events and the Borel — Cantelli lemma. *Statist. Probab. Lett.* **82**, 2189–2197 (2012). https://doi.org/10.1016/j.spl.2012/08/002

7. Frolov A. N. On lower and upper bounds for probabilities of unions and the Borel — Cantelli lemma. *Studia Sci. Math. Hungarica* **52** (1), 102–128 (2015). https://doi.org/10.1556/SScMath.52.2015/1/1304

8. Schmidt W. Metrical theorems on fractional parts of sequences. *Trans. Amer. Math. Soc.* **110**, 493–518 (1964).

9. Phillipp W. Some metrical theorems in number theory. *Pacific J. Math.* **20**, 109–127 (1967).

10. Петров В. В. О росте сумм индикаторов событий. *Записки научных семинаров ПОМИ* **298**, 150–154 (2003).

11. Kim D. The dynamical Borel — Cantelli lemma for interval maps. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **17** (4), 891–900 (2007).

12. Gupta C., Nicol M., Ott W. A Borel — Cantelli lemma for non-uniformly expanding dynamical systems. *Nonlinearity* **23** (8), 1991–2008 (2010).

13. Haydn N., Nicol M., Persson T., Vaienti S. A note on Borel — Cantelli lemmas for non-uniformly hyperbolic dynamical systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **33** (2) 475–498 (2013). https://doi.org/10.1017/S014338571100099X

14. Luzia N. Borel — Cantelli lemma and its applications. *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (1), 547–560 (2014). https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2013-06028-X

15. Gouëzel S. A Borel — Cantelli lemma for intermittent interval maps. *Nonlinearity* **20** (6), 1491–1497 (2007).

16. Frolov A. N. On strong forms of the Borel — Cantelli lemma and intermittent interval maps. *J. Math. Analysis Appl.* **504** (2), 125425 (2021). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125425

17. Sarig O. Subexponential decay of correlations. *Invent. Math.* **150**, 629–653 (2002).

18. Gouëzel S. Sharp polynomial estimates for the decay of correlations. *Israel J. Math.* **139**, 29–65 (2004).

19. Hu H., Vaienti S. Lower bounds for the decay of correlations in non-uniformly expanding maps. *Ergodic Thoery Dynam. Systems* **39**, 1936–1970 (2019). https://doi.org/10.48550/arXiv.1307.0359

20. Фролов А. Н. Об усиленной форме леммы Бореля — Кантелли. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 1, 85–93 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022/109

Статья поступила в редакцию 5 апреля 2022 г.;
доработана 9 июня 2022 г.;
рекомендована к печати 9 июня 2022 г.

Контактная информация:

Фролов Андрей Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

On strong forms of the Borel — Cantelli lemma and dynamical systems with polynomial decays of correlations

A. N. Frolov

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Frolov A. N. On strong forms of the Borel — Cantelli lemma and dynamical systems with polynomial decays of correlations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 4, pp. 644–652. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.407 (In Russian)

Strong forms of the Borel — Cantelli lemma are variants of the strong law of large numbers for sums of the indicators of events such that the series from probabilities of these events diverges. These sums are centered at means and normalized by some function from means. In this paper, we derive new strong forms of the Borel — Cantelli lemma under wider restrictions on variations of increments of sums than it was done earlier. Strong forms are commonly used for investigations of properties of dynamical systems. We apply our results to describe properties of some measure preserving expanding maps of $[0,1]$ with a fixed point at zero. Such results can be proved for similar multidimensional maps as well.

Keywords: the Borel — Cantelli lemma, the quantitative Borel — Cantelli lemma, strong forms of the Borel — Cantelli lemma, sums of indicators of events, strong law of large numbers, almost surely convergence, dynamical systems, polynomial decay of correlations.

References

1. Chung K. L., Erdős P. On the application of the Borel — Cantelli lemma. *Trans. Amer. Math. Soc.* **72**, 179–186 (1952).

2. Erdős P., Rényi A. On Cantor's series with convergent $\sum 1/q$. *Ann. Univ. Sci. Budapest Sect. Math.* **2**, 93–109 (1959).

3. Spitzer F. *Principles of random walk*. Van Nostrand, Princeton (1964).

4. Móri T. F., Székely G. J. On the Erdős — Rényi generalization of the Borel — Cantelli lemma. *Studia Sci. Math. Hungar.* **18**, 173–182 (1983).

5. Petrov V. V. A note on the Borel — Cantelli lemma. *Statist. Probab. Lett.* **58**, 283–286 (2002).

6. Frolov A. N. Bounds for probabilities of unions of events and the Borel — Cantelli lemma. Statist. Probab. Lett. 82, 2189–2197 (2012). https://doi.org/10.1016/j.spl.2012/08/002

7. Frolov A. N. On lower and upper bounds for probabilities of unions and the Borel — Cantelli lemma. *Studia Sci. Math. Hungarica* **52** (1), 102–128. (2015). https://doi.org/10.1556/SScMath.52.2015/1/1304

8. Schmidt W. Metrical theorems on fractional parts of sequences. *Trans. Amer. Math. Soc.* **110**, 493–518 (1964).

9. Phillipp W. Some metrical theorems in number theory. *Pacific J. Math.* **20**, 109–127 (1967).

10. Petrov V. V. On the growth of sums of the indicators of events. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* **298**, 150–154 (2003) (In Russian) [Eng. transl.: *J. Math. Sci.* **128**, 2578–2580 (2005) https://doi.org/10.1007/s10958-005-0205-0].

11. Kim D. The dynamical Borel — Cantelli lemma for interval maps. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **17** (4), 891–900 (2007).

12. Gupta C., Nicol M., Ott W. A Borel — Cantelli lemma for non-uniformly expanding dynamical systems. *Nonlinearity* **23** (8), 1991–2008 (2010).

13. Haydn N., Nicol M., Persson T., Vaienti S. A note on Borel — Cantelli lemmas for non-uniformly hyperbolic dynamical systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **33** (2), 475–498 (2013). https://doi.org/10.1017/S014338571100099X

14. Luzia N. Borel — Cantelli lemma and its applications. *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (1), 547–560 (2014). https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2013-06028-X

15. Gouëzel S. A Borel — Cantelli lemma for intermittent interval maps. *Nonlinearity* **20** (6), 1491–1497 (2007).

16. Frolov A. N. On strong forms of the Borel — Cantelli lemma and intermittent interval maps. *J. Math. Analysis Appl.* **504** (2), 125425 (2021). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125425

17. Sarig O. Subexponential decay of correlations. *Invent. Math.* **150**, 629–653 (2002).

18. Gouëzel S. Sharp polynomial estimates for the decay of correlations. *Israel J. Math.* **139**, 29–65 (2004).

19. Hu H., Vaienti S. Lower bounds for the decay of correlations in non-uniformly expanding maps. *Ergodic Thoery Dynam. Systems* **39**, 1936–1970 (2019). https://doi.org/10.48550/arXiv.1307.0359

20. Frolov A. N. On a strong form of the Borel — Cantelli lemma. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 1, 85–93 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022/109 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **55**, iss. 1, 64–70 (2022). https://doi.org/10.1134/S1063454122010058].

Received: April 5, 2022
Revised: June 9, 2022
Accepted: June 9, 2022

Author's information:

Andrei N. Frolov — Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru