УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1
MSC 60E05, 62E10, 62G32

О некоторых вероятностных распределениях, связанных с классической схемой Бернулли. II*

С. М. Ананьевский, В. Б. Невзоров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Ананьевский С. М., Невзоров В. Б.* О некоторых вероятностных распределениях, связанных с классической схемой Бернулли. II // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 14–20. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.102

Классическая схема независимых испытаний Бернулли уже более трех столетий, начиная с работ Якова Бернулли, представляет одну из самых популярных тем в теории вероятностей. Она идеально подходит для постановки и решения различных практических задач. Получено множество результатов, связанных с модификациями этой схемы, но появляются новые ситуации, новые проблемы, которые требуют дальнейших продвижений в изучении разных случайных величин, связанных в той или иной степени с независимыми бернуллиевскими испытаниями. В настоящей работе продолжены исследования некоторых проблем, связанных с сериями успехов и неудач в последовательностях бернуллиевских случайных величин (с. в.). Эта работа является непосредственным продолжением работы «О некоторых вероятностных распределениях, связанных с классической схемой Бернулли», опубликованной в 2022 г.

Ключевые слова: схема Бернулли, биномиальное распределение, геометрическое распределение, производящие функции.

1. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин (с. в.) $X_1, X_2, \ldots$, принимающих значение 1 с некоторой вероятностью $p \quad (0 < p < 1)$ и значение 0 с вероятностью $q = 1 - p$.

Часто событие $\{X_n = 1\}$ трактуется как «успех в n-м испытании», а событие $\{X_n = 0\}$ формулируется как «неудача».

В [1] рассматривали некоторые ситуации, связанные с появлением в таких бернуллиевских последовательностях различных серий из нескольких подряд идущих успешных или неудачных испытаний.

Пусть $\mu(k)$ — число различных серий, состоящих из одного, двух, $\ldots, k-1$ успехов, предшествующих появлению первой серии уже из k успехов. Для производящей функции

$$\mu(k, s) = Es^{\mu(k)}$$

было получено соотношение

$$\mu(k, s) = \frac{p^{k-1}}{1 - s + sp^{k-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s \geq 0, \tag{1}$$

*Первую часть статьи см.: *Ананьевский С. М., Невзоров В. Б.* О некоторых вероятностных распределениях, связанных с классической схемой Бернулли // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 201–208. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.202

из которого, в частности, следовало, что математическое ожидание $a(k) = E\mu(k)$ имеет вид

$$a(k) = \frac{1 - p^{k-1}}{p^{k-1}}. \tag{2}$$

Для случайной величины $\nu(k)$ — числа серий неудач до появления группы из k последовательных успехов — было показано, что соответствующая производящая функция дается равенством

$$\nu(k, s) = \frac{(p + qs)p^{k-1}}{1 - s + sp^{k-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s \geq 0. \tag{3}$$

Из (3) следует, что

$$E\nu(k) = \frac{1 - p^k}{p^{k-1}}. \tag{4}$$

Из (2) и (4) получаем, что математическое ожидание суммарного числа $S(k)$ серий из успехов и неудач до первой группы, содержащей не менее k последовательных успешных испытаний, имеет вид

$$ES(k) = \frac{2 - p^{k-1} - p^k}{p^{k-1}}. \tag{5}$$

2. Продолжим рассмотрение такого рода проблем для серий из успехов и неудач. Рассмотрим вначале случайную величину $\nu(k, l)$ — минимальное число испытаний, которые нужно проделать до получения в них не менее k успехов и l неудач. Нетрудно убедиться, что

$$P(\nu(k, l) = n) = C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k} + C_{n-1}^{l-1} p^{n-l} q^l, \quad n = k + l, k + l + 1, \ldots \tag{6}$$

и

$$E\nu(k, l) = \sum_{n=k+l}^{\infty} n(C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k} + C_{n-1}^{l-1} p^{n-l} q^l). \tag{7}$$

В частности, получаем

$$E\nu(1, 1) = \frac{2q - q^2}{p} + \frac{2p - p^2}{q},$$

$$E\nu(2, 1) = \frac{q}{p}(6 - 6q + 2q^2) + \frac{3p^2 - 2p^3}{q},$$

$$E\nu(1, 2) = \frac{3q^2 - 2q^3}{p} + \frac{p}{q}(6 - 6p + 2p^2),$$

$$E\nu(2, 2) = \frac{q}{p^2}(12q^2 - 16q^3 + 6q^4) + \frac{p}{q^2}(12p^2 - 16p^3 + 6p^4).$$

Какова вероятность $P(k, l)$ того, что k успешных испытаний пройдут раньше, чем l неудачных? Видим, что

$$P(k, l) = \sum_{r=k-1}^{k+l-2} C_r^{k-1} p^k q^{r-k+1}. \tag{8}$$

Отсюда, в частности, следуют

$$P(1,l) = 1 - q^l, \qquad l \geq 1,$$

$$P(1,1) = p,$$

$$P(2,l) = 1 - (l+1)q^l + lq^{l+1}, \qquad l \geq 1,$$

$$P(2,1) = p^2,$$

$$P(2,2) = 1 - 3q^2 + 2q^3.$$

Рассмотрим теперь аналогичную задачу не для отдельно приходящих успехов или неудач, а для их серий.

Какова вероятность того, что серия из k подряд идущих успехов будет получена раньше серии, содержащей не менее чем l неудач?

Пусть $A(k,l)$ обозначает такое событие и

$$\chi(k,l) = P(A(k,l)). \tag{9}$$

Рассмотрим две ситуации, когда $X_1 = 1$ (первое испытание оказалось успешным) и $X_1 = 0$ (неудача в первой попытке), и две условные вероятности:

$$r_1 = P(A(k,l)|X_1 = 1), \qquad r_2 = P(A(k,l)|X_1 = 0). \tag{10}$$

Получив эти две вероятности, сможем уже использовать равенство

$$\chi(k,l) = pr_1 + qr_2, \tag{11}$$

чтобы получить интересующую нас вероятность.

Зафиксируем (с вероятностью p) событие $\{X_1 = 1\}$ и рассмотрим ситуации, когда

$$\{X_2 = 0\},\ \{X_2 = 1, X_3 = 0\},\ \ldots,\ \{X_2 = 1, X_3 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 0\}.$$

Сумма вероятностей этих событий равна

$$q + pq + p^2q + \ldots + p^{k-2}q = 1 - p^{k-1}.$$

Если происходит любое событие из этого набора, то можно просто считать, что процесс ожидания интересующего нас варианта начинается сначала с неудачного испытания. Если же происходит с вероятностью p^{k-1} событие

$$\{X_2 = 1, X_3 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 1\},$$

то с учетом того, что рассматривается ситуация с успехом в первом испытании, приходим в этой ситуации к появлению серии из k успехов раньше серии из l неудач. В итоге получаем соответствующее равенство для условной вероятности r_1:

$$r_1 = p^{k-1} + (1 - p^{k-1})r_2. \tag{12}$$

Аналогично можно рассмотреть вариант, когда $X_1 = 0$. В этом случае рассматриваем варианты

$$\{X_2 = 1\},\ \{X_2 = 0, X_3 = 1\},\ \ldots,\ \{X_2 = 0, X_3 = 0, \ldots, X_{l-1} = 0, X_l = 1\},$$

приводящие к ситуациям, когда можно, забыв о неудачных исходах, считать, что начинаем ожидание интересующей серии с успешного испытания. Отсюда следует, что

$$r_2 = (1 - q^{l-1})r_1. \tag{13}$$

Решая систему из двух уравнений (12) и (13), получаем

$$r_1 = \frac{p^{k-1}}{p^{k-1} + q^{l-1} - p^{k-1}q^{l-1}}, \tag{14}$$

$$r_2 = \frac{p^{k-1}(1 - q^{l-1})}{p^{k-1} + q^{l-1} - p^{k-1}q^{l-1}}. \tag{15}$$

С учетом равенств (11), (14) и (15)

$$\chi(k,l) = \frac{p^{k-1}(1 - q^{l})}{q^{l-1} + p^{k-1}(1 - q^{l-1})}. \tag{16}$$

Аналогично, меняя местами в (16) вероятности p и q , а также значения k и l, получаем, что серия из l неудач будет предшествовать серии из k успехов с вероятностью

$$\gamma(k,l) = 1 - \chi(k,l) = \frac{q^{l-1}(1 - p^{k})}{p^{k-1} + q^{l-1}(1 - p^{k-1})}. \tag{17}$$

Аналоги равенств (16) и (17) приведены в главе книги В. Феллера [2, гл. 8].

Выделим также случай, когда $k = l$. Получаем

$$\chi(k,k) = \frac{p^{k-1}(1 - q^{k})}{q^{k-1} + p^{k-1}(1 - q^{k-1})} \tag{18}$$

и

$$\gamma(k,k) = \frac{q^{k-1}(1 - p^{k})}{p^{k-1} + q^{k-1}(1 - p^{k-1})}. \tag{19}$$

Отметим также, что если $k = l$ и $p = q = 1/2$, то в этой ситуации естественны для такого симметричного случая равенства:

$$\chi(k,k) = \gamma(k,k) = 1/2. \tag{20}$$

3. Рассмотрим теперь числа испытаний, которые надо провести, чтобы получить первую из двух ожидаемых групп — из k успехов или из l неудач. Пусть $T = T(k,l)$ обозначает момент, когда сформируется первая из таких двух групп. Вновь рассмотрим две ситуации, когда $\{X_1 = 1\}$ имеет вероятность p, и $\{X_1 = 0\}$, вероятность которой равна $q = 1 - p$. Пусть $B_1(k,l)$ — математическое ожидание числа успехов в последовательности $X_1 = 1, X_2, X_3, \dots, X_T$; $B_2(k,l)$ — математическое ожидание такого числа в наборе $\{X_1 = 0, X_2, X_3, \dots, X_T\}$, тогда

$$B(k,l) = pB_1(k,l) + qB_2(k,l) \tag{21}$$

соответствует математическому ожиданию числа успешных испытаний до момента сформирования первой из двух рассматриваемых групп.

Остановимся вначале на случае, когда первое испытание оказалось успешным $\{X_1 = 1\}$. Рассмотрим событие $\{X_2 = 0\}$ с вероятностью q, события $\{X_2 =$

$1, \ldots, X_{r-1} = 1, X_r = 0\}$ с вероятностями $p^{r-2}q$ $(r = 3, \ldots, k)$ и $\{X_2 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 1\}$ с вероятностью p^{k-1}.

Если имеет место последнее из этих событий, то видим, что тогда интересующее нас математическое ожидание равно k. В случае, когда $\{X_2 = 0\}$, математическое ожидание совпадает с величиной $B_2(k,l) + 1$. Это математическое ожидание равно $B_2(k,l) + r - 1$, если происходит событие $\{X_2 = 1, \ldots, X_{r-1} = 1, X_r = 0\}$, $r = 3, \ldots, k$.

Отсюда следует, что если $\{X_1 = 1\}$, то имеет место равенство

$$B_1(k,l) = q(B_2(k,l)+1) + pq(2 + B_2(k,l)) + \ldots + p^{k-2}q(k-1+B_2(k,l)) + kp^{k-1} =$$
$$= q(1 + 2p + \ldots + (k-1)p^{k-2}) + kp^{k-1} + qB_2(k,l)(1 + p + \ldots + p^{k-2}) =$$
$$= \frac{1-p^k}{q} + (1-p^{k-1})B_2(k,l). \quad (22)$$

Если же $\{X_1 = 0\}$, то рассматриваем событие $\{X_2 = 1\}$ с вероятностью p, события $\{X_2 = 0, X_3 = 0, \ldots, X_{r-1} = 0, X_r = 1\}$ с вероятностями $q^{r-2}p$, $(r = 3, \ldots, l)$ и событие $\{X_2 = 0, X_3 = 0, \ldots, X_{l-1} = 0, X^l = 0\}$ с вероятностью q^{l-1}. В этом случае аналогично равенству (22) получаем

$$B_2(k,l) = q(B_1(k,l)+1) + pq(2 + B_1(k,l)) + \ldots + pq^{l-2}(l-1+B_1(k,l)) + lq^{l-1} =$$
$$= \frac{1-q^l}{p} + (1-q^{l-1})B_1(k,l). \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что

$$B_1(k,l) = \frac{p - p^{k+1} + q(1-q^l)(1-p^{k-1})}{pq(p^{k-1} + q^{l-1} - p^{k-1}q^{l-1})} = \frac{1 - p^{k+1} - qp^{k-1} - q^{l+1} + p^{k-1}q^{l+1}}{pq(p^{k-1} + q^{l-1} - p^{k-1}q^{l-1})}. \quad (24)$$

Вспоминая соотношение (21), получаем

$$B(k,l) = pB_1(k,l) + q\left\{\frac{1-q^l}{p} + (1-q^{l-1})B_1(k,l)\right\} =$$
$$= \frac{q(1-q^l)}{p} + (p + q(1-q^{l-1})B_1(k,l)) = \frac{q(1-q^l)}{p} + (1-q^l)B_1(k,l) =$$
$$= \frac{(1-p^k)(1-q^l)}{pq(p^{k-1} + q^{l-1} - p^{k-1}q^{l-1})}. \quad (25)$$

Приведем несколько частных случаев:

$$B(1,l) = \frac{1-q^l}{p}, \qquad l = 1, 2, \ldots, \quad (26)$$

$$B(k,1) = \frac{1-p^k}{q}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad (27)$$

$$B(k,k) = \frac{(1-p^k)(1-q^k)}{pq(p^{k-1} + q^{k-1} - p^{k-1}q^{k-1})}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad (28)$$

и, в частности,

$$B(2,2) = \frac{(1+p)(1+q)}{1-pq}. \quad (29)$$

Перейдем к нахождению математического ожидания случайных величин $T_1(k)$ и $T_2(l)$ — значения числа наблюдений, чтобы просто получить k последовательных успехов, и значения числа наблюдений, которые нужно сделать, чтобы получить серию из l неудач.

Если имеет место событие $\{X_1 = 0\}$, то условное распределение случайной величины $T_1(k)$ совпадает с безусловным распределением величины $T_1(k) + 1$. Для варианта, когда происходит какое-то из событий

$$\{X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_{s-1} = 1, X_s = 0\}, \quad s = 2, 3, \ldots, k,$$

условное распределение $T_1(k)$ совпадает с распределением случайной величины $T_1(k) + s$. В случае, когда

$$\{X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_k = 1\},$$

получаем $T_1(k) = k$.

Следовательно, если $k > 1$, то

$$\begin{aligned} ET_1(k) = q(1 + ET_1(k)) + pq(2 + ET_1(k)) + \ldots + p^{s-2}q(s - 1 + ET_1(k)) + \ldots + \\ + p^{k-1}q(k + ET_1(k)) + p^k k = q(1 + 2p + \ldots + (s-1)p^{s-2} + \ldots + kp^{k-1}) + \\ + qET_1(k)(1 + p + \ldots + p^{s-2} + \ldots + p^{k-1}) = q\left(\frac{1 - p^{k+1}}{(1-p)^2} - \frac{(k+1)p^k}{1-p}\right) + \\ + ET_1(k)(1 - p^k) = \left(\frac{1 - p^{k+1}}{1-p} - (k+1)p^k\right) + ET_1(k)(1 - p^k) = \\ = \frac{1 - (k+1)p^k + kp^{k+1}}{1-p} + (1 - p^k)ET_1(k) \end{aligned} \tag{30}$$

и

$$ET_1(k) = \frac{1 - (k+1)p^k + kp^{k+1}}{(1-p)p^k}. \tag{31}$$

Если же $k = 1$, то

$$P\{T_1(1) = 1\} = p, \quad P\{T_1(1) = s\} = q^{s-1}p \qquad (s = 2, 3, \ldots) \quad \text{и} \quad ET_1(1) = \frac{q}{p}.$$

Аналогично

$$ET_2(l) = \frac{1 - (l+1)q^l + lq^{l+1}}{(1-q)q^l}, \quad l = 2, 3, \ldots, \tag{32}$$

и

$$ET_2(1) = \frac{p}{q}.$$

Отметим, что полученные результаты позволят в дальнейшем найти и существенно более сложные выражения для математического ожидания числа испытаний, которые необходимо провести, чтобы получить как группу из k успехов, так и группу из l неудач.

Литература

1. Ананьевский С. М., Невзоров В. Б. О некоторых вероятностных распределениях, связанных с классической схемой Бернулли. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 2, 201–208 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.202

2. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 1, пер. с англ. Москва, Мир (1984).

Статья поступила в редакцию 27 июля 2022 г.;
доработана 22 августа 2022 г.;
рекомендована к печати 8 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Ананьевский Сергей Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доц.; ananjevskii@mail.ru
Невзоров Валерий Борисович — д-р физ.-мат. наук, проф.; vanev@mail.ru

On some probability distributions, related to the classical Bernoulli scheme. II*

S. M. Ananjevskii, V. B. Nevzorov

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Ananjevskii S. M., Nevzorov V. B. On some probability distributions, related to the classical Bernoulli scheme. II. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 14–20.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.102 (In Russian)

The classic scheme of independent trials by Bernoulli has been one of the most popular topics in probability theory for more than three centuries, starting with the work of Jacob Bernoulli. It is ideal for setting and solving various practical problems. Many results have been obtained related to modifications of this scheme, but new situations, new problems appear that require further progress in the study of various random variables related to one degree or another with independent Bernoulli tests. In this paper, we continue to study some problems related to the series of successes and failures in sequences of Bernoulli random variables (c. v.). This work is a direct continuation of the authors' article "On some probability distributions related to the classical Bernoulli scheme", published in 2022.

Keywords: Bernoulli scheme, binomial distribution, geometric distribution, generating functions.

References

1. Ananjevskii S. M., Nevzorov V. B. On some probability distributions, related to the classical Bernoulli scheme. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 2, 201–208 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.202 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **55**, iss. 2, 141–146 (2022). https://doi.org/10.1134/S1063454122020042].

2. Feller W. *An introduction o probability theory and its applications.* Vol. 1. New York, JohnWiley & Sons (1968). [Rus. ed.: Feller W. Vvedenie v teoriiu veroiatnostei i ee prilozheniia. Moscow, Mir Publ. (1984)].

Received: July 27, 2022
Revised: August 22, 2022
Accepted: September 8, 2022

Authors' information:

Sergey M. Ananjevskii — ananjevskii@mail.ru
Valery B. Nevzorov — vanev@mail.ru

*See first part: Ananjevskii S. M., Nevzorov V. B. On some probability distributions, related to the classical Bernoulli scheme. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 201–208. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.202 (In Russian)